Прикладная математика и механика. Том 41, 1977

УДК 539.3 + 539.4

ПЛОСКАЯ ЗАДАЧА ТЕОРИИ УПРУГОСТИ ДЛЯ СРЕДЫ С ДВУМЯ СЕМЕЙСТВАМИ РАВНОНАПРЯЖЕННОЙ ВОЛОКНИСТОЙ АРМАТУРЫ

Ю. А. Боган, Ю. В. Немировский

(Новосибирск)

Высокие показатели удельной прочности волокнистых композитов при испытаниях на растяжение — сжатие вдоль направления армирующих волокон не гарантируют надежной работы конструкции из такого материала при нагружении сложным образом. Технологически эти материалы обладают широкими возможностями регулирования структуры и по принципу их создания прочность волокон композитов существенно выше прочности связующего. Задача исследования поведения композитов в предположении равнонапряженности волокон вызывает интерес, так как возможности арматуры при этом используются полным образом.

В данной работе рассматривается случай, в котором материал композита находится или в состоянии плоской деформации, или в обобщенном плоском напряженном состоянии.

На основе соотношений, предложенных в [1], введены уравнения, позволяющие находить параметры структуры пластинок с равнонапряженной арматурой; разобраны примеры.

1. В полярной системе координат для рассматриваемой задачи в соответствии с [1] имеем

$$\begin{aligned}
&(1.1) && \sigma_r = aE(1-\nu^2)^{-1}(\varepsilon_r+\nu\varepsilon_\vartheta)+\omega_1\sigma_1^\circ\cos^2\alpha_1+\omega_2\sigma_2^\circ\cos^2\alpha_2\\
& && \sigma_\vartheta = aE(1-\nu^2)^{-1}(\varepsilon_\vartheta+\nu\varepsilon_r)+\omega_1\sigma_1^\circ\sin^2\alpha_1+\omega_2\sigma_2^\circ\sin^2\alpha_2\\
& && \tau_{r\vartheta} = aG\varepsilon_{r\vartheta}+\omega_1\sigma_1^\circ\cos\alpha_1\sin\alpha_1+\omega_2\sigma_2^\circ\cos\alpha_2\sin\alpha_2\\
&(1.2) && \varepsilon_r\cos^2\alpha_k+\varepsilon_\vartheta\sin^2\alpha_k+\varepsilon_{r\vartheta}\cos\alpha_k\sin\alpha_k=\varepsilon_k^\circ\\
&(1.3) && \varepsilon_r=\frac{\partial u_r}{\partial r},\quad \varepsilon_\vartheta=\frac{1}{r}\frac{\partial u_\vartheta}{\partial\vartheta}+\frac{u_r}{r},\quad \varepsilon_{r\vartheta}=\frac{1}{r}\frac{\partial u_r}{\partial r}+\frac{\partial u_\vartheta}{\partial\vartheta}-\frac{u_\vartheta}{r}\\
&(1.4) && \sigma_k^\circ=E_k\varepsilon_k^\circ,\quad k=1,2
\end{aligned}$$

Здесь σ_r, σ_ϑ, $\tau_{r\vartheta}$ — компоненты напряжения; ε_r, ε_ϑ, $\varepsilon_{r\vartheta}$ — компоненты деформации; u_r, u_ϑ — соответственно радиальная и касательная компоненты перемещения; σ_k° — напряжения в k-м семействе волокон; ε_k° — деформация k-го семейства волокон; E_k — модуль Юнга k-го семейства волокон; E, ν, G — упругие постоянные связующего в обобщенном плоском напряженном состоянии материала. Если рассматривается плоская деформация, то E следует заменить на $E(1-\nu)^{-1}$, ν — на $\nu(1-\nu)^{-1}$. В дальнейшем все формулы приведены для обобщенного напряженного состояния ω_1, ω_2, $0\leqslant\omega_1\leqslant1$, $0\leqslant\omega_2\leqslant1$ — интенсивности армирования первого и второго семейства; α_k — угол между радиус-вектором и k-м семейством волокон арматуры.

Система уравнений (1.2) содержит две неизвестные величины u_r, u_ϑ; она имеет гиперболический тип [3] с характеристиками, совпадающими с волокнами арматуры. Подставляя (1.1) в уравнения равновесия и полагая $k_i = \omega_i;\ \sigma_i^\circ (1 - \nu^2)(aE)^{-1}$ $(i = 1, 2)$, получим систему из двух уравнений относительно k_1, k_2

(1.5)
$$\cos^2\alpha_1 \frac{\partial k_1}{\partial r} + r^{-1}\cos\alpha_1 \sin\alpha_1 \frac{\partial k_1}{\partial \vartheta} + k_1 r^{-1}\cos 2\alpha_1 + \cos^2\alpha_2 \frac{\partial k_2}{\partial r} + r^{-1}\cos\alpha_2\sin\alpha_2 \frac{\partial k_2}{\partial\vartheta} + k_2 r^{-1}\cos 2\alpha_2 = F_1(r, \vartheta)$$
$$\cos\alpha_1 \sin\alpha_1 \frac{\partial k_1}{\partial r} + r^{-1}\sin^2\alpha_1 \frac{\partial k_1}{\partial\vartheta} + r^{-1}k_1 \sin 2\alpha_1 + \cos\alpha_2\sin\alpha_2 \frac{\partial k_2}{\partial r} + r^{-1}\sin^2\alpha_2 \frac{\partial k_2}{\partial\vartheta} + r^{-1}k_2\sin 2\alpha_2 = F_2(r, \vartheta)$$

