Прикладная математика и механика. Том 41, 1977

УДК 539.32

ЭФФЕКТИВНЫЕ МОДУЛИ УПРУГОСТИ НЕОДНОРОДНЫХ СРЕД В СЛУЧАЕ ПОТЕНЦИАЛЬНЫХ И БИВИХРЕВЫХ ТЕНЗОРНЫХ ПОЛЕЙ

А. Г. Фокин

(Москва)

Устанавливается эквивалентность методов расчета эффективных модулей упругости для потенциальных и бивихревых тензорных полей. Показано, что точные решения в этих случаях совпадают, а совпадение решений, найденных в сингулярном приближении, возможно лишь при определенных ограничениях, накладываемых на параметры тела сравнения.

1. Известно [1], что любой симметричный тензор второго ранга может быть разложен на потенциальную и бивихревую составляющие. Потенциальная составляющая упругих полей находится из уравнений

$$\operatorname{div} \sigma = -f, \quad \operatorname{Rot} \varepsilon = 0, \quad \sigma = \lambda\varepsilon \quad (\operatorname{Rot} = \operatorname{rot} \oplus \operatorname{rot}) \tag{1.1}$$

где σ, ε — тензоры напряжений и деформаций, λ — тензор модулей упругости, f — вектор объемной плотности внешних сил. (Здесь и ниже всюду, где это возможно, тензорные индексы опущены.) Бивихревая составляющая в свою очередь определяется с помощью уравнений

$$\operatorname{Rot} \varepsilon = -\eta, \quad \operatorname{div} \sigma = 0, \quad \sigma = \lambda\varepsilon \tag{1.2}$$

где η — тензор несовместности, описывающий распределение источников внутренних напряжений.

Ниже уравнения (1.1) и (1.2) используются для расчета эффективных модулей упругости и упругих полей неоднородных сред, для которых материальные характеристики (плотность, модули упругости, податливости и т. д.) являются случайными полями, а f; η — регулярные функции координат.

Рассмотрим сначала потенциальные поля. Введем наряду с полем λ (r) однородное поле сравнения λ_c. Поля смещений u и u_c, соответствующие тензорам λ и λ_c, удовлетворяют уравнениям

$$Lu = -f, \quad L = \operatorname{div} \lambda \operatorname{def}, \quad u|_S = u_0 \tag{1.3}$$

$$L_c u_c = -f, \quad L_c = \operatorname{div} \lambda_c \operatorname{def}, \quad u_c|_S = u_0 \tag{1.4}$$

Здесь S — поверхность, ограничивающая среду, u_0 — значение смещения на границе, а деформации ε, ε_c в силу потенциальности связаны со смещениями u, u_c соотношениями $\varepsilon = \operatorname{def} u$, $\varepsilon_c = \operatorname{def} u_c$. В качестве среды сравнения выбирается такая среда, для которой решение уравнения (1.4) известно.

Задача состоит в нахождении деформации ε и тензора эффективных модулей упругости λ_*, определяющего среднюю деформацию $\langle\varepsilon\rangle = \operatorname{def}\langle u\rangle$ уравнением

$$L_*\langle u\rangle = -f, \quad L_* = \operatorname{div}\lambda_*\operatorname{def}, \quad \langle u\rangle|_S = u_0 \tag{1.5}$$

где угловые скобки означают статистическое усреднение.

Можно показать [2], что в отсутствие внешних сил имеют место равенства

$$\langle\varepsilon\rangle = \varepsilon_c = \operatorname{def} u_0, \quad f = 0 \tag{1.6}$$

а усреднение по объему совпадает со статистическим.

Обозначая избыточные относительно тела сравнения поля и операторы штрихами, из (1.3), (1.4) найдем

$$L_c u' = -L'u, \quad u'|_S = 0 \quad (L' = L - L_c, \quad u' = u - u_c). \tag{1.7}$$

Введем тензор Грина оператора L_c, удовлетворяющий уравнению

$$L_c G = -I\delta, \quad G|_S = 0$$

где I — единичный тензор второго ранга, а δ — дельта-функция.

