Прикладная математика и механика. Том 41, 1977

УДК 539.3

О ДЕЙСТВИИ НА УПРУГОЕ ПОЛУПРОСТРАНСТВО ДВИЖУЩЕЙСЯ ПО ЕГО ГРАНИЦЕ С ПОСТОЯННОЙ СКОРОСТЬЮ НОРМАЛЬНОЙ НАГРУЗКИ

В. А. Чурилов

(Москва)

Изучается действие на упругое изотропное полупространство нагрузки, приложенной нормально к его границе и движущейся с постоянной скоростью вдоль одной из координатных осей. В основу отыскания решений уравнений теории упругости в перемещениях в системе координат, связанной с движущейся нагрузкой, положен метод комплексных решений [1]. Однако возникающая при этом анизотропия упругих свойств среды недостаточна для прямого использования этого метода, поэтому вводятся дополнительные упругие параметры. Найденные при этом решения преобразованы затем для изотропной среды посредством предельного перехода упругих параметров к изотропным.

Получены формулы перемещений упругого полупространства при движении по его границе нормальной распределенной нагрузки, ограниченной эллипсом, сосредоточенной силы, системы сил, ограниченной любым замкнутым контуром.

1. Решения системы линейных дифференциальных уравнений второго порядка эллиптического типа. Рассмотрим в отсутствие массовых сил некоторую гипотетическую анизотропную среду, которая описывается следующей системой уравнений в прямоугольных координатах x, y, z:

$$(1.1)\qquad \begin{gathered}(1+k_2{}^2S)\frac{\partial^2 u_1}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u_1}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u_1}{\partial z^2}+p\frac{\partial^2 u_2}{\partial x\,\partial y}+p\frac{\partial^2 u_3}{\partial x\,\partial z}=0\\ p\frac{\partial^2 u_1}{\partial x\,\partial y}+\frac{\partial^2 u_2}{\partial x^2}+(1+S)\frac{\partial^2 u_2}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u_2}{\partial z^2}+S\frac{\partial^2 u_3}{\partial y\,\partial z}=0\\ p\frac{\partial^2 u_1}{\partial x\,\partial z}+S\frac{\partial^2 u_2}{\partial y\,\partial z}+\frac{\partial^2 u_3}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u_3}{\partial y^2}+(1+S)\frac{\partial^2 u_3}{\partial z^2}=0\end{gathered}$$

Здесь u_j ($j=1, 2, 3$) — компоненты перемещений материальных точек среды, k_2, S, p — положительные параметры, характеризующие упругие свойства среды и не зависящие от текущих координат.

Следуя методу, изложенному в работе [1], и опустив выкладки, можно получить решения

$$(1.2)\qquad u_j=\int_0^{2\pi}\operatorname{Re}\left[\sum_{k=1}^{3}\Delta_k^{(j)}\omega_k(\Omega_k)\right]d\theta,\quad j=1,2,3$$

Здесь

$$(1.3)\qquad \begin{gathered}\Delta_k^{(1)}=A_k^{(1)}l^3n_k,\quad \Delta_k^{(2)}=A_k^{(2)}l^2mn_k\\ \Delta_1^{(3)}=A_1^{(2)}l^2m^2n_1{}^2,\quad \Delta_{2,3}^{(3)}=A_{2,3}^{(2)}l^2n_{2,3}^2\end{gathered}$$

$$A_k^{(1)} = p(S_k - 1), \quad A_k^{(2)} = p^2 - k_2^2S^2 + S(S_k - 1) \tag{1.4}$$

$$n_k = i\sqrt{S_kl^2 + m^2}, \quad k = 1, 2, 3 \tag{1.5}$$

$$l = \cos\theta, \quad m = \sin\theta$$

$$S_1 = 1, \quad S_{2,3} = \frac{-M \mp \sqrt{M^2 - 4(1+S)(1+k_2^2S)}}{2(1+S)}$$

$$M = 2 + S + k_2^2 S + k_2^2S^2 - p^2$$

Функции ω_k, зависящие от аргумента

$$\Omega_k = xl + ym + n_kz \tag{1.6}$$

произвольны.

