Прикладная математика и механика. Том 41, 1977

УДК 62—50

АСИМПТОТИЧЕСКИЕ РЕШЕНИЯ НЕКОТОРЫХ ЗАДАЧ ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ ВЕРОЯТНОСТЬЮ

А. С. Братусь

(Москва)

Рассматривается задача оптимального управления стохастической динамической системой с целью максимизации вероятности попадания в фиксированное множество в конечный момент времени. Предполагается, что множество представляет собой сферу малого радиуса. Строится нерегулярное асимптотическое разложение по степеням малого параметра—радиуса сферы. Каждый член этого разложения находится в явном аналитическом виде. Найден приближенный синтез оптимального управления. Доказаны оценки погрешности предложенного метода. Приведены примеры.

Ранее (см. [1], гл. 7), изучалась задача о вероятности попадания управляемой фазовой точки в малую фиксированную окрестность случайно движущейся точки на всем интервале времени движения. По использованным методам данная работа примыкает к [2-5].

1. Постановка задачи. Пусть управляемое движение описывается системой уравнений

$$dx/dt = A(t)x + B(x, t)u + C(t)\xi(t), \quad x(t_0) = x_0 \tag{1.1}$$

Здесь x — n-мерный вектор фазовых координат, u — m-мерный вектор управляющих воздействий, $\xi(t)$ — вектор случайных возмущений, действующих на систему размерности n. $A(t)$, $B(x, t)$, $C(t)$ — матрицы размерности $n \times n$, $n \times m$ и $n \times n$ соответственно с элементами, гладко зависящими от t и x. Предполагается, что матрица $C(t)$ — невырожденная при $t \in [t_0, T]$. Вектор случайных возмущений является гауссовским белым шумом единичной интенсивности.

На управляющие воздействия наложены ограничения

$$u \in U \tag{1.2}$$

где U — заданное ограниченное компактное множество в R^m. Предполагается, что в любой момент времени $t \in [t_0, T]$ возможно точное измерение фазового вектора $x(t)$ системы (1.1).

Требуется найти способ управления $u \in U$, максимизирующий вероятность попадания фазового вектора $x(t)$ в конечный момент времени T на множество

$$R_\varepsilon = \{x;\ (x_1^2 + \ldots x_n^2)^{1/2} \leqslant \varepsilon\} \tag{1.3}$$

Будем считать, что радиус сферы R_ε, задаваемый числом ε, достаточно мал.

Замечание 1. Если элементы матрицы $A(t)$ гладко зависят от $t \in [t_0, T]$, то заменой переменных система (1.1) сводится к системе

$$dx_1/dt = B(x_1, t)u + C(t)\xi(t), \quad x_1(t_0) = x_{1,0}$$

Поэтому, не умаляя общности, можно считать, что в (1.1) $A(t) \equiv 0$.

Рассмотрим функцию Беллмана $S(x, t)$ задачи (1.1) — (1.3), равную максимальному значению вероятности попадания на множество R_ε при условии, что процесс начинается в момент t при фазовом векторе $x(t) = x$.

Уравнение Беллмана для функции S имеет вид [2–4]

$$S_\tau = \max_u H(x, \tau, S_x, u) + {}^1/_2 \operatorname{Sp}(C_1C_1'S_{xx}) \tag{1.4}$$

$$\operatorname{Sp}(C_1C_1'S_{xx}) = \sum_{i,j=1}^n c_{ij}(\tau) S_{x_ix_j}$$

Здесь $T - t = \tau$ — обратное время, S_τ — частная производная по τ, S_x — вектор первых частных производных, S_{xx} — матрица вторых частных производных функций S по компонентам вектора x, через C_1 и B_1 обозначены матрицы, получаемые из матриц C и B при замене $t = T - \tau$.

В силу невырожденности матрицы C для всех $\tau \in [0, T]$ справедливо неравенство

$$0 < \sum_{i,j=1}^n c_{ij}(\tau)\lambda_i\lambda_j \leqslant d_0|\lambda|^2, \quad |\lambda| \neq 0, \quad d_0 = \mathrm{const} \tag{1.5}$$

В момент T окончания процесса, соответствующий значению $\tau = 0$, функция S удовлетворяет граничному условию

$$S(x, 0) = \begin{cases} 1, & x \in R_\varepsilon \\ 0, & x \notin R_\varepsilon \end{cases} \tag{1.6}$$

В итоге задача (1.1) — (1.3) о нахождении синтеза оптимального управления сводится к решению задачи Коши для нелинейного параболического уравнения (1.4) с краевым условием (1.6) в предположении, что решение уравнения (1.4) с (1.6) существует и единственно. Точное описание класса таких задач можно найти в монографии [6]. Оптимальное управление определяется после нахождения функции S из условия достижения максимума в (1.4).

