Прикладная математика и механика. Том 41, 1977

УДК 534.014.1

СОБСТВЕННЫЕ КОЛЕБАНИЯ ПРЯМОУГОЛЬНОГО ПАРАЛЛЕЛЕПИПЕДА

С. П. Буданов, Б. И. Орлов

(Ленинград)

Рассматривается задача о свободных колебаниях прямоугольного параллелепипеда, все размеры которого сравнимы между собой; численные результаты для прямоугольных стержней, полученные как частный случай общего решения, показывают, что уже первое приближение дает результаты, хорошо согласующиеся с экспериментальными данными.

К настоящему времени математическая теория упругости располагает лишь теорией колебаний очень тонких стержней и пластинок и теорией свободных колебаний шара. Попытки создать теорию свободных колебаний конечного прямого кругового цилиндра ([1–4] и др.) оказались безуспешными. Сведений о расчете свободных колебаний тел иной формы, нежели цилиндр и шар, все размеры которых сравнимы между собой, в литературе не имеется.

1. Сведение уравнений движения к уравнениям Гельмгольца. Уравнение движения, подлежащее интегрированию, имеет вид

$$\mu\Delta\mathbf{u} + \rho\omega^2\mathbf{u} + (\lambda + \mu)\operatorname{grad}\operatorname{div}\mathbf{u} = 0 \tag{1.1}$$

Здесь $\mathbf{u}$ — собственный вектор смещения, λ, μ — упругие постоянные Ляме, ρ — плотность вещества, ω — собственная частота колебаний.

Граничные условия, выражающие отсутствие поверхностных сил, действующих на тело, имеют вид

$$\sigma\cdot\mathbf{n} = 0 \tag{1.2}$$

Здесь σ — тензор напряжений, $\mathbf{n}$ — вектор внешней нормали к поверхности тела.

Уравнение (1.1) эквивалентно трем скалярным уравнениям, представляющим собой проекции на оси декартовой системы координат xyz. Продифференцировав первое из них по x, второе по y, третье по z и сложив полученные равенства, получим уравнение для дивергенции собственного вектора смещения

$$\Delta\delta + k^2\delta = 0, \quad k^2 = \rho\omega^2 / \lambda + 2\mu \quad (\delta = \operatorname{div}\mathbf{u}) \tag{1.3}$$

Найдя общее решение уравнения (1.3) и подставив его в уравнение (1.1), получим систему неоднородных уравнений. Общее решение этой системы можно представить в виде

$$\mathbf{u} = \mathbf{u}' - \frac{1}{k^2}\operatorname{grad}\delta \tag{1.4}$$

Здесь первое слагаемое — общее решение однородного уравнения

(1.5) $$\Delta \mathbf{u}' + k'^2 \mathbf{u}' = 0, \quad k'^2 = \frac{\rho\omega^2}{\mu}$$

второе же слагаемое, как можно убедиться подстановкой,— частный интеграл неоднородного уравнения (1.1).

Введем вспомогательные функции f_i ($i = 1, 2, 3$), которые так же как и $\mathbf{u}'$, удовлетворяют уравнению Гельмгольца (1.5) и связаны с компонентами функции $\mathbf{u}'$ соотношениями $u_i' = \partial f_i / \partial x_i$.

Определенные таким образом функции f_i связаны между собой следующим соотношением:

(1.6) $$\sum_{i=1}^{3} \frac{\partial^2 f_i}{\partial x_i^2} = 0$$

Пусть параллелепипед ограничен плоскостями $x = \pm x_0$, $y = \pm y_0$, $z = \pm z_0$. В этом случае граничные условия (1.2) сводятся к исчезновению соответствующих компонент тензора σ на гранях параллелепипеда.

Таким образом задача о свободных колебаниях параллелепипеда свелась к решению четырех уравнений Гельмгольца относительно трех функций f_i и функции δ с граничными условиями (1.2), где компоненты тензора напряжений необходимо выразить через функции f_i и δ.

2. Интегрирование уравнений Гельмгольца. Интегрирование уравнений (1.3) и (1.5) будем строить по методу переопределенных рядов [5]. Суть этого метода состоит в том, что для эллиптического уравнения, допускающего решение методом разделения переменных, имеется достаточно широкий класс решений в виде суммы рядов по нескольким полным системам фундаментальных функций. Коэффициенты этих рядов являются коэффициентами разложений искомого решения на соответствующих поверхностях. В качестве фундаментальных функций выбираются решения обыкновенных дифференциальных уравнений, на которые распадается исходное уравнение при решении его методом разделения переменных. Так, в случае прямоугольного параллелепипеда решение будет состоять из трех двукратных рядов