Так же, как и система (1.2), для определения перемещений система (1.5) имеет гиперболический тип с характеристиками, совпадающими с направлениями волокон арматуры. Рассмотрим задачу об определении напряженного состояния в круглом кольце. Так как перемещения и интенсивности армирования, а следовательно функции k_1, k_2, в этом случае должны быть однозначными функциями координат, то для рассматриваемой задачи их следует искать в виде тригонометрических рядов

(1.6)
$$u_r = u_r^\circ(r) + \sum_{n=1}^{\infty} [f_{n1}(r)\cos n\vartheta + g_{n1}(r)\sin n\vartheta]$$
$$u_\vartheta = u_\vartheta^\circ(r) + \sum_{n=1}^{\infty} [f_{n2}(r)\cos n\vartheta + g_{n2}(r)\sin n\vartheta]$$

(1.7)
$$k_1 = k_1^\circ(r) + \sum_{n=1}^{\infty} [f_{n3}(r)\cos n\vartheta + g_{n3}(r)\sin n\vartheta]$$
$$k_2 = k_2^\circ(r) + \sum_{n=1}^{\infty} [f_{n4}(r)\cos n\vartheta + g_{n4}(r)\sin n\vartheta]$$

Из уравнений (1.2) получаем системы для определения функций u_r°, u_ϑ° и f_{ns}, g_{ns}, $s = 1, 2$:

(1.8)
$$\frac{du_r^\circ}{dr}\cos^2\alpha_k + \frac{u_r^\circ}{r}\sin^2\alpha_k + \left(\frac{du_\vartheta^\circ}{dr} - \frac{u_v^\circ}{r}\right)\cos\alpha_k\sin\alpha_k = \varepsilon_k^\circ$$
$$\cos^2\alpha_k \frac{df_{n1}}{dr} + \frac{\sin^2\alpha_k}{r} f_{n1} + \frac{n\cos\alpha_k\sin\alpha_k}{r} g_{n1} + n\sin^2\alpha_k g_{n2} + \left(\frac{df_{n2}}{dr} - \frac{f_{n2}}{r}\right)\cos\alpha_k\sin\alpha_k = 0$$

(1.9)
$$\cos^2\alpha_k \frac{dg_{n1}}{dr} + \frac{\sin^2\alpha_k}{r} g_{n1} - \frac{n\sin^2\alpha_k}{r} f_{n2} - \frac{n\cos\alpha_k\sin\alpha_k}{r} f_{n1} + \left(\frac{dg_{n2}}{dr} - \frac{g_{n2}}{r}\right)\cos\alpha_k\sin\alpha_k = 0$$

Корни характеристического определителя находятся из уравнения

(1.10)
$$\Delta_n(\lambda) = [\lambda^2 - \lambda(1 + \operatorname{tg}\alpha_1 \operatorname{tg}\alpha_2) + (1 - n^2)\operatorname{tg}\alpha_1 \operatorname{tg}\alpha_2]^2 + n^2\lambda^2(\operatorname{tg}\alpha_1 + \operatorname{tg}\alpha_2)^2 = 0$$

В общем случае имеются две пары комплексно-сопряженных корней

(1.11) $\lambda_{1,2}^{(n)} = \nu_n \pm i\zeta_n, \quad \lambda_{3,4}^{(n)} = \varkappa_n \pm i\eta_n, \quad i = \sqrt{-1}$

где ν_n, ζ_n, $\varkappa_n$, η_n определяются по формулам

(1.12) $\nu_n = 2^{-1}\left[(1+s) + \sqrt{\frac{r_n + x_n}{2}}\right], \quad \zeta_n = 2^{-1}\left[-n\xi + \sqrt{\frac{r_n - x_n}{2}}\right]$

(1.13) $\varkappa_n = 2^{-1}\left[(1+s) - \sqrt{\frac{r_n + x_n}{2}}\right], \quad \eta_n = 2^{-1}\left[-n\xi + \sqrt{\frac{r_n - x_n}{2}}\right]$

(1.14) $s = \operatorname{tg}\alpha_1 \operatorname{tg}\alpha_2, \quad \xi = \operatorname{tg}\alpha_1 + \operatorname{tg}\alpha_2, \quad x_n = (1+s)^2 - n^2\xi^2 - 4(1-n^2)s$

(1.15) $y_n = -2(1+s)\eta\xi, \quad y_n > 0, \quad r_n = \sqrt{x_n^2 + y_n^2}$

Если волокна разных семейств ортогональны ($\operatorname{tg}\alpha_1 = -\operatorname{tg}\alpha_2$), то существует пара двойных комплексно-сопряженных корней, определяемых из уравнения

(1.16) $\Delta_n^*(\lambda) = [\lambda^2 - (\lambda - n^2)\operatorname{tg}^2\alpha_1]^2 = 0$