Тогда из (1.7) имеем

$$u = u_c + G * L'u \tag{1.8}$$

где звездочкой обозначена операция интегральной свертки. Интегральное уравнение (1.8) позволяет выразить поле u через известное поле u_c. Действуя на обе части (1.8) оператором def, получим для деформаций уравнение

$$\varepsilon = \varepsilon_c + Q\lambda'\varepsilon, \quad Q = \operatorname{def} G * \operatorname{div} \tag{1.9}$$

Решая (1.9) относительно ε, находим

$$\varepsilon = a\varepsilon_c, \quad a = (I - Q\lambda')^{-1} \tag{1.10}$$

Оператор a имеет, вообще говоря, смысл бесконечного ряда

$$a = \sum_0^\infty y^n, \quad y = Q\lambda'$$

который получается при решении (1.9) методом итераций.

Исключим теперь из (1.10) поле ε_c. Для этого усредним его и выразим ε_c через $\langle\varepsilon\rangle$

$$\varepsilon_c = \langle a\rangle^{-1}\langle\varepsilon\rangle \tag{1.11}$$

Подстановка (1.11) в (1.10) дает

$$\varepsilon = A\langle\varepsilon\rangle, \quad A = a\langle a\rangle^{-1} \tag{1.12}$$

Оператор A имеет также представление в форме ряда

$$A = \sum_0^\infty Y^n, \quad Y = ty, \quad tF \equiv F - \langle F\rangle \tag{1.13}$$

Решение (1.12) позволяет найти тензор эффективных модулей упругости в виде

(1.14) $\lambda_* = \langle \lambda A \rangle, \quad \langle A \rangle = I, \quad \langle \sigma \rangle = \lambda_* \langle \varepsilon \rangle$

Выражения (1.12) и (1.14), таким образом, полностью решают задачу об описании неоднородной деформируемой среды. Однако найденные точные решения, имеющие форму операторных рядов, лишь в редких случаях носят неформальный характер. Это связано с тем, что имеющаяся информация о статистических свойствах произвольной неоднородной среды недостаточна для расчета λ_* и ε согласно (1.12) и (1.14). Кроме того, математические трудности подобного расчета все еще очень велики. В связи с этим часто приходится ограничиваться рассмотрением приближенных решений [3-7].

Одним из них является сингулярное приближение (S-приближение) [5-7], основанное на выделении сингулярной составляющей тензора Грина G, а следовательно, и оператора Q.

В общем случае тензор Грина G может быть представлен в виде разности двух членов $G = G_\infty - G_1$, один из которых — G_∞ — соответствует неограниченной среде, а другой учитывает наличие поверхности, ограничивающей рассматриваемую среду. При взятии второй производной тензора G возникают сингулярности типа δ-функции. Вводя обозначения [6,7]

(1.15) $$(\operatorname{def} \operatorname{div}^T)^s G_\infty = g\delta, \quad \operatorname{div}^T G * \equiv G * \operatorname{div}$$
$$(\operatorname{def} \operatorname{div}^T)^f G * F = hF$$

где s и f означают сингулярную и формальную части, а T — транспонирование, перепишем (1.12) в виде

$$A = (I - g\lambda')^{-1} R \, \langle (I - g\lambda')^{-1} R \rangle^{-1}$$

$$R = (I - h\lambda')^{-1} \langle (I - h\lambda')^{-1} \rangle^{-1} = \sum_0^\infty (th\lambda')^n$$

Здесь g — обычный тензор, свойства которого определяются структурой неоднородной среды, I — единичный симметричный тензор четвертого ранга, а оператор R описывает нелокальную часть взаимодействий.

Поскольку в S-приближении учитываются лишь локальные взаимодействия, в операторе R следует оставить лишь первый член. В силу этого решение задачи вместо (1.12) и (1.14) имеет вид

(1.16) $\varepsilon = A_s \langle \varepsilon \rangle, \quad \lambda_* = \langle \lambda A_s \rangle, \quad A_s = (I - g\lambda')^{-1} \langle (I - g\lambda')^{-1} \rangle^{-1}$

Вводя вспомогательный тензор b_c равенством

(1.17) $g(\lambda_c + b_c) = -I$

получим для A_S и λ_* уравнения

(1.18) $A_s = (\lambda + b_c)^{-1}(\lambda_* + b_c), \quad \lambda_* + b_c = \langle (\lambda + b_c)^{-1} \rangle^{-1}$

Выражения (1.18) зависят от тензора λ_c, определяющего как g, так и b_c. В зависимости от выбора поля сравнения λ_c отсюда можно получить верхнюю λ^+ и нижнюю λ^- границы для λ_* [7].

