УДК 531,36

О СЛОЖНЫХ СТРУКТУРАХ НЕАВТОНОМНОЙ ПЕРИОДИЧЕСКОЙ КУСОЧНО-ЛИНЕЙНОЙ СИСТЕМЫ НА ЦИЛИНДРЕ

В. Н. Белых, Ю. С. Чертков

(Горький)

Рассматривается неавтономная периодическая кусочно-линейная система уравнений второго порядка из теории фазовой синхронизации. В явном виде получены границы области существования грубой гомоклинической кривой. Указан характер изменения сложной структуры при движении через эти границы.

При изучении конкретных динамических систем размерности больше двух одной из трудных задач является исследование систем со сложной структурой, т. е. систем, обладающих счетным множеством периодических движений. Интерес к таким системам во многом связан с вопросом стохастических движений динамических систем [1]. К способам определения сложных структур, использовавшихся в работах [1-14], относятся: а) непосредственный анализ решений [9,10] в том числе и численными методами [11,12]; б) топологический метод в диссипативных системах [13]; в) методы символической динамики в консервативных системах [14]; г) сведение к отображению окружности [1]; д) нахождение грубой (а также и негрубой) гомоклинической кривой [2-8].

1. Постановка задачи. Основные результаты. Рассматривается система уравнений из теории фазовой синхронизации [6] вида (1.1), заданная в неавтономном цилиндрическом фазовом пространстве G в области параметров D

$$\varphi^{\cdot} = y,\; y^{\cdot} = \gamma - (\lambda + aF'(\varphi))y - F(\varphi) + bh(t) \tag{1.1}$$

$$h(t) = \sin \omega t,\; F(\varphi) = 1 - \varphi / \pi,\; \varphi \,(\mathrm{mod}\, 2\pi) \tag{1.2}$$

$$G = \left\{\varphi\,(\mathrm{mod}\, 2\pi),\; t\left(\mathrm{mod}\, \frac{2\pi}{\omega}\right),\; y\right\},$$

$$D = \{\lambda \geqslant 0,\; a \geqslant 0,\; b \geqslant 0,\; \omega > 0,\; \gamma\}$$

Основное внимание уделяется вопросу существования сложной структуры: рассматривается существование и бифуркации счетного числа периодических движений (p, q)-типа, т. е. периодических движений замыкающихся в G, за время $p\tau$ после $q > 0$ оборотов по φ (p, q — целые числа).

Определяется область параметров системы (1.1) d_+, соответствующая существованию гомоклинической кривой, согласно [15,16], гарантирующая наличие структуры

$$d_+\colon\; |\gamma - \gamma_0(\lambda, a)| < \varepsilon \tag{1.3}$$

$$\varepsilon = \frac{b}{\pi\sqrt{\Delta^2 + \omega^2\sigma^2}},\quad \sigma = -\lambda + \frac{a}{\pi},\quad \Delta = \omega^2 + \frac{1}{\pi}$$

$$\gamma_0(\lambda, a) = \frac{\pi\lambda + a}{\sqrt{(\pi\lambda - a)^2 + 4\pi}} \tag{1.4}$$

Функция $\gamma = \gamma_0(\lambda, a)$ соответствует бифуркации петли сепаратрисы, охватывающей верхний полуцилиндр, седла автономной системы (1.1) при $b = 0$.

Сложная структура в области d_+ определяется счетным множеством групп периодических движений (p, q)-типа ($q = 1, 2, \ldots$), каждая из которых состоит из счетного числа периодических движений (p^*, q), $(p^* + 1, q)$-типов. При выходе из области d_+ с изменением параметров через границы γ_+ (при $\sigma < 0$) и γ_- (при $\sigma > 0$), где $\gamma_+ = \gamma_0(\lambda, a) + \varepsilon$, $\gamma_- = \gamma_0(\lambda, a) - \varepsilon$, сложная структура не исчезает, но на границе изменяется так, что определяется счетным множеством групп периодических движений (p, q)-типов ($q = 1, 2, \ldots$). Каждая из них уже состоит из конечного числа периодических движений (p_1, q), (p_2, q), $\ldots$, (p_k, q)-типов.