при $n = 1$ имеем

(1.17) $\Delta_n(\lambda) = [\lambda^2 - \lambda(1 + \operatorname{tg}\alpha_1 \operatorname{tg}\alpha_2)]^2 + \lambda^2(\operatorname{tg}\alpha_1 + \operatorname{tg}\alpha_2)^2 = 0$

и корень $\lambda = 0$ — двойной; два других корня имеют вид

(1.18) $\lambda_{1,2}^1 = (1 + \operatorname{tg}\alpha_1 \operatorname{tg}\alpha_2) \pm i(\operatorname{tg}\alpha_1 + \operatorname{tg}\alpha_2)$

Если $\sin\alpha_1 = 0$, то имеем двойной корень $\lambda = 0$ и два комплексно-сопряженных $\lambda_{3,4}^{(n)} = 1 \pm in\operatorname{tg}\alpha_2$, если $\cos\alpha_1 = 0$, то в этом случае для определения λ_2 имеем уравнение второго порядка $\cos^2\alpha_2 \sin^2\alpha_2 \times (\lambda + n^2 - 1)^2 + n^2\lambda^2\cos^4\alpha_2 = 0$, и, следовательно, характеристическое уравнение имеет два комплексно-сопряженных корня $\lambda_{1,2} = (n^2 - 1) \times (1 \pm n_i \operatorname{ctg}\alpha_2)^{-1}$; если $n = 1$, то имеем один двойной корень $\lambda = 0$.

Таким образом, в общем случае ($\sin 2\alpha_1 \neq 0$) общее решение зависит от четырех произвольных постоянных, для определения которых достаточно задавать нагрузку на одном из контуров. Это естественно, так как в случае $\cos\alpha_1 \neq 0$ имеем задачу Коши для гиперболической системы уравнений с данными на нехарактеристической кривой. В случае $\cos\alpha_1 = 0$ граница характеристична, и, следовательно, данные Коши зависят друг от друга. Таким образом, в данном случае имеем «распространение» напряженного состояния.

Функции f_{n1}, f_{n2}, g_{n1}, g_{n2} имеют вид

(1.19) $f_{n1}(r) = r^{\nu_n}[f_{n1}^\circ \cos(\xi_n \ln r) + f_{n2}^\circ \sin(\xi_n \ln r)] + r^{\varkappa_n}[f_{n3}^\circ \cos(\eta_n \ln r) + f_{4n}^\circ \sin(\eta_n \ln r)]$

$g_{n1}(r) = r^{\nu_n}[-f_{n2}^\circ \cos(\xi_n \ln r) + f_{n1}^\circ \sin(\xi_n \ln r)] + r^{\varkappa_n}[-f_{n4}^\circ \cos(\eta_n \ln r) + f_{n3}^\circ \sin(\eta_n \ln r)]$

$f_{n2}(r) = r^{\nu_n}[f_{n3}^\circ \cos(\xi_n \ln r) + f_{n4}^\circ \sin(\xi_n \ln r) + r^{\varkappa_n}[f_{n1}^\circ \cos(\eta_n \ln r) + f_{n2}^\circ \sin(\eta_n \ln r)]$

$g_{n2}(r) = r^{\nu_n}[-f_{n4}^\circ \cos(\xi_n \ln r) + f_{n3}^\circ \sin(\xi_n \ln r)] + r^{\varkappa_n}[-f_{n2}^\circ \cos(\eta_n \ln r) + f_{n1}^\circ \sin(\eta_n \ln r)]$

где f_{ni}°, $i = 1, 2, 3, 4$ — произвольные постоянные. Аналогичным же образом определяются функции f_{ni}, g_{ni}, $i = 3, 4$ при помощи системы (1.5).

Функции f_{ni}, g_{ni}, $i = 1, 2$ зависят от четырех произвольных постоянных, в этом заключается отличие рассматриваемой задачи от классической плоской задачи теории упругости, в которой соответствующие функции f_{ni}, g_{ni} зависят от восьми произвольных постоянных. Функции f_{ni}, g_{ni}, $i = 3, 4$, определяющие интенсивности армирования, также зависят от четырех постоянных; таким образом имеется восемь произвольных постоянных, для определения которых можно поступать различным образом (в случае, когда граница не является характеристической и уравнения для определения функций f_{ni}, g_{ni}, $i = 1, 2, 3, 4$ не вырождаются). Эти константы определяются при задании нагрузки на обоих контурах кольца; можно фиксировать u_r, u_ϑ на одном контуре и k_1, k_2 на другом и т. д. Соответствующие тригонометрические ряды для определения напряжения и деформаций должны сходиться; это ограничивает возможности варьирования граничных условий. Рассмотрим частные случаи.