2. Перейдем к расчету полей и эффективных упругих модулей в случае бивихревых полей. Поля напряжений σ и σ_c, соответствующие тензорам $s = \lambda^{-1}$ и $s_c = \lambda_c^{-1}$, удовлетворяют уравнениям

(2.1) $$L\sigma = -\eta, \quad \operatorname{div} \sigma = 0, \quad L = \operatorname{Rot} s, \quad \sigma_n \mid_S = \sigma_n^\circ$$

(2.2) $$L_c\sigma_c = -\eta, \quad \operatorname{div} \sigma_c = 0, \quad L_c = \operatorname{Rot} s_c, \quad \sigma_n^c \mid_S = \sigma_n^\circ$$

где σ_n — вектор напряжений с компонентами $\sigma_{kl}n_k$, а n_l — единичный вектор внешней нормали к поверхности S, ограничивающей среду. Тензор s_* определяет средние напряжения с помощью уравнения

(2.3) $$L_* \langle\sigma\rangle = -\eta, \quad \operatorname{div} \langle\sigma\rangle = 0, \quad L_* = \operatorname{Rot} s_*, \quad \langle\sigma_n\rangle \mid_S = \sigma_n^\circ$$

Аналогично (1.6) для случая $\eta = 0$ имеем

$$\langle\sigma\rangle = \sigma_c = \sigma_0, \quad \eta = 0$$

Запишем решение (2.1) в форме (1.9). Для этого введем тензор Грина Z оператора L_c из (2.2), удовлетворяющий уравнению [1]

$$L_cZ = -\theta^0, \quad \operatorname{div} Z = 0, \quad \theta^0 = -\operatorname{Rot}\operatorname{Rot} \zeta, \quad Z_n \mid_S = 0$$

$$\Delta^2\zeta = -\delta, \quad \zeta \mid_S = 0$$

где θ^0 — единичный оператор на подпространстве бивихревых тензоров, Δ — оператор Лапласа, а компоненты тензора Z_n равны $Z_{lijk}n_l$. Тогда из (2.1) и (2.2) аналогично (1.7) получим уравнение

$$L_c\sigma' = -L'\sigma, \quad \operatorname{div} \sigma' = 0, \quad \sigma_n' \mid_S = 0$$

которое дает

(2.4) $$\sigma = \sigma_c + Ps'\sigma, \quad P = Z * \operatorname{Rot}$$

Решая (2.4) относительно σ, находим

$$\sigma = b\sigma_c, \quad b = (I - Ps')^{-1} = \sum_0^\infty (Ps')^n$$

Отсюда, после исключения поля σ_c, связь между σ и $\langle\sigma\rangle$ принимает вид

(2.5) $$\sigma = B\langle\sigma\rangle, \quad B = b\langle b\rangle^{-1} = \sum_0^\infty (tPs')^n$$

Решение (2.5) позволяет найти тензор эффективных податливостей s_* в виде

(2.6) $$s_* = \langle sB\rangle, \quad \langle B\rangle = I, \quad \langle\varepsilon\rangle = s_*\langle\sigma\rangle$$

В S-приближении поле σ и эффективные податливости s_* удовлетворяют соотношениям

(2.7) $$\sigma = B_s\langle\sigma\rangle, \quad s_* = \langle sB_s\rangle, \quad B_s = (I - zs')^{-1}\langle(I - zs')^{-1}\rangle^{-1}$$

где тензор z определен следующим образом:

(2.8) $$(\operatorname{Rot}^T)^s Z_\infty^\eta = z\theta^0, \quad Z = Z_\infty - Z_1$$

Тензоры B_s и s_* можно упростить с помощью вспомогательного тензора a_c, введенного согласно равенству

(2.9) $$z(s_c + a_c) = -I$$

Используя (2.9), получим из (2.8) уравнения для B_s и s_*

(2.10) $$B_s = (s + a_c)^{-1} (s_* + a_c), \quad s_* + a_* = \langle (s + a_c)^{-1} \rangle^{-1}$$

Так же, как и в случае потенциальных полей, решение задачи в s-приближении для бивихревых полей зависит от параметра s_c тела сравнения. В зависимости от выбора поля сравнения s_c из (2.10) получим верхнюю s^+ и нижнюю s^- границы поля s_* [7].

