

ВИБРАЦИЯ ШТАМПА НА ДВУСЛОЙНОМ ОСНОВАНИИ

В. А. Бабешко, И. И. Ворович, М. Г. Селезнев

(Ростов-на-Дону)

Исследуется вибрация без трения круглого штампа на упругом двуслойном основании, представляющем собой упругое полупространство, жестко соединенное с упругим слоем. Краевая задача сводится к интегральному уравнению первого рода. Доказывается его однозначная разрешимость в некотором классе функций и предлагается приближенный метод решения, основанный на факторизации функций. Построены программы, реализующие метод на ЭЦВМ, и приведены результаты численного анализа решения.

1. Краевая задача известными методами с учетом условий излучения приводится к решению интегрального уравнения следующего вида ($q(\rho)$ — амплитудное значение безразмерного контактного напряжения под штампом, $f(r)$ амплитудное значение колебаний штампа в точке r):

$$(1.1) \quad K_q^0 \equiv \int_0^a k(r, \rho) q(\rho) \rho d\rho = 8\pi f(r)$$

$$k(r, \rho) = \int_{\Gamma} K(u) J_0(ur) J_0(u\rho) u du$$

$$(1.2) \quad K(u) = H_1(u) + \frac{H(u) l_1^2(u) - 2L(u) l_1(u) h_1 u + M(u) h_1^2(u)}{L^2(u) - M(u) H(u)}$$

Здесь

$$L(u) = L_1(u) - L_2(u), \quad M(u) = M_1(u) + M_2(u)$$

$$H(u) = H_1(u) + H_2(u), \quad L_i(u) = L_i^+(u) + L_i^-(u)$$

$$M_i(u) = M_i^+(u) + M_i^-(u), \quad H_i^+(u) + H_i^-(u)$$

$$l_1(u) = L_1^-(u) - L_1^+(u), \quad h_1(u) = H_1^-(u) - H_1^+(u)$$

$$L_1^+(u) = \frac{\gamma_1 \operatorname{ch} \sigma_1 \operatorname{sh} \sigma_2 - \sigma_1 \sigma_2 \operatorname{ch} \sigma_2 \operatorname{sh} \sigma_1}{\mu_1 \Delta_1^+(u)}$$

$$M_1^+(u) = -\frac{\theta_2^2 \sigma_2 \operatorname{ch} \sigma_1 \operatorname{ch} \sigma_2}{2\mu_1 u^2 \Delta_1^+(u)}, \quad H_1^+(u) = -\frac{\theta_2^2 \sigma_1 \operatorname{sh} \sigma_1 \operatorname{sh} \sigma_2}{2\mu_1 \Delta_1^+(u)}$$

$$\Delta_1^+(u) = \gamma_1^2 \operatorname{ch} \sigma_1 \operatorname{sh} \sigma_2 - u^2 \sigma_1 \sigma_2 \operatorname{sh} \sigma_1 \operatorname{ch} \sigma_2$$

$$L_2^+(u) = L_2^-(u) = \frac{\gamma_1'^2 - \sigma_1' \sigma_2'}{\mu_2 \Delta_2(u)}$$

$$M_2^+(u) = M_2^-(u) = -\frac{\theta_2'^2 \sigma_2'}{2\mu_2 \mu^2 \Delta_2(u)}$$

$$H_2^+(u) = H_2^-(u) = -\frac{\theta_2' \sigma_1'}{2\mu_2 \Delta_2(u)}$$

$$\Delta_2(u) = \gamma_1'^2 - u^2 \sigma_1' \sigma_2', \quad \gamma_1 = u^2 - 1/2 \theta_1^2$$

$$\theta_1^2 = (1 + \nu_1) (1 - 2\nu_1) \varepsilon^2 \kappa_2^2 / (1 - \nu_1)$$

$$\theta_2^2 = 2(1 + \nu_1) \varepsilon^2 \kappa_2^2, \quad \sigma_i^2 = u^2 - \theta_i^2$$

$$\theta_1'^2 = (1 + \nu_2) (1 - 2\nu_2) \kappa_2^2 / (1 - \nu_2), \quad \gamma_1' = u^2 - 1/2\theta_1'^2$$