Этот результат на языке символических последовательностей, порождаемых двумя отображениями T и L соответственно на локальном и глобальном кусках расширенной окрестности [16] гомоклинической кривой, означает следующее. При исчезновении гомоклинической кривой периодических последовательностей... $T^{j_1}LT^{j_2}...LT^{j_k}LT^{j_1}$ ... с одним и тем же числом операторов L на периоде становится конечное число (каждое из $j_1, j_2, \ldots, j_k$ конечны). Счетность числа периодических последовательностей достигается за счет счетности числа периодов с различным числом L на каждом из периодов.

При дальнейшем удалении от границы γ_+ $(\sigma < 0)$ и γ_- $(\sigma > 0)$ сложная структура исчезает. При выходе из области d_+ через другую часть границ γ_+ $(\sigma > 0)$ и γ_- $(\sigma < 0)$ сложная структура исчезает (при обратном переходе происходит «Ω-взрыв»). Существование сложных структур и их бифуркаций в работе получено при использовании способов а) и д), указанных выше.

Помимо приведенных, система (1.1) содержит бифуркации, аналогичные найденным в [6,7], определяющие изменение сложной структуры с периодическими движениями $(p, -q)$-типа (с обратным вращением по φ) и $(p, 0)$-типа (колебательными).

В заключение дается оценка области захвата системы фазовой синхронизации, соответствующей глобальной устойчивости системы (1.1).

2. Доопределение системы (1.1). Систему (1.1) в точках разрыва функции $F(\varphi)$, следуя [17,18], доопределим с помощью предельного перехода для решений системы (1.1)

$$F(\varphi)=\begin{cases}\varphi/\nu, & \varphi\in(-\nu,\nu],\\ (\pi-\varphi)/(\pi-\nu), & \varphi\in(\nu,2\pi-\nu],\end{cases}\qquad 0<\nu<\pi \tag{2.1}$$

при $\nu\to 0$. Будем предполагать, что вынужденное седловое периодическое движение системы (1.1), (2.1) не выходит за пределы области $(\nu, 2\pi-\nu)$ при $\nu\in(0,\pi)$. Для системы (1.1), (1.2) это, в частности, означает выполнение предельного неравенства

$$\varepsilon\leqslant\min\{1-\gamma, 1+\gamma\} \tag{2.2}$$

В результате предельного перехода при $\nu\to 0$ получаем, что на участке $(0, 2\pi]$ система (1.1), (1.2) имеет решения вида

$$\varphi = C_1e^{s_1t}+C_2e^{s_2t}+A\sin\omega t+B\cos\omega t+\pi(1-\gamma),\qquad y=\varphi^{\cdot} \tag{2.3}$$

где

$$s_{1,2}=\frac{1}{2}\left(\sigma\pm\sqrt{\sigma^2+4/\pi}\right),\quad A=-\frac{b\Delta}{\Delta^2+\omega^2\sigma^2},\quad B=\frac{\omega b\sigma}{\Delta^2+\omega^2\sigma^2} \tag{2.4}$$

Склеивание точек $\varphi=0$ и $\varphi=2\pi$ осуществляется по следующей схеме:

1) если $\varphi(t_1-0, t_0)=2\pi-0$, $y(t_1-0, t_0)=y_1>2a$, то решения продолжатся так, что $\varphi(t_1,t_1)=+0$, $y(t_1,t_1)=y(t_1-0,t_0)-2a$;

2) если $\varphi(t_1-0,t_0)=+0$, $y(t_1-0,t_0)<-2a$, то решения продолжатся так, что $\varphi(t_1,t_1)=2\pi-0$, $y(t_1,t_1)=y(t_1-0,t_0)+2a$;

3) если $\varphi(t_1-0,t_0)=2\pi-0(+0)$, $|y(t_1-0,t_0)|\leqslant 2a$, то решения продолжаются движениями вида $\varphi=0$, $y=g(t)$, приближающимися за конечное время t^* к предельному движению $\varphi\equiv 0$, $y\equiv 0$, играющему роль устойчивого периодического движения.