2. Нахождение решений для полупространства. Связь между напряжениями и деформациями выберем следующую:

$$\frac{\sigma_x}{\mu} = k_2(1+S)\frac{\partial u_1}{\partial x} + \frac{p-k_2}{k_2}\left(\frac{\partial u_2}{\partial y} + \frac{\partial u_3}{\partial z}\right) \tag{2.1}$$

$$\frac{\sigma_y}{\mu} = (p-k_2)\frac{\partial u_1}{\partial x} + (1+S)\frac{\partial u_2}{\partial y} + (S-1)\frac{\partial u_3}{\partial z}$$

$$\frac{\sigma_z}{\mu} = (p-k_2)\frac{\partial u_1}{\partial x} + (S-1)\frac{\partial u_2}{\partial y} + (1-S)\frac{\partial u_3}{\partial z}$$

$$\frac{\tau_{xy}}{\mu} = k_2\frac{\partial u_2}{\partial x} + \frac{\partial u_1}{\partial y}, \quad \frac{\tau_{yz}}{\mu} = \frac{\partial u_3}{\partial y} + \frac{\partial u_2}{\partial z}$$

$$\frac{\tau_{xz}}{\mu} = k_2\frac{\partial u_3}{\partial x} + \frac{\partial u_1}{\partial z}$$

Если на границу полупространства $z \geqslant 0$ действует осесимметричная нормальная нагрузка, а касательные напряжения отсутствуют, то исходя из (2.1) можно записать следующие граничные условия:

$$(p-k_2)\frac{\partial u_1}{\partial x} + (S-1)\frac{\partial u_2}{\partial y} + (1+S)\frac{\partial u_3}{\partial z} = \frac{\sigma_z(r)}{\mu} \tag{2.2}$$

$$\frac{\partial u_3}{\partial y} + \frac{\partial u_2}{\partial z} = 0, \quad k_2\frac{\partial u_3}{\partial x} + \frac{\partial u_1}{\partial z} = 0, \quad r = \sqrt{x^2+y^2}$$

Продифференцировав формулы (1.2) по x, y, z и подставив их в (2.2), получим систему уравнений

$$\int_0^{2\pi} \operatorname{Re}\sum_{k=1}^{3}\left[(p-k_2)\Delta_k^{(1)}l + (S-1)\Delta_k^{(2)}m + (1+S)\Delta_k^{(3)}n_k\right] \times$$
$$\times \frac{d\omega_k}{d\xi}d\theta = \frac{\sigma_z(r)}{\mu}$$

$$\int_0^{2\pi} \operatorname{Re}\sum_{k=1}^{3}\left[\Delta_k^{(3)}m + \Delta_k^{(2)}n_k\right]\frac{d\omega_k}{d\xi}d\theta = 0$$

$$\int_0^{2\pi} \operatorname{Re}\sum_{k=1}^{3}\left[k_2\Delta_k^{(3)}l + \Delta_k^{(1)}n_k\right]\frac{d\omega_k}{d\xi}d\theta = 0$$

$$\xi = xl + ym$$

Метод нахождения функций $d\omega_k / d\xi$ изложен в работах [2,3]. Опуская громоздкие выкладки, запишем окончательный результат

$$\frac{d\omega_k}{d\xi} = \frac{\Delta_k}{\Delta_0}\frac{d\Psi^+(\xi)}{d\xi}$$

Здесь

(2.3) $$\Delta_0 = A_1^{(2)}A_2^{(1)}A_3^{(2)}l^7\ mn_1n_2n_3\Delta$$

(2.4) $$\Delta = \frac{1}{\gamma}(1-f)[1+(4\gamma-1)a-(a-1)f]$$

$$\gamma = \frac{S}{1+S},\quad a = k_2^2l^2+m^2,\quad f=\sqrt{1+\gamma(a-1)}$$

(2.5) $$\Delta_1 = 2[A_2^{(2)}A_3^{(1)} - A_2^{(1)}A_3^{(2)}]\, l^5mn_2^2n_3^2$$

$$\Delta_2 = A_1^{(2)}[A_3^{(2)}k_2l^2 + A_3^{(1)}(m^2+1)]\, l^5mn_3^2$$

$$\Delta_3 = -A_1^{(2)}[A_2^{(2)}k_2l^2 + A_2^{(1)}(m^2+1)]\, l^5mn_2^2$$

(2.6) $$\frac{d\Psi^+(\xi)}{d\xi} = \frac{1}{2\pi\mu}\frac{d}{d\xi}\int_0^\xi \frac{r\sigma_z(r)\,dr}{\sqrt{\xi^2-r^2}}$$