$$\theta_2'^2 = 2(1 + \nu_2) \kappa_2^2, \quad \sigma_i' = u^2 - \theta_i'^2, \quad \kappa_2^2 = \rho_2 \omega^2 h^2 / E_2$$

$$\varepsilon = \rho_1 E_2 / (\rho_2 E_1), \quad \mu_i = E_i / [2(1 + \nu_i)], \quad a = A / h, \quad r = R / h,$$

$$u = Uh$$

Функции $L_1^-(u)$, $M_1^-(u)$, $H_1^-(u)$, $\Delta_1^-(u)$ получаем из $L_1^+(u)$, $M_1^+(u)$, $H_1^+(u)$, $\Delta_1^+(u)$ заменой sh на ch , ch на sh во всех выражениях; ν_1 , ν_2 — коэффициенты Пуассона, ρ_1 , ρ_2 — плотности, E_1 , E_2 — модули Юнга для материала слоя и материала полупространства соответственно, A — размерный радиус штампа, h — размерная толщина слоя, ω — частота колебаний штампа (временная зависимость описывается функцией $e^{-i\omega t}$).

Отметим следующие общие свойства функции $K(u)$. Это четная функция, аналитическая в комплексной плоскости с разрезами в первом и третьем квадрантах, соединяющими точки $u = \pm \theta_1'$ и $u = \pm \theta_2'$ с бесконечно удаленной точкой. Кроме того

$$K(u) = \frac{c^2}{|u|} [1 + O(u^{-1})],$$

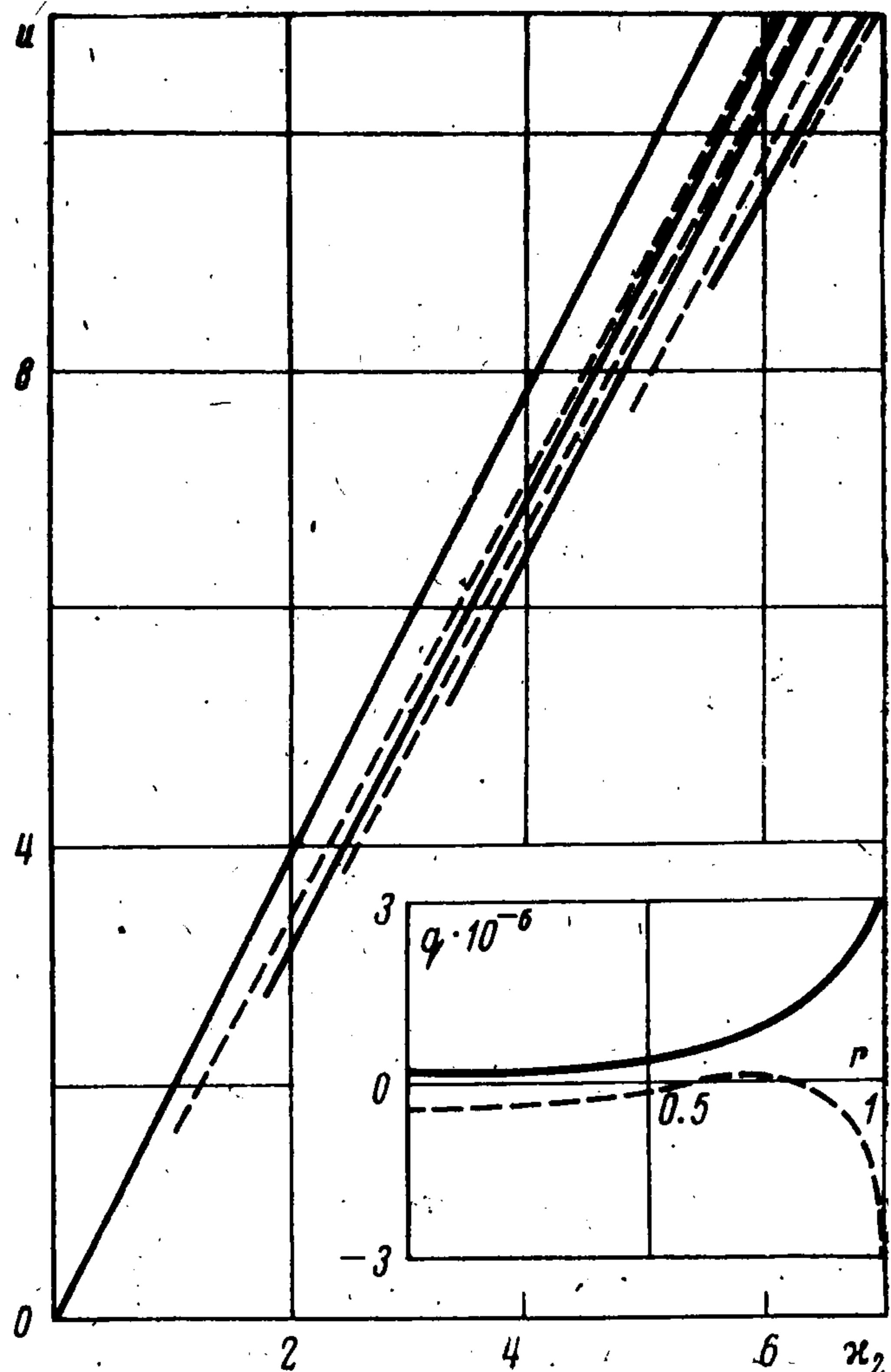
$$|u| \rightarrow \infty; \quad c^2 = \frac{2\theta_2^2}{\mu_1(\theta_2^2 - \theta_1^2)}$$