3. Область существования грубой гомоклинической кривой. Гомоклиническая кривая по определению Пуанкаре есть двоякоасимптотическая траектория к седловому периодическому движению. Ясно, что гомоклиническая кривая является пересечением устойчивого и неустойчивого сепаратрисных многообразий седлового периодического движения. Если это пересечение трансверсально, гомоклиническую кривую называют грубой [15,16], а в противном случае — негрубой [19].

Получим условия существования грубой гомоклинической кривой седлового периодического движения системы (1.1), (1.2) в области $\varphi\in(0,2\pi)$ вида (2.3) $(C_1=C_2=0)$

$$\varphi^*=A\sin\omega t+B\cos\omega t+\pi(1-\gamma),\qquad y^*=\frac{d\varphi^*}{dt} \tag{3.1}$$

Уравнения устойчивой и неустойчивой сепаратрисных поверхностей W^+ и W^- имеют вид

(3.2)
$$W^+\colon\ y = y^*(t) + s_2(\varphi - \varphi^*(t) - 2\pi)$$
$$W^-\colon\ y = y^*(t) + s_1(\varphi - \varphi^*(t))$$

(s_1 соответствует знаку плюс в (2.4)). Многообразия W^+ и W^- при переходе через $\varphi = 2\pi$ продолжаются решениями (2.3) в соответствии с введенной выше схемой доопределения.

Пусть l^+ и l^-— кривые пересечения поверхностей W^+ и W^- с плоскостью $\varphi = 2\pi + 0$ в фазовом пространстве G. Взаимное расположение поверхностей W^+ и W^- определяется взаимным расположением кривых l^+ и l^-. В частности, точки пересечения кривых l^+ и l^- соответствуют гомоклинической кривой системы (1.1). Обозначим через $y^+(t)$ и $y^-(t)$ уравнения кривых l^+ и l^-. Условия существования простого корня уравнения

(3.3)
$$y^+(t) - y^-(t) = 0$$

эквивалентно существованию грубой гомоклинической кривой. Подстановкой значения $\varphi = 2\pi$ из первого уравнения в (3.2) получаем функцию $y^+(t)$, а из второго — функцию $y^-(t)$ в области параметров d_1

(3.4)
$$\left|\pi(1+\gamma) - \frac{b\sqrt{\omega^2+s_1^2}}{\sqrt{\Delta^2+\omega^2\sigma^2}}\right| > 2a$$

удовлетворяющую неравенству $\bar{y}^-(t) > 2a$. Тогда, считая ниже условие (3.4) выполненным, из схемы доопределения получаем $y^-(t) = y^-(t) - 2a$. В результате (3.3) преобразуется к уравнению вида

(3.5)
$$\sin(\omega t - \alpha) = \frac{\pi}{b}\sqrt{\Delta^2+\omega^2\sigma^2}\left(\gamma - \frac{\pi\lambda + a}{\sqrt{\pi^2\sigma^2+4\pi}}\right), \quad \alpha = \operatorname{arctg}\frac{\sigma\omega}{\Delta},$$

которое имеет два простых корня на периоде при выполнении неравенства (1.3). В результате, используя теорему Неймарка — Шильникова [15, 16] (результаты [15, 16], а также и [19] легко переносятся на случай склеенных систем [20]), получаем следующее утверждение.

Лемма 1. В области параметров d_+ система (1.1) содержит счетное число семейств ($q = 1, 2, \ldots$), каждое из которых состоит из счетного числа периодических движений (p, q)-типа (q фиксировано, $p = 1, 2, \ldots$), т. е. имеет сложную структуру.

На границе области d_+ ((1.3) переходит в равенство) в силу (3.5) касание многообразий W^+ и W^- носит квадратичный характер. Кроме того, произведение мультипликаторов седлового периодического движения [19] удовлетворяет неравенствам $\exp(s_1 + s_2)\tau - 1 < 0 (> 0)$ при $\sigma < 0$ $(\sigma > 0)$.

Следовательно, выполнены условия теоремы Гаврилова — Шильникова [19], согласно которой при переходе через границы $\gamma = \gamma_-$ $(\sigma < 0)$ и $\gamma = \gamma_+$ $(\sigma > 0)$ сложная структура исчезает, а при переходе через границы $\gamma = \gamma_-$ $(\sigma > 0)$ и $\gamma = \gamma_+$ $(\sigma < 0)$ сложная структура сохраняется, хотя пересечение W^+ и W^- при этом исчезает. Таким образом справедливо следующее утверждение.