2. Пусть $\alpha_1 = 0$ и $\alpha_2 = \pi / 2$. В этом случае арматура располагается по концентрическим окружностям и радиус-векторам. Система уравнений (1.2) для определения перемещений u_r и u_ϑ принимает вид

$$\frac{\partial u_r}{\partial r} = \varepsilon_1{}^\circ, \quad \frac{1}{r}\frac{\partial u_\vartheta}{\partial \vartheta} + \frac{u_r}{r} = \varepsilon_2{}^\circ \tag{2.1}$$

Из (2.1) получаем

$$u_r(r, \vartheta) = \varepsilon_1{}^\circ r + a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} [a_n \cos n\vartheta + b_n \sin n\vartheta] \tag{2.2}$$

$$u_\vartheta(r, \vartheta) = r\vartheta(\varepsilon_2{}^\circ - \varepsilon_1{}^\circ) - \frac{a_0\vartheta}{2} - \sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{a_n}{n}\sin\vartheta - \frac{b_n}{n}\cos n\vartheta\right] \tag{2.3}$$

Так как тангенциальное перемещение u_ϑ должно быть периодическим по ϑ (рассматривается замкнутое кольцо), из (2.3) следует, что $a_0 \equiv 0$, $\varepsilon_2{}^0 \equiv \varepsilon_1{}^0$. Из (2.2) и (2.3) следует, что для определения неизвестных коэффициентов a_n и b_n в формулах (2.2), (2.3) достаточно задать одно из перемещений u_r или u_ϑ на каком-либо из контуров кольца. Напомним, что в классической теории упругости оба перемещения u_r и u_ϑ на границе задаются независимо друг от друга. Возникающая неоднозначность связана с тем, что решается характеристическая задача Коши для гиперболической системы уравнений.

Если имеем систему граничных условий в напряжениях

$$\sigma_r = a\sigma_r{}^\circ + k_1\,|_{r=R} = p_1(\vartheta), \quad \tau_{r\vartheta} = \frac{1-\nu}{2}\,\varepsilon_{r\vartheta}\,|_{r=R} = p_2(\vartheta) \tag{2.4}$$

то, так как напряжение $\sigma_r{}^\circ$ в связующем постоянно, коэффициенты a_n и b_n определяются при задании касательной нагрузки вдоль контура и выражаются формулами $a_n = Rp_{n1}(1 - n^2)^{-1}$, $b_n = -R(1 - n^2)^{-1}p_{n2}$, где p_{n1} и p_{n2} — коэффициенты соответственно при $\cos n\vartheta$ и $\sin n\vartheta$ в разложении $p_2(\vartheta)$ в тригонометрический ряд, и $\varepsilon_{r\vartheta}$ имеет вид

$$\varepsilon_{r\vartheta} = Rr^{-1}g(\vartheta) = (Rr^{-1})\sum_{n=1}^{\infty}[p_{n1}\cos n\vartheta - p_{n2}\sin n\vartheta]$$

Функции k_1 и k_2 определяются из уравнений

$$\frac{\partial k_1}{\partial r} + \frac{k_1}{r} - \frac{k_2}{r} = \frac{(1-\nu)}{2}\frac{R}{r^2}g'(\vartheta), \quad k_2 = -\frac{(1-\nu)R}{2r}g(\vartheta) \tag{2.5}$$

Из последнего уравнения следует

$$\omega_2(r, \vartheta) = -aG\sigma_0^{-1}Rr^{-1}g(\vartheta) \tag{2.6}$$

Так как всегда должно быть $0 \leqslant \omega_2 \leqslant 1$, из (2.6) следует, что при $\sigma_0 > 0$ (т. е. когда волокна арматуры, лежащие вдоль концентрических окружностей, растянуты) $g(\vartheta) \leqslant 0$, и, наоборот, $g(\vartheta) \geqslant 0$ при $\sigma_0 < 0$. Кроме того, ω_2 должна удовлетворять неравенству $\omega_2 \leqslant 1$, что приводит к ограничению нагрузки $p_2(\vartheta)$ в соответствии с формулами (2.4), (2.6).

Аналогичное неравенство должно быть удовлетворено для k_1. Это ограничение на k_1 приводит к соответствующему ограничению на нагрузку $p_1(\vartheta)$.

Если рассматривается сплошной диск, то, как следует из (2.5), $k_1 \equiv k_2 \equiv 0$, $\varepsilon_{r\vartheta} = 0$ и материал пластинки будет находиться в состоянии однородной деформации. Равнонапряженной армированной конструкции в виде сплошного диска и с арматурой, лежащей по радиус-векторам и концентрическим окружностям, не существует.

3. Рассмотрим случай, когда $\alpha_1 = 0$ и $0 < \alpha_2 = \beta < \pi/2$. В этом случае одно из семейств волокон арматуры расположено вдоль радиус-векторов, а другое лежит произвольно, не совпадая, однако, с концентрическими окружностями. Система (1.2) имеет вид $\partial u_r / \partial r = \varepsilon_1{}^\circ$

$$\begin{aligned}&\frac{\partial u_r}{\partial r}\cos^2\beta + \left(\frac{1}{r}\frac{\partial u_\vartheta}{\partial\vartheta} + \frac{u_r}{r}\right)\sin^2\beta + \\ &+\left(\frac{1}{r}\frac{\partial u_r}{\partial\vartheta} + \frac{\partial u_\vartheta}{\partial r} - \frac{u_\vartheta}{r}\right)\cos\beta\sin\beta = \varepsilon_2{}^\circ\end{aligned} \tag{3.1}$$

Функции $u_r{}^\circ(r)$ и $u_\vartheta{}^\circ(r)$ имеют вид

$$u_r{}^\circ(r) = \varepsilon_1{}^\circ r + C_1, \quad u_\vartheta{}^\circ(r) = r\left[\frac{2\ln r}{\sin 2\beta} + (\varepsilon_2{}^\circ - \varepsilon_1{}^\circ) + C_1\operatorname{tg}\beta r^{-1} + C_2\right] \tag{3.2}$$