Функция $K(u)$ наряду с точками ветвления может иметь на вещественной оси также нули и полюсы. Их распределение существенно зависит как от упругих и геометрических параметров задачи, так и от частоты колебаний системы.

Сложный вид функции $K(u)$ позволяет изучить распределение действительных нулей и полюсов в каждом конкретном случае только с помощью ЭЦВМ. На фигуре приведены кривые нулей

(пунктир) и полюсов (сплошные линии) функции $K(u)$ в зависимости от приведенной частоты κ_2 для $\varepsilon^2 = 1.25$, $\nu_1 = 0.27$, $\nu_2 = 0.26$, $E_1 = 1.2 \cdot 10^6$, $E_2 = 1.5 \cdot 10^6$.

Контур Γ в представлении ядра интегрального уравнения (1.1) лежит в правой полуплоскости и всюду совпадает с вещественной осью, за исключением областей, содержащих вещественные полюсы, нули и точки ветвления, которые обходятся им снизу.



2. Используемый в дальнейшем метод состоит в замене исходного интегрального уравнения некоторым приближенным, которое достаточно легко решается. Использование этого хорошо известного приема возможно лишь при однозначной разрешимости исходного уравнения [1]. В связи с этим докажем однозначную разрешимость уравнения (1.1) в рассматриваемом случае.

Для интегральных уравнений вида (1.1) справедлива следующая теорема единственности.

Пусть чётная функция $K(u)$ с перечисленными выше свойствами аналитичности (наличие вещественных точек ветвления и однократных полюсов) и поведением (1.3) такова, что на вещественной оси имеет области $[A_{2k}, A_{2k+1}]$, где она действительна, и области $[B_{2k}, B_{2s+1}]$, где она комплексна. Пусть нули и полюсы функции $K(u)$ лежат лишь в области вещественности,

Теорема. Если у функции $K(u)$ вычеты в положительных полюсах того же знака, что и мнимая часть, то интегральное уравнение (1.1) не может иметь более одного решения в пространстве L_α , $\alpha > 1$.