Лемма 2. Существует μ, зависящее от параметров, такое, что система (1.1) имеет сложную структуру в области

(3.6)
$$\gamma_+ + \mu > \gamma \geqslant \gamma_+ \ (\sigma < 0), \quad \gamma_- - \mu < \gamma \leqslant \gamma_- \ (\sigma > 0)$$

4. Изменения сложной структуры. Выясним, какие изменения происходят со сложной структурой при переходе через границы $\gamma = \gamma_-$ $(\sigma > 0)$ и $\gamma = \gamma_+$ $(\sigma < 0)$. Для этого докажем следующее утверждение.

Лемма 3. Система (1.1) может иметь счетное число периодических движений (p, q) — типа с фиксированным q только в области существования гомоклинической кривой.

Доказательство. Обозначим через $\varphi = \Phi(t, t_0, \varphi_0, y_0)$, $y = Y(t, t_0, \varphi_0, y_0)$ решения (2.3), в которых $C_{1,2}$ выражены через начальные условия по формулам

$$C_i = \frac{(-1)^i}{s_2 - s_1}\{(y_0 - A\omega\cos\omega t_0 + B\omega\sin\omega t_0) + (\pi s_i)^{-1}[\varphi_0 - A\sin\omega t_0 - B\cos\omega t_0 - \pi(1-\gamma)]\}, \quad i = 1, 2 \tag{4.1}$$

Условия существования периодических движений (p, q)-типа имеют вид

$$\begin{gathered}\Phi(t_{i+1}, t_i, 0, y_i - 2a\,\mathrm{sign}\,i) = 2\pi \\ (\mathrm{sign}\,0 = 0) \\ Y(t_{i+1}, t_i, 0, y_i - 2a\,\mathrm{sign}\,i) = y_{i+1} \\ i = 0, 1, \ldots, q-1, \quad t_q = t_0 + p\tau\left(\tau = \frac{2\pi}{\omega}\right), \quad y_q = y_0 + 2a\end{gathered} \tag{4.2}$$

Система (4.2) — это система $2q$ уравнений относительно $2q$ неизвестных t_i и y_i ($i = 0, 1, \ldots, q-1$). Из вида функций, входящих в (4.2) (см. (2.3) и (4.1)), следует, что система (4.2) может иметь счетное число решений лишь в случае, если она имеет по крайней мере одно решение хотя бы при одном из $\Delta t_i \to \infty$ ($i > 0$). Полагая в (4.2), например $\Delta t_1 \to \infty$, приходим к системе уравнений вида

$$\begin{gathered}\varepsilon\sin\left(\omega t_0 - \alpha + \frac{\omega}{s_1}\ln Q_{21}\right) = 1 + \gamma - \frac{2(s_2 - a/\pi)}{s_2 - s_1}\sum_{j=1}^{q} Q_{j1} \\ \varepsilon\sin\left(\omega t_0 - \alpha + \frac{\omega}{s_1}\ln Q_{qi}\right) = \gamma - 1 + \frac{2(s_1 - a/\pi)}{s_1 - s_2}\sum_{j=1}^{q} Q_{qj}^{\varkappa} \\ Q_{ij} = \lim_{\Delta t_1 \to \infty}\exp[-s_1(t_i - t_j)]; \quad \varkappa = \left|\frac{s_2}{s_1}\right|, \quad \Delta t_i = t_i - t_{i-1}\end{gathered} \tag{4.3}$$

(Если и другие $\Delta t_i \to \infty$, то это приводит к равенству нулю соответствующих Q_{ij}.)

Учитывая ограниченность левой части (4.3), получаем при $a\lambda < 1$ необходимые условия существования решения (4.3) $|\gamma - \gamma_0(\lambda, a)| < \varepsilon$, совпадающие с условием существования грубой гомоклинической кривой (1.3). Лемма доказана.