(2.1) $$\delta(x, y, z) = \sum_{n,m} (A_{nm} \cos \tau_{nm} z + B_{nm} \sin \tau_{nm} z) \sin \frac{n\pi (x + x_0)}{2x_0} \times$$
$$\times \cos \frac{m\pi (y + y_0)}{2y_0} + \sum_{m,l} (C_{ml} \cos \varkappa_{ml} x + D_{ml} \sin \varkappa_{ml} x) \cos \frac{m\pi (y + y_0)}{2y_0} \times$$
$$\times \cos \frac{l\pi (z + z_0)}{2z_0} + \sum_{n,l} (E_{nl} \cos \sigma_{nl} y + F_{nl} \sin \sigma_{nl} y) \times$$
$$\times \sin \frac{n\pi (x + x_0)}{2x_0} \cos \frac{l\pi (z + z_0)}{2z_0}$$

(2.2) $$\varkappa_{ml}^2 = k^2 - \left(\frac{m\pi}{2y_0}\right)^2 - \left(\frac{l\pi}{2z_0}\right)^2$$
$$\sigma_{nl}^2 = k^2 - \left(\frac{n\pi}{2x_0}\right)^2 - \left(\frac{l\pi}{2z_0}\right)^2; \quad n = 1, 2, 3, \ldots$$
$$\tau_{nm}^2 = k^2 - \left(\frac{n\pi}{2x_0}\right)^2 - \left(\frac{m\pi}{2y_0}\right)^2; \quad l, m = 0, 1, 2, \ldots$$

Взяв для функций f_i аналогичное представление, подчинив их условию (1.6) и подставив в (1.4), получим решение уравнения (1.1), подчиненное определенным ограничениям на ребрах параллелепипеда. От этих ограничений можно освободиться, добавив к рассматриваемому решению уравнения Гельмгольца: 1) решение в конечной форме, содержащее минимум 8 произвольных постоянных, нужных для снятия ограничений в вершинах и 2) решение в виде совокупности 12 одинарных рядов, необходимых для снятия ограничений во внутренних точках ребер параллелепипеда. В таком случае будут найдены все собственные колебания свободного параллелепипеда. В противном случае получим лишь определенную часть всех изучаемых колебаний.

В данной работе ограничимся изложением результатов, получаемых, если принять, что δ имеет представление (2.1). Кроме того, используем элементы симметрии рассматриваемого параллелепипеда. Такими элементами являются три плоскости симметрии $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$. В дальнейшем будем рассматривать только симметричные решения относительно этих плоскостей. Для этого положим $B_{nm} = D_{ml} = F_{nl} = 0$, $n = 1, 3, 5, \ldots$; $l, m = 0, 2, 4$. Для функций f_i используем выражение, отличающееся от (2.1) тем, что у коэффициентов разложения вверху будут соответственно индексы 1,2,3, а $\varkappa_{ml}$, τ_{nm}, σ_{nl} будут иметь штрихи.

3. Уравнения для определения коэффициентов. Полученные решения типа (2.1) для δ и f_i содержат 12 бесконечных последовательностей неизвестных коэффициентов, которые подлежат определению из граничных условий (1.2) и соотношения (1.6). Очевидно, что условие (1.6) будет удовлетворено, если коэффициенты связаны один с другим соотношениями

$$\left(\frac{n\pi}{2x_0}\right)^2 A_{nm}^{(1)} + \left(\frac{m\pi}{2y_0}\right)^2 A_{nm}^{(2)} + \tau_{nm}'^2 A_{nm}^{(3)} = 0 \tag{3.1}$$

$$\varkappa_{ml}'^2 C_{ml}^{(1)} + \left(\frac{m\pi}{2y_0}\right)^2 C_{ml}^{(2)} + \left(\frac{l\pi}{2z_0}\right)^2 C_{ml}^{(3)} = 0$$

$$\left(\frac{n\pi}{2x_0}\right)^2 E_{ml}^{(1)} + \sigma_{nl}'^2 + E_{nl}^{(2)} + \left(\frac{l\pi}{2z_0}\right)^2 E_{nl}^{(3)} = 0$$

Остальные девять соотношений получим из граничных условий следующим образом. Напишем выражения для компонент тензора напряжений через построенные решения δ и f_i и представим каждое из этих выражений единым рядом Фурье. Далее, удовлетворяя однородным граничным условиям, приравняем полученные коэффициенты разложений единых рядов Фурье нулю. Так, требуя обращения в нуль компоненты тензора напряжений τ_{xy} на грани $x = x_0$

$$\tau_{xy} = \mu \frac{\partial^2}{\partial x\, \partial y}\left(f_1 + f_2 - \frac{2}{k^2}\delta\right)$$