Доказательство. Предполагая, что $q(r) \in L_\alpha$, $\alpha > 1$, заключаем, что

$$(2.1) \quad Q(u) \equiv \int_0^a q(\rho) J_0(u\rho) \rho d\rho \in L_\beta, \quad 1 < \beta < 2$$

Умножим однородное уравнение (1.1) на функцию $\bar{q}(r)$ (комплексно-сопряженную) и проинтегрируем на полуоси $[0, \infty]$. Деформируем после этого контур Γ на вещественную ось. Учитывая однократность полюсов и регулярность функции $Q(u)$, приходим к соотношению (ζ_r — действительные положительные полюсы функции $K(u)$, $r = 1, 2, \dots, N$)

$$(2.2) \quad i \sum_{k=0}^n \int_{B_{2k}}^{B_{2k+1}} \operatorname{Im} K(u) |Q(u)|^2 du + \\ + \nu p \int_0^\infty \operatorname{Re} K(u) |Q(u)|^2 du + i\pi \sum_{r=1}^N \{[K^{-1}(\zeta_r)]\}^{-1} |Q(\zeta_r^2)|^2 \equiv 0$$

Из последнего равенства, разделив вещественную и мнимую части, с учётом условий теоремы заключаем, что

$$Q(u) \equiv 0, \quad u \in [B_{2s}, B_{2s+1}]$$

В силу (2.1) функция $Q(u)$ целая, поэтому $Q(u) \equiv 0$. Отсюда следует, что $q(r) \equiv 0$. Условие $q(r) \in L_\alpha$, $\alpha > 1$ использовано при обосновании сходимости интеграла в соотношении (2.2). Теорема доказана.

Для обоснования разрешимости интегрального уравнения (1.1) сведём его к уравнению Фредгольма второго рода. Существует несколько способов такого сведения [2,3]. Ниже приводится уравнение Фредгольма, которое используется также для построения приближенного решения

$$(2.3) \quad y(z) = \frac{1}{4\pi^2} \int_{\Gamma_2} \int_{\Gamma_1} \frac{K_+(\alpha) C(\alpha, u) y(u) du d\alpha}{(\alpha - z)(\alpha^2 - u^2) K_+(u)} + F(z)$$

$$\begin{aligned}
 F(z) &= \frac{1}{4\pi^2} \int_{\Gamma_1} \frac{D(\alpha) K_+(\alpha)}{(z-\alpha)} \kappa_1(\alpha) d\alpha, \quad \kappa_1(\alpha) = [i\sqrt{a} H_0^{(2)}(\alpha a)]^{-1} \\
 (2.4) \quad q(r) &= \int_0^\infty J_0(\xi r) K^{-1}(\xi) F(\xi) \xi d\xi + \int_\sigma J_0(ur) K_+^{-1}(u) y(u) \kappa_2(u) du \\
 C(\alpha, u) &= -\kappa_1(\alpha) \kappa_2(u) G(\alpha, u) - (\alpha + u), \quad \kappa_2(u) = \pi \sqrt{a} u H_0^{(2)}(ua) \\
 G(\alpha, u) &= a\alpha H_1^{(2)}(\alpha a) J_0(ua) - ua H_0^{(2)}(\alpha a) J_1(ua) \\
 D(\alpha) &= \int_0^\infty \frac{G(\alpha, \xi) F(\xi)}{(\xi^2 - \alpha^2) K(\xi)} \xi d\xi, \quad f(r) = \int_0^\infty F(\xi) J_0(\xi r) \xi d\xi
 \end{aligned}$$

Контуры Γ_1 и Γ_2 лежат в области регулярности функции $K(u)$ и их концы уходят в нижней полуплоскости на бесконечность, причем контур Γ_2 лежит выше контура Γ_1 . Контур σ состоит из контура Γ и его симметричного относительно начала координат отображения в левую полуплоскость.

Уравнение (2.3) приводится к уравнению Фредгольма второго рода на контуре Γ_2 в классе функций, непрерывных с весом z^λ , $0 < \lambda < 1$.

Будем считать, что функция $f(r)$ дважды непрерывно дифференцируема. Представим оператор в правой части (2.3) в форме действующего с контура Γ_1 вновь на контур Γ_1 . С этой целью, продолжив аналитически двойной интеграл в нижнюю полуплоскость, представим его следующим образом:

$$\begin{aligned}
 y(z) \left[1 - \frac{C(z, z)}{2z} \right] &= \frac{iK_+(z)}{2\pi} \int_{\Gamma_3} \frac{C(z, u) y(u) du}{(z^2 - u^2) K_+(u)} + \\
 &+ \frac{1}{4\pi^2} \int_{\Gamma_4} \int_{\Gamma_3} \frac{K_+(\alpha) C(\alpha, u) y(u) du d\alpha}{(\alpha - z)(\alpha^2 - u^2) K_+(u)} + F(z)
 \end{aligned}$$

Здесь z лежит ниже контура Γ_3 , контур Γ_4 лежит выше контура Γ_3 .