Аналитически продолжив $d\Psi^+ / d\xi$ в область $z > 0$ по формуле Коши

$$\frac{d\Psi}{d\Omega_k} = \frac{1}{2\pi i}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{d\Psi^+(\xi)}{d\xi}\frac{d\xi}{\xi-\Omega_k}$$

и проинтегрировав по Ω_k, окончательно получим

(2.7) $$\omega_k(\Omega_k) = \frac{\Delta_k}{\Delta_0}\Psi(\Omega_k)$$

Подстановка (2.7) в (1.2) дает компоненты перемещений

(2.8) $$u_j = \int_0^{2\pi}\mathrm{Re}\left[\sum_{k=1}^{3}\frac{\Delta_k^{(j)}\Delta_k}{\Delta_0}\Psi(\Omega_k)\right]d\theta$$

Здесь $\Delta_k^{(j)}$, Δ_0, Δ_k определяются соответственно по формулам (1.3), (2.3), (2.5).

3. Решения для полупространства, когда упругий параметр p равен параметру k_2S. Получим решения системы (1.1), с граничными условиями (2.2), когда $p = k_2S$.

При рассмотрении выражений $\Delta_k^{(j)}\Delta_k / \Delta_0$ ($j, k = 1, 2, 3$), входящих в (2.8), можно выделить отношения $A_2^{(2)} / A_2^{(1)}$ и $A_3^{(1)} / A_3^{(2)}$, в которые входит параметр p. Если в эти отношения подставить (1.4) и раскрыть для первого из них неопределенность, когда p стремится к $k_2\ S$, получим

$$A_2^{(2)} / A_2^{(1)} = A_3^{(1)} / A_3^{(2)} = k_2$$

Таким образом, величины $\Delta_k^{(j)}\Delta_k / \Delta_0$ примут следующие значения:

(3.1) $$\frac{\Delta_1^{(1)}\Delta_1}{\Delta_0} = 0,\quad \frac{\Delta_2^{(1)}\Delta_2}{\Delta_0} = \frac{2k_2ln_3}{i\Delta}$$

$$\frac{\Delta_3^{(1)}\Delta_3}{\Delta_0} = -\frac{k_2l(a+1)}{\Delta},\quad \frac{\Delta_1^{(2)}\Delta_1}{\Delta_0} = -\frac{2(k_2^2-1)mn_3}{i\Delta}$$

$$\frac{\Delta_2^{(2)}\Delta_2}{\Delta_0} = \frac{2k_2^2 mn_3}{i\Delta}, \quad \frac{\Delta_3^{(2)}\Delta_3}{\Delta_0} = -\frac{m(a+1)}{\Delta}$$

$$\frac{\Delta_1^{(3)}\Delta_1}{\Delta_0} = -\frac{2(k_2^2-1)m^2 n_3}{\Delta}, \quad \frac{\Delta_2^{(3)}\Delta_2}{\Delta_0} = \frac{2k_2^2 n_3}{\Delta}$$

$$\frac{\Delta_3^{(3)}\Delta_3}{\Delta_0} = -\frac{n_3(a+1)}{\Delta}$$

Формулы (1.5) будут иметь вид

(3.2) $$n_1 = n_2 = i, \quad n_3 = if$$

$$S_1 = S_2 = 1, \quad S_3 = \frac{1+k_2^2 S}{1+S}$$

Подставив (3.1), (3.2) в (2.8) получим окончательно

(3.3) $$u_1 = \int_0^{2\pi} k_2 l \Psi_1(\theta)\, d\theta, \quad u_2 = \int_0^{2\pi} m \Psi_1(\theta)\, d\theta$$

$$u_3 = \int_0^{2\pi} \frac{f}{\Delta} [2a \operatorname{Re} i\Psi(\Omega_2) - (a+1) \operatorname{Re} i\Psi(\Omega_3)]\, d\theta$$

$$\Psi_1(\theta) = \frac{1}{\Delta} [2f \operatorname{Re} \Psi(\Omega_2) - (a+1) \operatorname{Re} \Psi(\Omega_3)]$$

4. Действие на полупространство нормальной нагрузки, распределенной по площади эллипса. *Пример 1.* Пусть D — область плоскости $z = 0$, ограниченная эллипсом с полуосями a_1, b. Нормальными напряжениями в точках $M(x, y, 0)$ границы полупространства зададимся в виде