разлагая в ряд Фурье по функциям

$$\cos\frac{m\pi(y+y_0)}{2y_0}\cos\frac{l\pi(z+z_0)}{2z_0}$$

полученное выражение и приравнивая нулю все коэффициенты разложения, получим

$$
\begin{aligned}
(3.2)\qquad & \varkappa'_{ml}\,\mathrm{tg}\,\varkappa'_{ml}x_0\,(C^{(1)}_{ml}+C^{(2)}_{ml})-\frac{2}{k^2}\varkappa_{ml}\,\mathrm{tg}\,\varkappa_{ml}x_0\times\\
&\times(C_{ml}+\frac{2}{z_0}\sum_n{}^{l}\left(\frac{n\pi}{2x_0}\right)\left[\tau'_{nm}\left[\tau'^2_{nm}-\left(\frac{l\pi}{2z_0}\right)^2\right]^{-1}(A^{(1)}_{nm}+A^{(2)}_{nm})-\right.\\
&\left.-\frac{2}{k^2}\tau_{nm}\left[\tau^2_{nm}-\left(\frac{l\pi}{2z_0}\right)^2\right]^{-1}A_{nm}\right]+\\
&+\frac{2}{x_0}\sum_n\left(\frac{n\pi}{2x_0}\right)\left[\sigma'_{nl}\left[\sigma'^2_{nl}\left(\frac{m\pi}{2y_0}\right)^2\right]^{-1}(E^{(1)}_{nl}+E^{(2)}_{nl})-\right.\\
&\left.-\frac{2}{k^2}\sigma_{nl}\left[\sigma'^2_{nl}-\left(\frac{m\pi}{2y_0}\right)^2\right]^{-1}E_{nl}\right]=0,\quad l,\,m=0,2,4,\ldots
\end{aligned}
$$

Приравнивая нулю оставшиеся восемь компонент тензора напряжений, аналогичным образом получим еще восемь соотношений между неизвестными последовательностями коэффициентов. Необходимо отметить что из 12 соотношений между неизвестными восемь являются простыми — типа (3.1), остальные четыре — типа (3.2). Это позволяет довольно легко свести задачу к двум бесконечным системам относительно двух бесконечных последовательностей неизвестных A_{nm} и E_{nl}

$$
\begin{aligned}
(3.3)\qquad & \sum_{i,l}{}^{m}P^{\alpha}_{nilm}E_{il}+\sum_i T^{\alpha}_{nim}A_{im}+\sum_l K^{\alpha}_{nml}E_{nl}+L^{\alpha}_{nm}A_{nm}=0\\
& \alpha=1,2;\quad i,n=1,3,5\ldots;\quad l,m=0,2,4,\ldots\\
& E^{(1)}_{il}=A^{(2)}_{il}=E_{il},\qquad A^{(1)}_{il}=E^{(2)}_{il}=A_{il}
\end{aligned}
$$

Индексы l, m вверху означают, что при нулевом значении этого индекса данный коэффициент нужно умножить на $1/2$; P^{α}_{nilm}, K^{α}_{nml}, L^{α}_{nm} — матричные элементы системы, представляющие собой простые, но громоздкие выражения, возникающие от переразложения одних тригонометрических функций по выбранной на каждой грани параллелепипеда определенной системе фундаментальных функций. Несколько более сложным представляются элементы T^{α}_{nim}, поскольку приходится суммировать ряды, являющиеся линейными комбинациями матричных элементов указанного выше типа. Таким образом, общее число неизвестных, состоящее из 12 бесконечных последовательностей, удается уменьшить до двух бесконечных последовательностей, для нахождения которых получена однородная система (3.3).

4. Упрощение полученной системы и численные результаты. Решение системы (3.3), даже при наличии современной вычислительной техники, представляет значительные математические трудности. Это объясняется как сложностью суммирования рядов, из которых состоят матричные элементы T^{α}_{nim}, так и тем, что матрица коэффициентов полученной бесконечной системы имеет пространственную структуру. Однако в ряде случаев систему удается упростить. Детальный анализ матричных элементов показывает, что при $y_0\to 0$ и $z_0\to 0$ величины L^{α}_{nm}, K^{α}_{nml} остаются конечными, в то время как P^{α}_{nilm}, T^{α}_{nim} убывают как y_0^3 или z_0^3. Если же

$x_0 \to \infty$, то L^{α}_{nm}, K^{α}_{nml} также остаются конечными, а P^{α}_{nilm}, T^{α}_{nim} убывают как $1 / x_0^3$ и как $1 / x_0^2$ в окрестностях точек $\varkappa'_{ml} x_0 = p\pi$, где $p = 0, 1, 2, \ldots$.