Выберем в области регулярности $K(u)$ контур Γ_3 , на котором

$$1 - C(z, z) \neq 0.$$

Выразим из полученного соотношения $y(z)$ и внесем его в соотношение (2.3). В результате получим уравнение для $y(z)$ на контуре Γ_1 . Можно доказать, что оператор в правой части этого уравнения вполне непрерывен в пространстве функций, непрерывных на контуре Γ_1 с весом z^λ , $0 < \lambda < 1$.

Поскольку (2.3) — уравнение Фредгольма и, по доказанному, имеет единственное решение, то оно разрешимо. Таким образом, для всякой $f(r) \in c_2(0, a)$ найдется единственная функция $q(r) \in L_\alpha$, $\alpha > 1$, обращающая (1.1) в тождество.

Изучим свойства функции $q(r)$. Из представления (2.3) следует, что

$$y(z) \sim c/|z|, \quad z \rightarrow \infty, \quad z \in \Gamma_2$$

$$y(u) \kappa_2(u) \equiv z(u) \sim \frac{c}{\sqrt{u}} e^{-i\pi u}$$

Тогда

$$q(r) \sim c \int_a^\infty e^{-u(a-r)} u^{-1/2} du, \quad r \rightarrow a$$

$$(2.5) \quad q(r) \sim c(a-r)^{-1/2}, \quad r \rightarrow a, \quad |r| < a$$

Таким образом, $q(r) \sqrt{a^2 - r^2} \in C(0, a)$. Следовательно, исходное интегральное уравнение корректно разрешимо и имеют место следующие соотношения корректности:

$$\|q\|_{C_b} = \|q \sqrt{a^2 - r^2}\|_{C(0, a)} \leq \|f\|_{C_2}$$

Используя теперь известные теоремы теории линейных операторов, можем аппроксимировать функцию $K(u)$ функцией $K^*(u)$ исходя из условия

$$\|K^\circ - K^{*\circ}\|_{C_b \rightarrow C_2} < \varepsilon$$

Здесь $\varepsilon > 0$ — достаточно малое число, а оператор должен действовать из пространства C_b в пространство C_2 . Последнее позволяет заменять функцию $K(u)$ другой, ей близкой.

Возможность построения аппроксимации с любой степенью точности достигается применением интерполирующих полиномов [4]. В частности, приближенную функцию $K^*(u)$ можно представить в виде

$$(2.6) \quad K^*(u) = c^2 \prod_{i=1}^M (u^2 - z_i^2) \left[\sqrt{u^2 + B^2} \prod_{j=1}^M (u^2 - \zeta_j^2) \right]^{-1}$$

В результате

$$(2.7) \quad K_{\pm}^*(u) = c \prod_{i=1}^M (u \pm z_i) \left[\sqrt{B \mp iu} \prod_{j=1}^M (u \pm \zeta_j) \right]^{-1}$$

Точка ветвления $u = \pm iB$ выбирается в зависимости от требуемых условий задачи (величины параметра a). Выбираем B из условия $Ba \gg 1$.

Внося $K_{\pm}^*(u)$ в формулу (2.3) и деформируя контур интегрирования вниз вплоть до точки ветвления, получим представление

$$(2.8) \quad y(z) = \frac{1}{4\pi^2} \int_{\Gamma_1^\circ} \frac{y(u) A(u, z)}{K_+^*(u)} du + \frac{1}{2\pi i} \sum_{j=1}^M \frac{y(-z_j) A(-z_j, z)}{[K_+^*(-z_j)]'} + \frac{1}{4\pi^2} B(z)$$