(4.1) $$\sigma_z = \frac{k_2 P_z}{2\pi a_1 b}\left(1 - \frac{x^2}{a_1^2} - \frac{y^2}{b^2}\right)^{-1/2}, \quad M \in D$$

$$\sigma_z = 0, \quad M \overline{\in} D$$

Чтобы воспользоваться формулой (2.6), необходимо произвести замену переменных и представить первую формулу (4.1) в виде

(4.2) $$\sigma_z = \frac{k_2 P_z}{2\pi R_1 \sqrt{R_1^2 - r_1^2}}, \quad R_1 = \sqrt{a_1 b}, \quad r_1^2 = x_1^2 + y_1^2$$

$$x = \sqrt{\frac{a_1}{b}}\, x_1, \quad y = \sqrt{\frac{b}{a_1}}\, y_1$$

Подставив (4.2) в (2.6) найдем

$$\frac{d\Psi^+(\xi)}{d\xi_1} = -\frac{k_2 P_z}{8\pi^2 \mu R_1} \frac{d}{d\xi} \ln \frac{|\xi_1 - R_1|}{|\xi_1 + R_1|}$$

Аналитически продолжив $d\Psi^+(\xi_1) / d\xi_1$ в область $z > 0$ и проинтегрировав по Ω_k, получим

(4.3) $$\Psi(\Omega_k) = -\frac{k_2 P_z}{8\pi^2 \mu \sqrt{a_1 b}} \ln \frac{\Omega_k - \sqrt{a_1 b}}{\Omega_k + \sqrt{a_1 b}}$$

Под логарифмами понимаются их главные значения. На границе $z = 0$ соответственно получим

(4.4) $$\Psi^+(\xi) = -\frac{k_2 P_z}{8\pi^2 \mu \sqrt{a_1 b}} \left(\ln \frac{|\xi - \sqrt{a_1 b}|}{|\xi + \sqrt{a_1 b}|} + \delta\pi i\right)$$

$$\delta = \begin{cases} 1, & \xi \in D \\ 0, & \xi \overline{\in} D \end{cases}$$

Для отыскания перемещений в упругом полупространстве остается (4.3) подставить в формулы (3.3), в которых необходимо заменить l на $l\Delta_4^{-1}$, m на $m\Delta_4^{-1}$, $d\theta$ на $\Delta_4^{-2}d\theta$, где

$$\Delta_4^{-1} = \left(\frac{a_1}{b}l^2 + \frac{b}{a_1}m^2\right)^{-1/2}$$

Здесь дадим только окончательную формулу осадки границы полупространства в области действия нагрузки (4.1), вычисленную с помощью подстановки (4.4) в третью формулу из (3.3)

$$u_3(x, y) = \frac{k_2 P_z}{2\pi\mu\sqrt{a_1 b}} \int_0^{\pi/2} \frac{(1+f)f}{1+(4\gamma-1)a-(a-1)f}\frac{d\theta}{\Delta_4} \tag{4.5}$$

Пример 2. Рассмотрим действие нормальной равномерно распределенной нагрузки по площади круга в координатах (x_1, y_1).

Граничные условия

$$\sigma_z = \frac{k_2 P_z}{\pi R_1^2}, \quad r_1 < R_1 \tag{4.6}$$

$$\sigma_z = 0, \quad r_1 > R_1$$

Согласно (2.6) имеем

$$\frac{d\Psi^+(\xi_1)}{d\xi_1} = \frac{k_2 P_z \delta}{2\pi^2\mu R_1^2}$$

$$\delta = \begin{cases} 1, & |\xi_1| < R_1 \\ 1 - \dfrac{\xi_1}{\sqrt{\xi_1^2 - R_1^2}}, & |\xi_1| > R_1 \end{cases}$$

Аналитически продолжив $d\Psi^+(\xi_1)/d\xi_1$ в область $z > 0$, проинтегрировав по Ω_k и возвращаясь к старым переменным x, y по формулам в (4.2) получим

$$\Psi(\Omega_k) = -\frac{k_2 P_z}{2\pi^2\mu}\frac{1}{\Omega_k + \sqrt{\Omega_k^2 - a_1 b}} \tag{4.7}$$

Подставив (4.7) в (3.3), можно получить смещения точек полупространства. Приведем только формулу вертикального смещения

$$u_3(x, y, z) = -\frac{k_2 P_z}{2\pi^2\mu}\int_0^{2\pi}\frac{f}{\Delta}\operatorname{Re}\sum_{k=2}^{3}\frac{(-1)^k a(1+a^{2-k})}{\Omega_k + \sqrt{\Omega_k - a_1 b}}\, i d\theta \tag{4.8}$$