3. Покажем, что решения (1.12) и (1.14) для потенциальных полей эквивалентны решениям (2.5) и (2.6) для бивихревых.

Сначала докажем, что тензор Грина Z, имеющий вид [1]

(3.1) $$Z = \lambda_c [I + \operatorname{def} G * \operatorname{div} \lambda_c] \operatorname{Rot} \zeta *$$

удовлетворяет соотношению

(3.2) $$P = -\lambda_c - \lambda_c Q \lambda_c$$

где учтены определения (1.9) и (2.4).

Действительно, равенство

$$Z * \operatorname{Rot} = \lambda_c [I + \operatorname{def} G * \operatorname{div} \lambda_c] \operatorname{Rot} \operatorname{Rot} \zeta *$$

вместе с тождеством [1]

$$\Delta^2 = \operatorname{Rot} \operatorname{Rot} + \operatorname{def} \pi, \quad \pi = (2\Delta - \operatorname{grad} \operatorname{div}) \operatorname{div}$$

и уравнением

$$G * \operatorname{div} \lambda_c \operatorname{def} = -I$$

полученным из (1.4), дает

$$\begin{aligned} P &= \lambda_c \operatorname{Rot} \operatorname{Rot} \zeta * + \lambda_c \operatorname{def} G * \operatorname{div} \lambda_c (\Delta^2 - \operatorname{def} \pi) \zeta * = \\ &= \lambda_c \operatorname{Rot} \operatorname{Rot} \zeta * + \lambda_c \operatorname{def} G * \operatorname{div} \lambda_c \Delta^2 \zeta * + \lambda_c (\Delta^2) - \\ &- \operatorname{Rot} \operatorname{Rot}) \zeta * = \lambda_c (I + Q \lambda_c) \Delta^2 \zeta * \end{aligned}$$

Отсюда очевидным образом (в силу уравнения $\Delta^2 \zeta = -\delta$) вытекает формула (3.2).

Используя (3.2), для оператора b, входящего в (2.5), найдем

$$b^{-1} = I - P s' = \lambda_c s + \lambda_c Q \lambda_c s'$$

Отсюда после подстановки $\lambda_c s' = -\lambda' s$ и с учетом (1.10) имеем

(3.3) $$b^{-1} = \lambda_c (I - Q \lambda') s, \quad b = \lambda a s_c$$

Соотношение (3.3), связывающее между собой операторы a и b, позволяет также установить связь и между операторами A и B. Подставляя (3.3) в (2.5), получим

(3.4) $$B = \lambda A \lambda_*^{-1}$$

Здесь учтены определения (1.12) и (1.14) оператора A и тензора λ_*.

Найдем теперь связь между λ_*, полученным с помощью (1.14), и s_*, рассчитанным согласно (2.6). Для этого подставим (3.4) в (2.6), что дает (так как $\langle A \rangle = I$

(3.5) $$s_* = \langle s B \rangle = \langle A \lambda_*^{-1} \rangle = \lambda_*^{-1}$$

Таким образом, тензоры эффективных модулей упругости в обоих случаях совпадают и не зависят от характера рассматриваемых полей.

Для поля деформаций ε согласно (2.5), (3.4) и (3.5) запишем

$$\varepsilon = sB\langle\sigma\rangle = sB\lambda_*\langle\varepsilon\rangle = A\langle\varepsilon\rangle \tag{3.6}$$

что совпадает с (1.12). Однако, несмотря на то, что оператор A, входящий в (1.12) и (3.6), один и тот же, деформации ε, рассчитанные по этим формулам, различны. Это объясняется тем, что тензор деформации $\langle\varepsilon\rangle$ в (1.12) и (3.6) удовлетворяет различным уравнениям. В первом случае он находится согласно (1.5), а во втором — с помощью (2.3) и (2.6). Решения (1.12) и (3.6) совпадают лишь в случае $\varphi = 0$, $\eta = 0$.

4. Рассмотрим решения (1.17) и (2.10), полученные в S-приближении для потенциальных и бивихревых полей.

В S-приближении используются лишь тензоры g и z, определяемые согласно (1.15) и (2.8) через тензоры Грина G_∞ и Z_∞ для неограниченной среды, поэтому целесообразно сначала установить между ними связь, аналогичную (3.2). Можно показать, что все выкладки п. 3, связанные с выводом формулы (3.2), остаются справедливыми и при рассмотрении операторов Q_∞ и P_∞, если под ζ понимать функцию Грина оператора Δ^2 для неограниченной среды, имеющую вид $\zeta = r/(8\pi)$.