где

$$(2.9) \quad A(u, z) = A^*(u, z) + \int_{\Gamma_1^\circ} \frac{K_+^*(\alpha) C(\alpha, u)}{(\alpha - z)(\alpha^2 - u^2)} d\alpha$$

$$B(z) = B^*(z) + \int_{\Gamma_2^\circ} \frac{D(\alpha) K_+^*(\alpha) \kappa_1(\alpha)}{z - \alpha} d\alpha$$

$$A^*(u, z) = 2\pi i \sum_{i=1}^M \frac{C(-\zeta_i, u)}{(\zeta_i + z)(\zeta_i^2 - u^2) \{[K_+^*(-\zeta_i)]^{-1}\}'}$$

$$B^*(z) = -2\pi i \sum_{l=1}^M \frac{D(-\zeta_l) \kappa_1(-\zeta_l)}{(z + \zeta_l) \{[K_+^*(-\zeta_l)]^{-1}\}'}$$

Здесь контуры Γ_i° получены в результате деформации контуров Γ_i в нижнюю полуплоскость. Можно показать, что при достаточно больших B интегральные члены малы и ими можно пренебречь. Отбрасывая в (2.8), (2.9) интегральные члены и полагая в (2.8) $z = -z_m$, получим линейную

алгебраическую систему для определения $y(-z_m)$, $m = 1, 2, \dots, M$

$$(2.10) \quad y(-z_m) = \frac{1}{2\pi i} \sum_{j=1}^M \frac{y(-z_j) A^*(-z_j, -z_m)}{[K_+^*(-z_j)]'} + \frac{1}{4\pi^2} B^*(-z_m)$$

Определив из системы (2.10) значения $y(-z_m)$, можно записать приближенное выражение для $y(z)$

$$(2.11) \quad y(z) \cong \frac{1}{2\pi i} \sum_{j=1}^M \frac{y(-z_j) A^*(-z_j, z)}{[K_+^*(-z_j)]'} + \frac{1}{4\pi^2} B^*(z)$$

Решение исходной задачи получим, подставляя в (2.4) приближенное значение $y(z)$ (2.11).

Не нарушая общности, в уравнении (1.1) можно положить

$$f(r) = fJ_0(\eta r), \quad f = \text{const}, \quad \eta = \text{const}$$

Тогда приближенное решение уравнения (1.1) можно записать в виде

$$(2.12) \quad q(r) = f \left\{ \frac{J_0(\eta r)}{K^*(\eta)} + \right. \\ \left. + 2\pi^2 i \sqrt{a} \sum_{m=1}^M \frac{J_0(-z_m r) z_m H_0^{(2)}(-z_m a)}{[K_+^*(-z_m)]'} y(-z_m) \right\} + O(\Gamma^0)$$

Полученная формула для $q(r)$ эффективна для внутренних точек области. Поведение при $r \rightarrow a$ описывается формулой (2.5).

3. В рассматриваемой задаче функция $K(u)$ удовлетворяет свойствам, перечисленным в п. 2. При этом для фиксированного κ_2 имеем интервал вещественности $[A_1, A_2] = [\theta_2', \infty]$ и интервал комплексности $[B_1, B_2] = [0, \theta_2']$. При численном исследовании действительной и мнимой части функции $K(u)$ без труда проверяются знаки мнимой составляющей и вычетов в полюсах, которые в приводимом ниже примере оказываются все отрицательными.

Приведем последовательность действий, необходимых для расчета напряженно-деформированного состояния методом данной работы:

1. Построив интегральное уравнение (1.1), аппроксимируем функцию $K(u)$ (1.2) выражением вида (2.6) на оси $[0, \infty]$ (предварительно вычисляются действительные нули и полюсы $K(u)$). При этом можно использовать аппроксимирующие полиномы различных видов [3, 4].

2. На основании введенной аппроксимации решаем систему (2.10). В результате получаем распределение контактных напряжений в (2.12).

В настоящее время приведенный алгоритм реализован пакетом программ, позволяющим производить расчеты при любых соотношениях параметров задачи.

В качестве примера рассматривается случай $\varepsilon^2 = 1.25$, $\eta = 0$, $E_1 = 1.2 \cdot 10^6$, $E_2 = 1.5 \cdot 10^6$, $\nu_1 = 0.27$, $\nu_2 = 0.26$, $\kappa_2 = 1.1$.