5. Действие на изотропное полупространство движущейся по его границе с постоянной скоростью нормальной нагрузки. Если в (1.1), (2.1) и (3.3) произвести замену $x = k_2 x_2$ и положить

$$p = k_2 S, \quad S = 1 + \frac{\lambda}{\mu}, \quad \frac{1}{k_i^2} = 1 - \frac{c^2}{c_i^2} \quad (i = 1, 2)$$

$$c_1 = \sqrt{\frac{\lambda + 2\mu}{\rho}}, \quad c_2 = \sqrt{\frac{\mu}{\rho}}, \quad c < c_2$$

где λ, μ, ρ — соответственно упругие постоянные Ляме и плотность среды, c_1, c_2 — скорости распространения продольных и поперечных волн, c — скорость движения поверхностной нагрузки, то (1.1) и (2.1) будут уравнениями теории упругости для изотропной среды в системе координат, связанной с движущейся нагрузкой, а формулы (3.3) будут их решениями для полупространства $z \geqslant 0$. Основываясь на этом рассуждении, получим из п. 4 некоторые результаты для изотропного полупространства в подвижных координатах.

Заменив в (4.1) и (4.5) x на k_2x_2, a_1 на k_2a_2, получим

$$\sigma_z = \frac{P_z}{2\pi a_2 b}\left(1 - \frac{x_2^2}{a_2^2} - \frac{y^2}{b^2}\right)^{-1/2}, \quad M \in D \tag{5.1}$$

$$\sigma_z = 0, \qquad M \overline{\in} D$$

$$u_3(x_2, y) = \frac{k_2 P_z}{2\pi\mu\sqrt{a_2 b}}\int_0^{\pi/2} \frac{(1+f)f}{1 + (4\gamma - 1)a - (a-1)f}\,\frac{d\theta}{\Delta_4} \tag{5.2}$$

$$\Delta_4 = \left(\frac{k_2^2 a_2}{b} l^2 + \frac{b}{a_2} m^2\right)^{1/2}$$

Как видно из (5.2), подынтегральная функция зависит только от $a = k_2^2 l^2 + m^2$, поэтому интеграл оказывается постоянным. Следовательно, движущаяся нагрузка (5.1) в области ее действия дает постоянную осадку.

Когда нагрузка равномерно распределена по области D плоскости $z = 0$, ограниченной эллипсом с полуосями a_2, b, формулы (4.6) и (4.8) примут следующий вид:

$$\sigma_z = \frac{P_z}{\pi a_2 b}, \quad M(x_2, y, 0) \in D \tag{5.3}$$

$$\sigma_z = 0, \quad M(x_2, y, 0) \overline{\in} D$$

$$u_3(x_2, y, z) = -\frac{k_2 P_z}{2\pi^2\mu}\int_0^{2\pi} \frac{f}{\Delta}\sum_{k=2}^{3} \frac{(-1)^k a(1 + a^{2-k})}{\Omega_k + \sqrt{\Omega_k^2 - k_2 a_2 b}}\, i d\theta$$

6. Действие движущейся с постоянной скоростью нормальной сосредоточенной силы на границу упругого полупространства. Если в подынтегральном выражении формулы (5.3) $a_2 b$ устремить к нулю, затем выделить вещественную часть и одновременно избавиться от иррациональности в знаменателе, то можно получить следующий результат:

$$u_3(x_2, y, z) = -\frac{k_2 P_z}{4\pi^2\mu}\int_0^{2\pi}\sum_{k=2}^{3} \frac{(-1)^k a(1 + a^{2-k}) f^{k-1} z L(\theta)\, d\theta}{(k_2^2 x_2^2 + S_k z^2) + 2k_2 x_2 y l m + (y^2 + z^2) m^2} \tag{6.1}$$

$$L(\theta) = \frac{(a+1)^2 + 4af}{(a-1)[a^3 + (5 - 16\gamma)a^2 - 5a - 1]}$$

Этот интеграл при $z = 0$ можно взять с помощью вычетов. Введем новую переменную t по формулам

$$l = \frac{t^2 + 1}{2t}, \quad m = \frac{t^2 - 1}{2it}, \quad d\theta = \frac{dt}{it} \tag{6.2}$$