Из лемм 2 и 3 вытекает следующая

Теорема. Система (1.1) в области параметров (3.6) имеет сложную структуру, образованную счетным множеством семейств периодических движений (p, q)-типа ($q = 1, 2, \ldots$), каждое из которых состоит из конечного числа периодических движений (q фиксировано, p конечно).

Исчезновение сложной структуры при выходе из области (3.6) с изменением γ связано с исчезновением решений системы уравнений (4.3) бесконечного (счетного) порядка при $q \to \infty$.

В качестве примера рассмотрим изменение числа периодических решений $(p, 1)$-типа при изменении параметров.

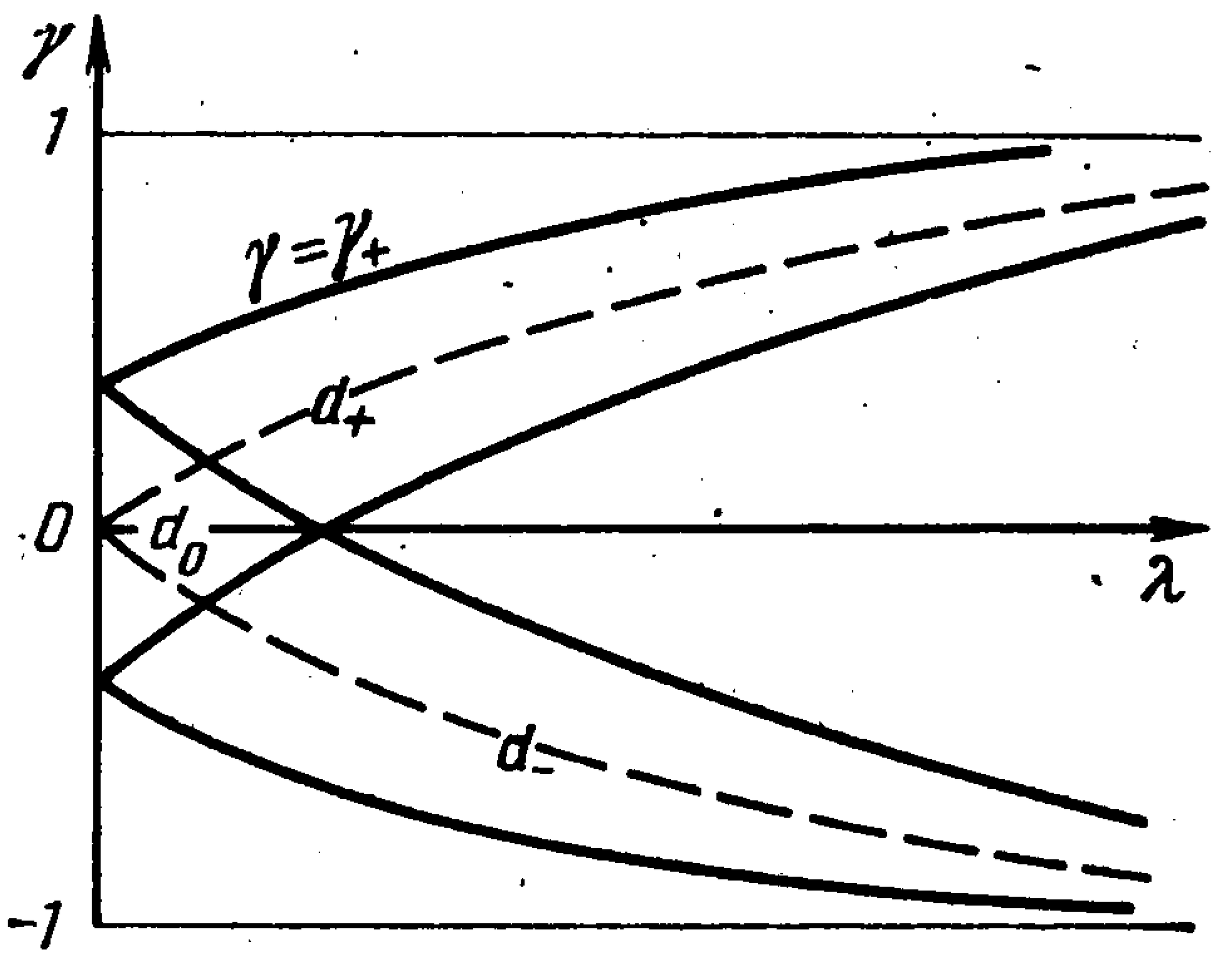
При $q = 1$ система (4.2) после исключения y_0 преобразуется в уравнение вида