Части $u_r{}^1$ и $u_\vartheta{}^1$ функций u_r и u_ϑ, зависящие от ϑ, имеют вид

$$\begin{aligned}&u_r{}^1 = \sum_{n=1}^{\infty}[f_{n1}\cos n\vartheta + g_{n1}\sin n\vartheta]\\ &u_\vartheta{}^1 = \sum_{n=1}^{\infty}\left[\left\{\frac{ng_{n1} - (n^2-1)\sin\beta\cos\beta f_{n1}}{n^2\sin^2\beta + \cos^2\beta} + r\,[u_{n3}\cos(n\operatorname{tg}\beta\ln r) + \right.\right.\\ &\left.\left. + u_{n4}\sin(n\operatorname{tg}\beta\ln r)]\right\}\cos n\vartheta + \left\{-\frac{nf_{n1} + (n^2-1)\sin\beta\cos\beta g_{n1}}{n^2\sin^2\beta + \cos^2\beta} + \right.\right.\\ &\left.\left. + r\,[-u_{n4}\cos(n\operatorname{tg}\beta\ln r) + u_{n3}\sin(n\operatorname{tg}\beta\ln r)]\right\}\sin n\vartheta\right]\end{aligned} \tag{3.3}$$

Если деформация материала происходит без вращения малого элемента (элементарное вращение элемента среды в полярных координатах $2\chi = -\partial u_r/\partial\vartheta + \partial u_\vartheta/\partial r + u_\vartheta/r$ равно нулю), получаем $u_\vartheta' \equiv 0$, $u_r' \equiv 0$, $u_r{}^\circ = \varepsilon_1{}^\circ r$; $u_\vartheta{}^\circ = 0$, $\varepsilon_2{}^\circ \equiv \varepsilon_1{}^\circ$; следовательно, материал при этом находится в состоянии однородной деформации. Тогда функции k_1 и k_2 принимают вид: $k_2 = D_0 r^{-2}$, $k_1 = -D_0 r^{-2} + D_1 r^{-1}$ и однозначно определяются при задании нагрузки на одном из контуров. В случае сплошного диска при самоуравновешенной нагрузке k_1 и k_2 вследствие ограниченности должны обратиться в нуль; следовательно, в этом случае не существует равнонапряженной армированной конструкции.

В предположении независимости u_r, u_ϑ, k_1, k_2 от полярного угла напряжения в связующем имеют вид

$$\begin{aligned}(3.4)\qquad & \sigma_r^\circ = aE\,(1-\nu^2)^{-1}[\varepsilon_1^\circ\,(1+\nu)+\nu C_1 r^{-1}]\\ & \sigma_\vartheta^\circ = aE\,(1-\nu^2)^{-1}\,[\varepsilon_1^\circ(1+\nu)+C_1 r^{-1}],\\ & \overset{\circ}{\tau}_{r\vartheta} = aG\left[\frac{2}{\sin 2\beta}(\varepsilon_2^\circ-\varepsilon_1^\circ)-r^{-1}C_1\operatorname{tg}\beta - C_2\right]\end{aligned}$$

k_1 и k_2 при этом определены формулами

$$\begin{aligned}(3.5)\qquad & k_2 = C_1 r^{-1}\operatorname{tg}\beta - 2\,(\sin 2\beta)^{-1}\,(\varepsilon_2^\circ-\varepsilon_1^\circ)+C_2+D_1 r^{-2}\\ & k_1 = -C_1 r^{-1}\sin\beta\cos\beta - D_1\cos^2\beta r^{-2} + C_1 r^{-1}\operatorname{tg}\beta\cos 2\beta +\\ & + D_1 r^{-2}\cos 2\beta + 2\,C_1\cos 2\beta\,(\sin 2\beta)^{-1}(\varepsilon_2^\circ-\varepsilon_1^\circ)\ln r -\\ & - C_2\cos 2\beta\ln r + D_2\end{aligned}$$

Для определения констант, входящих в уравнения (3.1) — (3.3), существуют разные способы задания граничных условий: можно задать $u_\vartheta\,(r,\vartheta)$ на обоих контурах кольца и определить при этом $u_r\,(r,\vartheta)$ из решения задачи или задать u_r и u_ϑ на одном из контуров кольца, задать k_2 на одном контуре, а k_1 на другом или задать их вместе на одном из контуров кольца и т. д. При задании на границе нагрузки также можно действовать разными способами: задать касательную компоненту $\tau_{r\vartheta}$ на обоих контурах, а k_1 и k_2 — или вместе на одном контуре, или по отдельности на разных. Из требования уравновешенности нагрузки возникают ограничения на возможные величины граничных интенсивностей армирования или величину граничной нагрузки.