Тогда

(6.3) $$u_3(x_2, y, z) = \frac{k_2 P_z}{2\pi\mu} i \sum [\operatorname{res} F_2(t) + \operatorname{res} F_3(t)]$$

(6.4) $$F_k(t) = $$
$$= \frac{(-1)^k a(1 + a^{2-k}) f^{k-1} L(\theta) 4izt}{[(k_2x_2 - iy)^2 + (S_k - 1)z^2]t^4 + 2(r_2^2 + S_k z^2)t^2 + (k_2x_2 + iy)^2 + (S_k - 1)z^2}$$
$$k = 2, 3$$
$$a = \frac{(k_2^2 - 1)t^4 + 2(k_2^2 + 1)t^2 + (k_2^2 - 1)}{4t^2}, \quad r_2^2 = k_2^2 x_2^2 + y^2 + z^2$$

Особыми точками функций (6.4) являются

(6.5) $$t = \pm\sqrt{\frac{-r_2^2 - z^2 \pm 2zr_2}{(k_2x_2 - iy)^2}}$$

(6.6) $$t = \pm\sqrt{\frac{-r_2^2 - S_3z^2 \pm 2\sqrt{S_3}zr_1}{(k_2x_2 - iy)^2 + (S_3 - 1)z^2}}$$
$$r_1 = \sqrt{k_1^2 x_2^2 + y^2 + z^2}$$

(6.7) $$t = \pm\sqrt{-1 + 2\beta \pm 2\sqrt{\beta^2 - \beta}}, \quad \beta = \frac{a_p - 1}{k_2^2 - 1}$$

где a_p $(p = 1,2,3,4)$ — корни уравнений
$$a - 1 = 0, \quad a^3 + (5 - 16\gamma)a^2 - 5a - 1 = 0$$

Вычеты функций (6.4) на плоскости $z = 0$ относительно особых точек (6.7) равны нулю. Остается найти вычеты функций (6.4) соответственно относительно простых полюсов (6.5) и (6.6), которые расположены внутри круга $|t| < 1$, причем в (6.5) и (6.6) под радикалами нужно оставить только знак плюс, так как при $z \geqslant 0$ $|t_i| < 1$ $(i = 1,2,3,4)$. Пользуясь известной формулой
$$\operatorname*{res}_{t=t_0} f(t) = \frac{p(t_0)}{g'(t_0)}, \quad g'(t_0) \neq 0, \quad f(t) = \frac{p(t)}{g(t)}$$
получим

(6.8) $$\operatorname*{res}_{t=t_1} F_2(t) = \operatorname*{res}_{t=t_2} F_2(t) = -\frac{af}{16\gamma r_2}\frac{i}{\Delta}$$

(6.9) $$\operatorname*{res}_{t=t_3} F_3(t) = \operatorname*{res}_{t=t_4} F_3(t) = \frac{(a+1)f^2}{32\gamma r_1\sqrt{S_3}}\frac{i}{\Delta}$$

где Δ определяется по формуле (2.4).

На плоскости $z = 0$ все полюсы совпадают, т. е.

(6.10) $$t = \frac{ir_2}{k_2x_2 - iy}$$

Подставляя (6.10) в (6.2), будем иметь следующие соотношения:

(6.11) $$a = \frac{k_2^2 r^2}{r_2^2}, \quad f^2 = \frac{S_3 r_1^2}{r_2^2}, \quad a - 1 = \frac{(k_2^2 - 1)y^2}{r_2^2}$$
$$1 - f = -\frac{\gamma(k_2^2 - 1)y^2}{r_2(r_2 + r_1\sqrt{S_3})}, \quad 1 + f = \frac{r_2 + r_1\sqrt{S_3}}{r_2}$$
$$\frac{2af}{r_2} - \frac{(a+1)f^2}{r_1\sqrt{S_3}} = \frac{(k_2^2 - 1)y^2 r_1\sqrt{S_3}}{r_2^4}, \quad S_3 = \frac{k_2^2}{k_1^2}$$

Подставляя удвоенные результаты (6.8) и (6.9) с учетом (6.11) в правую часть формулы (6.3) и проведя необходимые преобразования, получим окончательно осадку граничной поверхности упругого полупространства в подвижной системе координат

(6.12) $$u_3(x_2, y) = \frac{k_2 P_z}{2\pi\mu} \frac{(1+A)A}{4\gamma B + (1-B)(1+A)} \frac{1}{r_2}$$

$$\gamma = \frac{\lambda+\mu}{\lambda+2\mu}, \quad A = \frac{r_1}{r_2}\frac{k_2}{k_1}, \quad B = \frac{k_2^2(x^2+y^2)}{r_2^2}$$

$$r_1 = \sqrt{k_1^2 x_2^2 + y^2}, \quad r_2 = \sqrt{k_2^2 x_2^2 + y^2}$$

Следует отметить, что оценка вертикального смещения, данная в [4], близка к точному смещению по формуле (6.12), когда скорость прилагаемой силы меньше скорости волн Рейли.