$$\varepsilon\sin(\omega t_0 - \alpha) = \gamma + \frac{(\lambda + a/\pi)(e^{s_1\tau p} - e^{s_2\tau p}) - (s_1 + s_2)(e^{(s_1+s_2)\tau p} - 1)}{(s_1 - s_2)(e^{s_1\tau p} - 1)(e^{s_2\tau p} - 1)} \tag{4.4}$$

Переходя в (4.4) к пределу при $p \to \infty$, означающему, что $t_1 = t_0 + p\tau \to \infty$, и определяя корни полученного уравнения, устанавливаем, что система (1.1), (1.2) в области d_+ (см. (1.3)) имеет счетное число, в области $1 \geqslant \gamma > \gamma_+$ ($a < \pi\lambda$), $\gamma < \gamma_-$ ($a > \pi\lambda$) — конечное число, а в области $\gamma \leqslant \gamma_-$ ($a < \pi\lambda$), $1 \geqslant \gamma \geqslant \gamma_+$ ($a > \pi\lambda$) не имеет периодических движений $(p, 1)$-типа.

5. **Другие структуры.** Инвариантность системы (1.1) относительно замены $\varphi \to -\varphi$, $y \to -y$, $\gamma \to -\gamma$, $t \to t + \pi/\omega$ приводит к симметрии разбиения пространства параметров относительно $\gamma = 0$. При этом, в частности, область d_-, симметричная

области d_+, вида d_-: $-\gamma_+(\lambda, a) < \gamma < -\gamma_-(\lambda, a)$ соответствует сложной структуре, образованной счетным множеством периодических движений $(p, -q)$-типа. Так как при малых a область d_+ (d_-) заходит в область $\gamma < 0$ (>0), то существует область $d_0 = d_+ \cap d_-$, определяемая неравенствами d_0: $-\gamma_- > \gamma > \gamma_-$, для точек которой имеет место пересечение как верхней, так и нижней пары сепаратрисных многообразий. Следовательно, в области d_0 каждая из двух неустойчивых пересекается с каждой из двух устойчивых сепаратрисных поверхностей, составляющих W^- и W^+. Отсюда получаем, что области d_0 соответствует сложная структура, образованная счетными множествами периодических движений (p, q), $(p, -q)$ и $(p, 0)$-типов.