Проводя в (3.2) замены $P \to P_\infty$ и $Q \to Q_\infty$ и беря от обеих частей равенства сингулярную составляющую, запишем

$$P_\infty{}^s = -\lambda_c - \lambda_c Q_\infty{}^s \lambda_c \tag{4.1}$$

Но операторы $Q_\infty{}^s$ и $P_\infty{}^s$ согласно (1.15) и (2.8) вырождаются в тензоры g и z соответственно. Учитывая определения (1.17) и (2.9) и выражая $Q_\infty{}^s$ и $P_\infty{}^s$ через тензоры b_c и a_c

$$Q_\infty{}^s = -(\lambda_c + b_c)^{-1}, \quad P_\infty{}^s = -(s_c + a_c)^{-1}$$

после несложных преобразований из (4.1) получим

$$(s_c + a_c)^{-1} = (\lambda_c^{-1} + b_c^{-1})^{-1}$$

что в силу равенства $\lambda_c s_c = I$ приводит к соотношению

$$a_c b_c = I, \quad \lambda_c s_c = I \tag{4.2}$$

Преобразуем теперь выражение для тензора s_* из (2.10), найденного в S-приближении. Используя (4.2) и равенство $\lambda s = I$, из (2.10) и (1.18) получим

$$\begin{aligned} s_* + a_c &= \langle(\lambda^{-1} + b_c^{-1})^{-1}\rangle^{-1} = a_c\langle I - b_c(\lambda + b_c)^{-1}\rangle^{-1} = \\ &= a_c[I - b_c(\lambda_* + b_c)^{-1}]^{-1} = \lambda_*^{-1} + a_c \end{aligned} \tag{4.3}$$

Таким образом, в S-приближении также выполняется соотношение (3.5), однако при дополнительном условии (4.2).

Преобразуем тензор B_s. Видно, что с учетом (4.2), (4.3) тензоры B_s из (2.10) и A_s из (1.18) удовлетворяют равенству

$$B_s = \lambda A_s \lambda_*^{-1} \tag{4.4}$$

Подставляя (4.4) в (2.7), найдем для деформации

$$\varepsilon = sB_s\langle\sigma\rangle = A_s\lambda_*^{-1}\lambda_*\langle\varepsilon\rangle = A_s\langle\varepsilon\rangle \tag{4.5}$$

Этим установлена эквивалентность расчета потенциальных (1.16) и бивихревых (4.5) полей в S-приближении. Однако, как и в случае точных решений (см. п. 3), это не означает равенства поля (1.16) полю (4.5).

В заключение отметим, что использование в качестве λ_c и s_c средних значений $\langle\lambda\rangle$ и $\langle s\rangle$ не удовлетворяет соотношению (4.2) и, следовательно, не приводит к (4.3) — (4.5).

При решении уравнений (1.1) и (1.2) без правых частей, т. е. при $f = 0$ и $\eta = 0$, обе схемы расчета приводят к одинаковым результатам как для тензора эффективных модулей упругости, так и для полей.

Поступила 6 X 1975

ЛИТЕРАТУРА

1. *Кунин И. А.* Теория дислокаций. Приложение к книге Я. А. Схоутена «Тензорный анализ для физиков». М., «Наука», 1965.
2. *Hashin Z.* Theory of mechanical behaviour of heterogeneous media. Appl. Mech. Revs., 1964, vol. 17, No. 1.
3. *Болотин В. В., Москаленко В. Н.* К расчету макроскопических постоянных сильно изотропных композитных материалов. Изв. АН СССР, МТТ, 1969, № 3.
4. *Хорошун Л. П.* К теории изотропного деформирования упругих тел со случайными неоднородностями. Прикл. механ., 1967, т. 3, вып. 9.
5. *Фокин А. Г., Шермергор Т. Д.* Вычисление эффективных упругих модулей композиционных материалов с учетом многочастичных взаимодействий. ПМТФ, 1969, № 1.
6. *Фокин А. Г.* Об использовании сингулярного приближения при решении задач статистической теории упругости. ПМТФ, 1972, № 1.
7. *Фокин А. Г.* О границах для эффективных упругих модулей неоднородных твердых тел. ПМТФ, 1973, № 5.