Из формул (3.4), (3.5) в случае сплошного диска следует, что по ограниченности k_1 и k_2, $C_1\equiv 0$, $D_1\equiv 0$, $C_2\equiv 0$, тогда

$$\begin{aligned}& k_1\equiv D_2,\quad k_1 = -(\sin\beta\cos\beta)^{-1}\,(\varepsilon_2^\circ-\varepsilon_1^\circ);\quad \sigma_r^\circ = \sigma_\vartheta^\circ =\\ & = aE\varepsilon_1^\circ\,(1-\nu)^{-1}\end{aligned}$$

$\tau_{r\vartheta}^\circ = aG\,(\sin\beta\cos\beta)^{-1}\,(\varepsilon_2^\circ-\varepsilon_1^\circ) = -aGk_1$, $0\leqslant\omega_2\leqslant 1$, $0\leqslant\omega_1\leqslant 1$, $0\leqslant D_2\leqslant 1$ при $\sin 2\beta>0$, $\varepsilon_2^\circ-\varepsilon_1^\circ<0$, при $\sin 2\beta<0$, $\varepsilon_2^\circ-\varepsilon_1^\circ>0$ и, кроме того, $|\,(\varepsilon_2^\circ-\varepsilon_1^\circ)\,(\sin\beta\cos\beta)^{-1}\,|\leqslant 1$. Следовательно, получим ограничения на деформацию волокон и величину угла.

4. Рассмотрим случай, когда $\alpha_1=\pi/2$ и $0<\alpha_2=\beta<\pi/2$. При этом одно из семейств волокон арматуры расположено по концентрическим окружностям, другое — произвольно, не совпадая с радиус-векторами. Система (1.2) в этом случае записывается в виде

$$\begin{aligned}(4.1)\qquad & \frac{\partial u_\vartheta}{\partial\vartheta}+u_r=\varepsilon_1^\circ r\\ & r\frac{\partial u_r}{\partial r}\cos^2\beta+\left(\frac{\partial u_\vartheta}{\partial\vartheta}+u_r\right)\sin^2\beta+\left(\frac{\partial u_r}{\partial\vartheta}+r\,\frac{\partial u_\vartheta}{\partial r}-u_\vartheta\right)\cos\beta\sin\beta=\varepsilon_2^\circ r\end{aligned}$$

Функции $u_r^\circ\,(r)$ и $u_\vartheta^\circ\,(r)$ определяются формулами

$$(4.2)\qquad u_r^\circ=\varepsilon_1^\circ r,\quad u_\vartheta^\circ(r)=\frac{(\varepsilon_2^\circ-\varepsilon_1^\circ)}{\cos\beta\sin\beta}\,r\ln r+C_0 r$$

их части u_r^1 и u_ϑ^1, зависящие от полярного угла, даются формулами

$$u_r^1(r,\vartheta)=\sum_{n=1}^{\infty}[nv_n(r)\cos n\vartheta-nu_n(r)\sin n\vartheta]\tag{4.3}$$

$$u_\vartheta^1(r,\vartheta)=\sum_{n=1}^{\infty}[u_n(r)\cos n\vartheta+v_n(r)\sin n\vartheta]$$

а функции $u_n(r)$ и $v_n(r)$ имеют вид

$$u_n(r)=r^{\nu_n}[u_{n1}\cos(\xi_n\ln r)+u_{n2}\sin(\zeta_n\ln r)]\tag{4.4}$$

$$v_n(r)=r^{\nu_n}[-u_{n2}\cos(\xi_n\ln r)+u_{n1}\sin(\xi_n\ln r)]$$

где u_{n1}, u_{n2} — константы, а ν_n и ξ_n имеют вид

$$\nu_n=(n^2+1)\sin^2\beta\,[\sin^2\beta+n^2\cos^2\beta]^{-1},\tag{4.5}$$

$$\xi_n=n(n^2+1)\cos\beta\sin\beta\,[\sin^2\beta+n^2\cos^2\beta]^{-1}$$

Как видно из формул (4.1) — (4.5), число констант по сравнению с предыдущим случаем сократилось вдвое. Это связано с тем, что граница в данном случае характеристична для системы (4.1). Как и в случае, разбиравшемся в п. 2, для определения деформированного состояния материала достаточно задать одно из перемещений на каком-либо из контуров кольца, при решении задачи и задании на границе напряжений обнаруживаем, что радиальную и касательную компоненты нагрузки независимо одна от другой задавать нельзя; при отсутствии элементарного вращения элемента объема материал будет находиться в состоянии однородной деформации.

Система уравнений (1.5) в этом случае записывается в виде

$$r^{-1}\frac{\partial k_1}{\partial\vartheta}+\cos\beta\sin\beta\frac{\partial k_2}{\partial r}+r^{-1}k_2\sin 2\beta=F_2(r,\vartheta),\ k_1=-rF_1(r,\vartheta)\tag{4.6}$$

Если деформация материала осесимметрична, получаем

$$\varepsilon_r=\varepsilon_1^\circ,\quad \varepsilon_\vartheta=\varepsilon_1^\circ,\quad \varepsilon_{r\vartheta}=(\varepsilon_2^\circ-\varepsilon_1^\circ)(\cos\beta\sin\beta)^{-1}\tag{4.7}$$

$$k_1\equiv 0,\quad k_2=-(1-\nu)(\varepsilon_2^\circ-\varepsilon_1^\circ)(\cos\beta\sin\beta)^{-2}+C_1r^{-2}$$

В случае сплошного диска $\omega_2=\text{const}$, из требования положительности ω_2 следует $(\varepsilon_2^\circ=-\varepsilon_1^\circ)<0$. Из формул (4.7) также следует, что $\omega_1\equiv 0$ как в случае кольца, так и в случае сплошного диска, т. е. при осесимметричной деформации материала в условиях равнонапряженности волокон арматуру по концентрическим окружностям укладывать не следует.