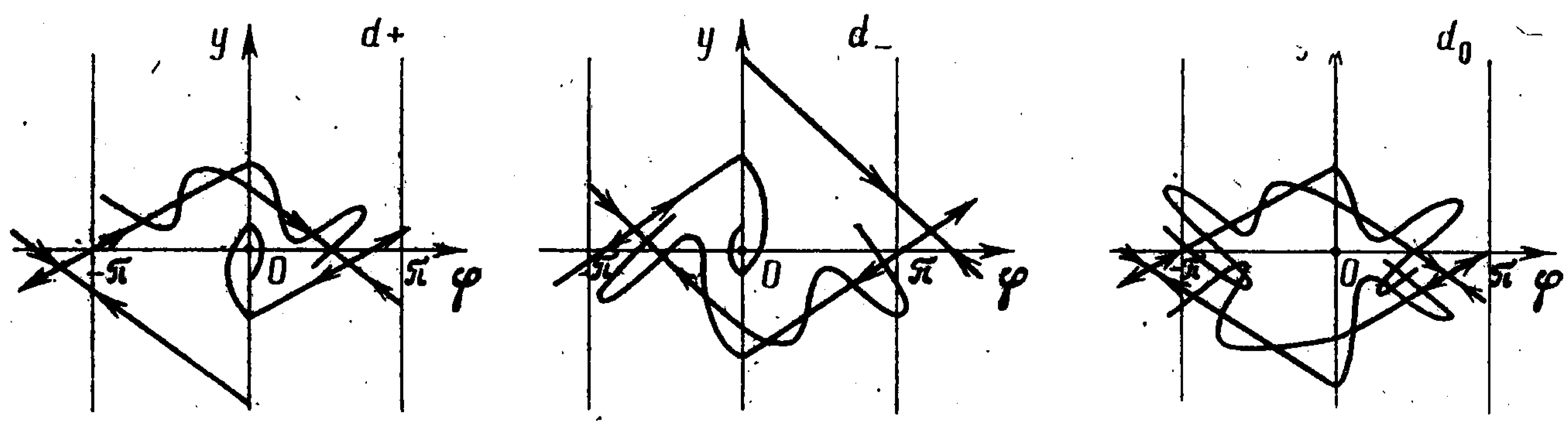


Фиг. 1

Области d_+, d_- и d_0 при $a = 0$ в плоскости (λ, γ) изображены на фиг. 1. Сечения $t = \text{const}$ многообразий W^- и W^+, соответствующие этим областям, приведены на фиг. 2.

Используя оценки областей параметров из [6], а также дополнительную симметрию системы (1.1) при замене $y \to -y$, $t \to -t - \pi/\omega$, $\lambda \to -\lambda$, $a \to -a$, можно получить достаточно полную картину разбиения пространства параметров. Ниже приведем лишь сведения, касающиеся области глобальной устойчивости системы (1.1), которая в теории систем фазовой синхронизации называется [5] областью захвата.

6. Область захвата. В автономном случае $b = 0$ область захвата системы (1.1) d_a при $\sigma < 0$ определяется бифуркационной кривой $\gamma = \gamma_0(\lambda, a)$ (см. (1.3)), соответствующей существованию петли сепаратрисы, охватывающей верхний полуцилиндр, а при $\sigma > 0$ — бифуркационной кривой $\gamma = \gamma^*(\lambda, a)$, соответствующей существованию



Фиг. 2

двойного цикла, удовлетворяющей условию $\gamma^*(\lambda, a) = \gamma_0(\lambda, a)$ при $\sigma = 0$, так что $d_a = \{|\gamma| < \gamma_0\ (\sigma < 0),\ |\gamma| < \gamma^*\ (\sigma > 0)\}$. (Функция $\gamma^*(\lambda, a)$ является решением системы трансцендентных уравнений, приведенной в [21, 22].)

Согласно проведенному исследованию область захвата неавтономной системы (1.1), для которой устойчивое решение на склейке $\varphi = 0$ притягивает все траектории системы, кроме траекторий, лежащих на W^+, при $\sigma < 0$ определяется кривой γ_-, т. е. $d_n = \{|\gamma| < \gamma_-\ (\sigma < 0)\}$, а при $\sigma > 0$, согласно [6], удовлетворяет оценке $d_n \supset d^* = \{|\gamma| < \gamma^* - b\}$. Оценка области параметров из [6], для точек которой система (1.1) при $\sigma > 0$ содержит по крайней мере одно периодическое движение (p, q)-типа $(q > 0)$, имеет вид $\gamma > \gamma^* + b$. Следовательно, при $\sigma > 0$ точная граница области захвата $\gamma = \gamma_L$ удовлетворяет неравенствам

$$\gamma_L - b < \gamma_L < \min\{\gamma^* + b,\ \gamma_-\}$$

и соответствует бифуркации рождения периодических движений (p, q)-типа, аналогичной бифуркации двойного цикла в автономном случае $b = 0$. Область существования

гомоклинической кривой d_+ кривой $\sigma = 0$ делится на две части. При этом одна из них d_+ ($\sigma < 0$) граничит с областью захвата и, согласно [5], является областью квазизахвата, а другая d_+ ($\sigma > 0$) отделена от области d_n областью, расположенной между бифуркационными кривыми γ_- и γ_L и, следовательно, не является областью квазизахвата.