Если на упругое полупространство действует система сил $P_z = q(\xi_2, \eta_1)\, d\Omega$, то осадка в области Ω (x_2, y)

(6.13) $$u_3(x_2, y) = \iint_\Omega K(x_2 - \xi_2, y - \eta_1)\, q(\xi_2, \eta_1)\, d\xi_2 d\eta_1$$

Здесь

$$K(x_2 - \xi_2, y - \eta_1) = \frac{k_2(1+A)A}{2\pi\mu\,[4\gamma B + (1-B)(1+A)]} \frac{1}{r_2}$$

$$A = \frac{k_2}{k_1}\sqrt{\frac{k_1^2(x_2-\xi_2)^2 + (y-\eta_1)^2}{k_2^2(x_2-\xi_2)^2 + (y-\eta_1)^2}}, \quad B = \frac{k_2^2[(x_2-\xi_2)^2 + (y-\eta_1)^2]}{k_2^2(x_2-\xi_2)^2 + (y-\eta_1)^2}.$$

Рассмотрим пример. Пусть на границу полупространства действует нагрузка вида

$$q(\xi_2, \eta_1) = \frac{P_z}{2\pi R^2}\left(1 - \frac{\xi_2^2 + \eta_1^2}{R^2}\right)^{-1/2}$$

Вычислим осадку от этой нагрузки в точке $x_2 = y = 0$. Для этого перейдем к полярной системе координат

$$\xi_2 = \rho\cos\varphi, \qquad \eta_1 = \rho\sin\varphi$$

Тогда из (6.13) следует

(6.14) $$u_3(0,0,0) = \frac{P_z}{4\pi^2\mu R^2}\int_0^R \left(1 - \frac{\rho^2}{R^2}\right)^{-1/2} d\rho \int_0^{2\pi} \frac{AB^{1/2}(1+A)\,d\varphi}{4\gamma B + (1-B)(1+A)}$$

$$A = \frac{k_2}{k_1}\frac{\sqrt{k_1^2\cos^2\varphi + \sin^2\varphi}}{\sqrt{k_2^2\cos^2\varphi + \sin^2\varphi}}, \quad B = \frac{k_2^2}{k_2^2\cos^2\varphi + \sin^2\varphi}$$

Перейдем от полярной координаты φ к другой посредством замены

$$\operatorname{tg}\varphi = k_2 \operatorname{ctg}\theta$$

Из этого соотношения будем иметь

$$\cos^2\varphi = \frac{m^2}{a}, \quad \sin^2\varphi = \frac{k_2^2 l^2}{a}, \quad d\varphi = -\frac{k_2 d\theta}{a}$$

Подставляя эти формулы и

$$\int_0^R \left(1 - \frac{\rho^2}{R^2}\right)^{-1/2} d\rho = \frac{\pi R}{2}$$

в (6.14), получим

$$u_3(0,0,0) = \frac{k_2 P_z}{2\pi\mu R} \int_0^{\pi/2} \frac{(1+f)f}{1+(4\gamma-1)a-(a-1)f} \frac{d\theta}{\sqrt{a}}$$

Этот результат совпадает с формулой (5.2), если в ней положить $a_2 = b = R$.

Поступила 16 III 1976

ЛИТЕРАТУРА

1. *Свекло В. А.* Упругие колебания анизотропного тела. Уч. зап. ЛГУ, 1949, вып. 17.
2. *Свекло В. А.* Задачи типа Буссинеска для анизотропного полупространства. ПММ, 1964, т. 28, вып. 5.
3. *Свекло В. А.* Действие штампа на упругое анизотропное полупространство. ПММ, 1970, т. 34, вып. 1.
4. *Eason G.* The stresses produced in semi-infinite solid by a moving surface force. Internat. J. Engng. Sci., 1965, vol. 2, No. 6.