5. Рассмотрим исключительный случай: волокна арматуры лежат по ортогональным направлениям. Положим, $\alpha_2=\alpha_1+\pi/2$. В этом случае характеристическое уравнение (1.10) для определения функций u_r и u_ϑ принимает вид

$$\cos^2\alpha_1\sin^2\alpha_1[\lambda^2+n^2-1]^2+n^2\lambda^2\cos^2 2\alpha_1=0\tag{5.1}$$

и в общем случае ($\sin^2\alpha_1\neq 0$, $\alpha_1\neq\pi/4$) имеет четыре корня

$$\lambda_{1,2}^{(n)}=-ni\,|\operatorname{ctg}2\alpha_1|\pm i\,|\sin 2\alpha_1|^{-1}\sqrt{n^2-\sin^2 2\alpha_1}\tag{5.2}$$

$$\lambda_{3,4}^{(n)}=ni\,|\operatorname{ctg}2\alpha_1|\pm i\,|\sin 2\alpha_1|^{-1}\sqrt{n^2-\sin^2 2\alpha_1}$$

Случай $\alpha_1 = \pi / 4$ (арматура лежит под углом $\pi / 4$ к радиус-вектору) является исключительным: в этом случае уравнение (5.1) имеет два двойных корня $\lambda_{1,2}^{(n)} = \pm i\sqrt{n^2 - 1}$. При $n = 1$ имеем двойной корень $\lambda = 0$ и два мнимых $\lambda_{3,4}^{(1)} = \pm 2i \operatorname{ctg} 2\alpha_1$. При $\alpha_1 = \pi / 4$ и $n = 1$ уравнение (5.1) имеет один четырехкратный корень $\lambda = 0$. Функции $u_r^\circ(r)$ и $u_\vartheta^\circ(r)$ имеют вид

$$u_r^\circ(r) = r2^{-1}(\varepsilon_1^\circ + \varepsilon_2^\circ) + C_1 r^{-1} \tag{5.3}$$

$$u_\vartheta^\circ(r) = (\sin 2\alpha_1)^{-1}[(\varepsilon_2^\circ - \varepsilon_1^\circ) r \ln r - r^{-1} C_1 \cos 2\alpha_1 + C_2 r]$$

Случай $\alpha_1 = 0$ здесь не рассматривается, так как он разобран в п. 2. Функции k_1 и k_2 определяются из уравнений (1.5) при $\alpha_2 = \alpha_1 + \pi / 2$.

При осесимметричной деформации материала и $\alpha_1 = \pi / 4$ безразмерные напряжения в связующем определены двумя формулами

$$\sigma_{r\vartheta}^\circ = (1 + \nu)(\varepsilon_1^\circ + \varepsilon_2^\circ) 2^{-1} \mp C_1 (1 - \nu) r^{-2}$$

$$\tau_{r\vartheta}^\circ = (1 - \nu)(\sin 2\alpha_1)^{-1}[(\varepsilon_1^\circ - \varepsilon_2^\circ) + 2C_1 r^{-2} \cos 2\alpha_1]$$

а функции k_1 и k_2 имеют вид

$$k_1 = 2^{-1}C_2 + D_1 r^{-2}, \quad k_2 = C_2 2^{-1} + [3C_1(1 - \nu) - D_1] r^{-2}$$

Здесь C_1, C_2, D_1 — константы, определяемые из граничных условий. Для определения этих констант достаточно задать нагрузку на одном из контуров кольца, и, например, k_2 на другом; возможны и другие варианты.

При любом α_1 функции f_{n1}, g_{n1}, f_{n2}, g_{n2} определяются формулами типа (1.19), в которых $\nu_n \equiv \varkappa_n \equiv 0$.

6. Во всех рассмотренных случаях при чистой деформации материала деформированное состояние материала было осесимметричным. При $\alpha_1 \neq \pi / 2$, $\alpha_2 \neq \pi / 2$, $\alpha_1 \neq \alpha_2$ перемещения при осесимметричной деформации выражаются формулами

$$u_r^\circ = r^s [D_1 + D(1 - s)^{-1} r^{1-s}] \tag{6.1}$$

$$u_\vartheta^\circ = D_2 r + r(\cos \alpha_1 \sin \alpha_1)^{-1}[\varepsilon_1^\circ \ln r - D_1(s \cos^2 \alpha_1 + \sin^2 \alpha_1) \times$$
$$\times (1 - s)^{-1} r^{s-1} - D(1 - s)^{-1} \ln r]$$

где

$$s = \operatorname{tg} \alpha_1 \operatorname{tg} \alpha_2 \quad (\cos \alpha_1 \cos \alpha_2 \neq 0, \ \sin 2\alpha_1 \neq 0) \tag{6.2}$$

$$D = [\varepsilon_1^\circ \sin 2\alpha_2 - \varepsilon_2^\circ \sin 2\alpha_1][2 \sin(\alpha_2 - \alpha_1) \cos \alpha_1 \cos \alpha_2]^{-1}$$