Поступила 24 IV 1975

ЛИТЕРАТУРА

1. *Заславский Г. М.* Статистическая необратимость в нелинейных системах. М., «Наука», 1973.
2. *Мельников В. К.* Об устойчивости центра при периодических по временам возмущениях. Тр. Моск. матем. о-ва, 1963, т. 12.
3. *Cherry T. M.* Asymptotic solutions of analytic Hamiltonian systems. J. Diff. equat. 1968, vol. 4, No. 2.
4. *Шильников Л. П.* К работам А. Г. Майема о центральных движениях. Матем. заметки, 1969, т. 5, вып. 3.
5. *Белюстина Л. Н., Белых В. Н.* О неавтономной фазовой системе уравнений с малым параметром, содержащей инвариантные торы и грубые гомоклинические кривые. Изв. вузов. Радиофизика, 1972, т. 15, № 7.
6. *Белюстина Л. Н., Белых В. Н.* О глобальной структуре разбиения цилиндрического фазового пространства одной неавтономной системы. Дифференциальные уравнения, 1973, т. 9, № 4.
7. *Белюстина Л. Н., Белых В. Н.* Гомоклинические структуры, порождаемые простейшей моделью фазовой автоподстройки. В сб.: Фазовая синхронизация. М., «Связь», 1975.
8. *Неймарк Ю. И.* О возникновении стохастичности в динамических системах. Изв. вузов. Радиофизика, 1974, т. 17, № 4.
9. *Cartwright M. L., Littlewood J. E.* On non-linear differential equations of the second order: the equation $y^{\cdot\cdot} - k(1 - y^2)\, y^{\cdot} + y = b\lambda k \cos(\lambda t + \alpha)$, k large. J. London Math. Soc., 1945, vol. 20, pt 2, No. 78.
10. *Levinson N.* A second order differential equation with singular solutions. Ann. Math. Ser. 1, 1949, vol. 50, No. 1, p. 126—153.
11. *Hayashi C., Ueda Y., Kawakami H.* Periodic solutions of Duffings equation with reference to doubly asymptotic solutions. Тр. 5 междунар. конференции по нелинейным колебаниям, т. 2. Киев, Изд. Ин-та математики АН УССР, 1970.
12. *Баталова З. С., Неймарк Ю. И.* Об одной динамической системе с гомоклинической структурой. Теория колебаний, прикладная математика и кибернетика. Межвузовский сб., вып. 1, Изд-во Горьковск. ун-та, 1973.
13. *Плисс В. А.* К теории инвариантных множеств в периодических системах дифференциальных уравнений. Дифференциальные уравнения, 1969, т. 5, № 2.
14. *Алексеев В. М.* Квазислучайные колебания и качественные вопросы небесной механики. 9-летняя математическая школа (Кацивели, 1971). Киев, Изд. Ин-та математики АН УССР, 1972.
15. *Шильников Л. П.* Об одной задаче Пуанкаре — Биркгофа. Матем. сб., 1967, т. 74, № 3.
16. *Неймарк Ю. И.* Структура движений динамической системы в окрестности гомоклинической кривой. 5-летняя математическая школа (Ужгород, 1967). Изд-во АН УССР, Киев, 1968.
17. *Скрябин Б. Н.* Качественное исследование одного уравнения теории фазовой автоподстройки частоты. ПММ, 1969, т. 33, вып. 2.
18. *Белых В. Н., Кивелева К. Г., Фрайман Л. А.* Динамические характеристики поисковой системы ФАПЧ с фильтром первого порядка. В сб.: Фазовая синхронизация. М., «Связь», 1975.
19. *Гаврилов Н. К., Шильников Л. П.* О трехмерных динамических системах, близких к системам с негрубой гомоклинической кривой I, II. Матем. сб., 1972, т. 88, № 8; 1973, т. 90, № 1.
20. *Морозов А. Д.* О кусочно-гладких системах, содержащих гомоклинические кривые. Тр. 5 Междунар. конференции по нелинейным колебаниям, т. 2 (Киев, 1969). Киев, Изд. Ин-та математики АН УССР, 1970.
21. *Шахтарин Б. И.* Исследование кусочно-линейной системы ФАП. Радиотехника и электроника, 1969, т. 14, вып. 8.
22. *Сафонов В. М.* О влиянии формы пилообразной характеристики фазового детектора на полосу захвата ФАП. Радиотехника, 1969, т. 24, № 6.