При этом коэффициенты аппроксимации (2.6), (2.7) имеют значения ($M = 7$): $z_1 = 1.760366$, $\zeta_1 = 2.092845$, $z_2 = 1.82099 + 0.63240i$, $z_3 = 0.518977 + 0.578446i$, $z_4 = -2.57811 + 1.65149i$, $z_5 = -1.58223 + 0.260871i$, $z_6 = -0.752302 + 0.608482i$, $z_7 = 2.99651 + 4.76229i$.

Величины ζ_i , $i = 2, 3, \dots, 7$ выбираются из всех значений $5000^{1/12}(-8,89814 + 0,57663i)^{-1/12}$ по условию $\text{Im } \zeta_i > 0$. Погрешность приведенной аппроксимации не превышает 10% при малых $|u|$; при $|u| > 10$ практически равна нулю. Графики действительной и мнимой составляющей амплитудной функции $q(r)$ приведены на фигуре для $a = 1$. Сплошной линией нанесена действительная часть $q(r)$, пунктирной — мнимая. Величину напряжений под штампом дает выражение

$$\sigma_z(r) = \text{Re} [q(r) e^{-i\omega t}], \quad r < a$$

Перемещения точек поверхности слоя вне штампа при известном $q(r)$ могут быть получены из (1.1) при вычислении интеграла для $a < r$. В случае $f(r) = fJ_0(\eta r)$ приближенное значение амплитудной функции перемещений можно выписать в виде

$$\begin{aligned} W(r) \cong & \frac{if}{8} \sum_{n=1}^M \left[\frac{-a\zeta_n J_0(\eta a) J_1(-\zeta_n a) - \eta a J_1(a\eta) J_0(-\zeta_n a)}{(\zeta_n^2 - \eta^2) K(\eta)} + \right. \\ & + 2\pi^2 i \sqrt{a} \sum_{m=1}^M \frac{z_m H_0^{(2)}(-z_m a) y(-z_m)}{[K_+^*(-z_m)]'} \times \\ & \times \left. \frac{-\zeta_n a J_0(-z_m a) J_1(-\zeta_n a) + z_m a J_1(-z_m a) J_0(-\zeta_n a)}{(\zeta_n^2 - z_m^2)} \right] \times \\ & \times \frac{\zeta_n H_0^{(2)}(-\zeta_n r)}{[K^*(-\zeta_n)]'}, \quad r \gg a \end{aligned}$$

Величину перемещений поверхности слоя вне штампа дает выражение

$$w(r) = \text{Re} [W(r) e^{-i\omega t}]$$

Следует заметить, что приведенные формулы амплитудной функции контактных напряжений и перемещений поверхности слоя вне штампа выписаны в предположении, что все комплексные нули и полюсы функции $K^*(u)$ просты. При построении функции $K^*(u)$ в виде (2.6) это реализуется автоматически.

Рассмотренные задачи могут быть использованы как модель при построении исходных данных при исследовании передачи вибрации между фундаментами, а также как простейшая модель для вибрационного исследования Земли по данным волновых полей, возбуждаемых на поверхности. Именно, имея достаточный набор решений задачи при разных упругих и геометрических значениях основания, можно путем сопоставления амплитудных и фазовых значений волновых полей прогнозировать параметры оснований из условия наилучшего совпадения экспериментальных и теоретических данных.

Отметим, что рассмотренная задача для идеально упругого основания является более сложной, чем соответствующая задача для вязкоупругой среды. Предложенный метод справедлив и для последнего случая.

Поступила 3 XI 1975

ЛИТЕРАТУРА

1. Красносельский М. А., Вайникко Г. М., Забрейко П. П., Рутецкий И. Б., Стеценко В. Я. Приближенное решение операторных уравнений. М., «Наука», 1969.
2. Бабешко В. А. Вибрация двух круглых штампов на слоистой среде. ПММ, 1976, т. 40, вып. 6.
3. Бабешко В. А. О системах интегральных уравнений динамических контактных задач. Докл. АН СССР, 1975, т. 220, № 6.
4. Березин И. С., Жидков Н. П. Методы вычисления, т. 1. М., Физматгиз, 1962.