Следовательно, u_r° и u_ϑ° зависят от двух произвольных постоянных D_1 и D_2, определяемых при задании нагрузки или перемещений на контурах кольца. Если кольцо вырождается в сплошной диск, то при $\operatorname{tg} \alpha_1 \operatorname{tg} \alpha_2 < 1$ необходимо $D_1 \equiv 0$, так как в противном случае деформации бесконечны в центре диска. В формулах (6.1), (6.2) $s \neq 1$, так как направления волокон разных семейств не совпадают. И в данном случае, если материал деформируется без вращения элементарного объема, получаем $\varepsilon_1^\circ \equiv \varepsilon_2^\circ$, $D_2 \equiv 0$. В этом случае u_r° и u_ϑ° зависят только от одной произвольной постоянной D_1.

В любом случае в предположении чистой деформации материала его деформированное состояние оказывается однородным и волокна материала

— необходимо равнодеформированными. Напряженное состояние материала при этом не обязано быть осесимметричным, интенсивности армирования определяются формулами, приведенными в п. 5.

7. Требования общего равновесия: равенство нулю главного вектора и главного момента действующих сил накладывают ограничения или на выбор арматуры, или на выбор граничных интенсивностей армирования. Например, при $\alpha_1 = \pi / 4$, $\alpha_2 = 3\pi / 4$

$$\omega_k \big|_{r=R_m} = \omega_{km}, \quad k,m = 1,2 \tag{7.1}$$

(где R_2 — внешний радиус кольца, R_1 — внутренний радиус) из условия равенства нулю главного момента имеем

$$[R_2^2 \omega_{22} - R_1^2\omega_{21}]\,[R_1^2\omega_1 - R_2^2\omega_{12}]^{-1} = E_1E_2^{-1} \tag{7.2}$$

Из (7.2) следует, что при заданных на границе интенсивностях армирования нельзя произвольно выбирать материал арматуры и, наоборот, при заданных модулях Юнга арматуры нельзя произвольно выбирать граничные интенсивности армирования. Так как материал связующего при заданных нагрузках по предположению остается упругим, должно быть выполнено условие прочности связующего. Например, если в случае сплошного диска и однородной деформации предположить, что материал связующего подчиняется условию текучести (прочности) Мизеса с пределом текучести (прочности) τ_*, то

$$| \varepsilon_1^\circ | \leqslant \sqrt{3}\,(1 - \nu)\,(aE)^{-1}\,\tau_*$$

следовательно, допустимая деформация волокон зависит от прочности связующего.

Выясним необходимые ограничения. Пусть на контуре Γ области Ω заданы компоненты нагрузки. Тогда система соотношений равнонапряженности и граничные условия

$$\sigma_r \cos\gamma + \tau_{r\theta} \sin\gamma \,|_\Gamma = f_1(\Gamma), \quad \tau_{r\theta} \cos\gamma + \sigma_\theta \sin\gamma \,|_\Gamma = f_2(\Gamma)$$

где γ — угол, составленный внешней нормалью границы с радиус-вектором, составляют систему из четырех уравнений относительно трех компонент тензора деформаций ε_r, ε_θ, $\varepsilon_{r\theta}$. Так как компоненты тензора деформаций должны определяться из решения задачи, то по теореме Кронекера — Каппелли (см. [2]) ранг матрицы A из коэффициентов при ε_r, ε_θ, $\varepsilon_{r\theta}$ должен быть равен рангу расширенной матрицы. Тогда должно иметь место равенство

$$-f_1B_3 + f_2B_4 - \varepsilon_1^\circ B_1 + \varepsilon_2^\circ B_2 = 0$$

где B_i, $i = 1, 2, 3, 4$ имеют вид

$$B_k = \frac{(aE)^2}{2(1-\nu)(1+\nu)^2}\{\nu\cos^2(\gamma - \alpha_m) - \sin^2(\gamma - \alpha_m)\}$$

$$B_{k+2} = -\frac{aE}{2(1-\nu^2)}\sin(\alpha_m - \gamma)\{\cos\alpha_k \sin(\gamma + \alpha_m) +$$

$$+ \cos\alpha_m \sin(\gamma + \alpha_k) + \nu[\sin\alpha_m\cos(\gamma - \alpha_k) + \sin\alpha_k\cos(\gamma - \alpha_m)]\}$$

$$k, m = 1, 2; \quad k \neq m$$

Если хотя бы одно из B_i, $i = 1, 2, 3, 4$ отлично от нуля, то эта система имеет единственное решение. Это означает, что если выполнено соотношение (1.2), то при известных значениях интенсивностей армирования компоненты деформации на граничном контуре по известным компонентам нагрузки определяются единственным образом.

Поступила 31 V 1976

ЛИТЕРАТУРА

1. *Немировский Ю. В.* Об упругопластическом поведении армированного слоя. ПМТФ, 1969, № 6.
2. *Курош А. Г.* Курс высшей алгебры. М., «Наука», 1965.
3. *Тихонов А. Н., Самарский А. А.* Уравнения математической физики. М., «Наука», 1972.