Таким образом, при $y_0 / x_0 \ll 1$ и $z_0 / x_0 \ll 1$ можно пренебречь коэффициентами P^{α}_{nilm} и T^{α}_{nim} по сравнению с L^{α}_{nm}, K^{α}_{nml}, и тогда система (3.3) запишется в следующем виде:

$$\sum_l^m K^{\alpha}_{nml} E_{nl} + L^{\alpha}_{nm} A_{nm} = 0 \tag{4.1}$$

$$\alpha = 1, 2; \quad n = 1, 3, 5, \ldots; \quad l, m = 0, 2, 4, \ldots$$

Устремляя в (4.1) x_0 и z_0 к нулю, видим, что полученная система удовлетворяется тождественно, поскольку $A_{nm} = E_{nm} = 0$ для $m \neq 0$. При $m = l = 0$ будем иметь

$$\begin{gathered}\frac{\lambda}{\sigma_{n0} y_0} E_{n0} + \left[\left(\lambda + \frac{2\mu}{k^2}\sigma^2_{n0}\right)\operatorname{ctg}\tau_{n0} z_0 + \right. \\ \left. + \frac{4\mu}{k^2}\tau'_{n0}\tau_{n0}\operatorname{ctg}\tau'_{n0} z_0 \frac{\alpha^2_{n0}}{\tau'^2_{n0} - \alpha^2_{n0}}\right] A_{n0} = 0 \\ \frac{\lambda}{\tau_{n0} z_0} A_{n0} + \left[\left(\lambda + \frac{2\mu}{k^2}\sigma^2_{n0}\right)\operatorname{ctg}\sigma_{n0} y_0 + \right. \\ \left. + \frac{4\mu}{k^2}\sigma'_{n0}\sigma_{n0}\operatorname{ctg}\sigma'_{n0} y_0 \frac{\beta^2_{n0}}{\sigma'^2_{n0} - \beta^2_{n0}}\right] E_{n0} = 0\end{gathered} \tag{4.2}$$

Приравнивая нулю определитель этой системы, получим уравнение для нахождения частот. Это уравнение решалось относительно k^2, а частота находилась по формуле

$$\omega = 2\pi F = vk\sqrt{\frac{1-\sigma}{(1+\sigma)(1-2\sigma)}} \tag{4.3}$$

где σ — коэффициент Пуассона, v — скорость распространения колебаний.

Были произведены расчеты собственных частот для параллелепипедов различных размеров. Эти результаты сравнивались с имеющимися экспериментальными данными [6]. В таблице приведены экспериментальные F_e и найденные из однородной системы (4.2) и вычисленные по формуле (4.3) F_c результаты для параллелепипедов размерами $100 \times 10 \times 10$ *мм* (А) и $100 \times 4.8 \times 3.8$ (Б).

Как видно из таблицы, погрешность в определении частот составляет от 0.04% до 3%, в зависимости от номера собственного значения и размеров параллелепипеда. Кроме того, в первом случае, начиная с $n = 9$, среди вычисленных значений для каждого n имеются две частоты.

	n	1	3	5	7	9	11	15
А	F_e, *кгц*	24.77	73.82	121.2	164.9	201.9	230.6	266.1
	F_c, *кгц*	24.76	73.86	121.4	165.7	203.3	223.4	273.3
						216.9	231.9	411.2
Б	F_e, *кгц*	22.44	67.17	111.8	156.2	200.1	243.3	325.9
	F_c, *кгц*	22.44	67.28	112.0	156.5	200.5	244.1	327.9

Это можно объяснить, по-видимому, тем, что для данной геометрии высокие собственные значения необходимо находить из решения системы (3.3), а не из (4.2).

Авторы благодарят А. Г. Власова за постоянное внимание к работе.

Поступила 22 IV 1974

ЛИТЕРАТУРА

1. *Pochhammer L.* Über die Fortpflanzungsgeschwindigkeiten kleiner Schwingungen in einem unbegrenzten isotopen Kreiscylinder. J. reine und angew. Math., 1876, Bd 81, S. 324.
2. *Chree C.* Longitudinal vibrations of a curular. Quart. J. Pure and Appl. Math., 1886, vol. 21, p. 287.
3. *Ляв Л.* Математическая теория упругости. М.— Л., Гостехиздат, 1935.
4. *Posener L.* Ein Beitrag zur Theorie der freien elastischen Schwingungen von Zylindern und Rohren. Ann. Physik, Leipzig, 1935, H 5, Bd 22, S. 101.
5. *Власов А. Г.* Метод переопределенных рядов в некоторых краевых задачах математической физики. В сб.: Вопросы динамической теории распространения сейсмических волн, № 3. Л., Гостехиздат, 1959.
6. *Giebe E., Blechschmidt E.* Experimentelle und theoretische Untersuchungen über Dehnungseigenschwingungen von Stäben und Rohren. Ann. Physik., Leipzig, 1933, H 5, Bd 18, S. 417.