2. Метод этого параметра. Введем новые переменные

$$z_i = x_i/\varepsilon, \quad i = 1, 2, \ldots, n \tag{2.1}$$

Уравнение (1.4) и условие (1.6) примут вид

$$A(S; u) = -\varepsilon^2 S_\tau + \varepsilon \max_u H(z\varepsilon, \tau, S_z, u) + \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^n c_{ij}(\tau) S_{z_iz_j} = 0 \tag{2.2}$$

$$S(z, 0) = \psi(z) = \begin{cases} 1, & z \in R_1 \\ 0, & z \notin R_1, \end{cases} \quad R_1 = \{z; (z_1^2 + \ldots z_n^2)^{1/2} \leqslant 1\}$$

Замечание 2. К такой же математической задаче приводится задача оптимального управления системой при наличии погрешностей измерения фазового вектора $x(t)$, а также задача о максимизации вероятности попадания в фиксированную область в момент времени $t = T$, если интенсивность гауссовских белых шумов в (1.1) — величина порядка ε^{-1} или если возможности управления оказываются малыми [5].

Предположим, что существует такое число $\alpha \geqslant 0$, что выполнится соотношение

$$H(z\varepsilon, \tau, S_z, u) = \varepsilon^\alpha H^\varepsilon(z, \tau, S_z, u)$$

причем функция H^ε ограничена при всех $\varepsilon > 0$ и конечных значениях своих аргументов

$$H^\varepsilon(z, \tau, S_z, u) = \varepsilon^\alpha \sum^n u_i \sum_{j=1}^n b_{ij}^\varepsilon(z, \tau) S_{z_j}, \quad b_{ij}^\varepsilon = \varepsilon^{-\alpha} b(z\varepsilon, \tau)$$

Обозначим через $L^\varepsilon(S)$ дифференциальный оператор

$$L^\varepsilon(S) = -\varepsilon^2 S_\tau + \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^n c_{ij}(\tau) S_{z_i z_j} \tag{2.3}$$

Будем искать приближенное решение задачи (2.2) в виде суммы двух функций

$$S^\circ(z, \tau; \varepsilon) + \varepsilon^{1+\alpha} S^1(z, \tau; \varepsilon) \tag{2.4}$$

Функцию S° найдем, решая краевую задачу

$$L^\varepsilon(S^\circ) = 0, \quad S^\circ|_{\tau=0} = S|_{\tau=0} = \psi(z) \tag{2.5}$$

Функция S^1 находится как решение задачи

$$L^\varepsilon(S^1) + \max_u H^\varepsilon(z, \tau, S_z^\circ, u) = 0, \quad S^1|_{\tau=0} = 0 \tag{2.6}$$

Выше будет показано, что в некоторых случаях имеет смысл искать приближенное решение задачи (2.2) в виде

$$S^\circ(z, \tau; \varepsilon) + \ldots \varepsilon^{j(1+\alpha)} S^j(z, \tau; \varepsilon) \tag{2.7}$$

где функции S^k $(k = 2, 3, \ldots j)$ находятся рекуррентным способом из решения краевых задач

$$L^\varepsilon(S^k) + \max_u H^\varepsilon(z, \tau, S_z^{k-1}, u) = 0, \quad S^k|_{\tau=0} = 0 \tag{2.8}$$

Определим функции $v^\circ, v^1, \ldots$ из U соотношениями

$$\max_u H^\varepsilon(z, \tau, S_z^j, u) = H^\varepsilon(z, \tau, S_z^j, v^j), \quad j = 0, 1, 2, \ldots \tag{2.9}$$

Решение каждой из краевых задач (2.5), (2.8) можно получить в явном аналитическом виде. Для этого достаточно записать фундаментальное решение уравнения (2.5)

$$p^\varepsilon(z-\lambda, \tau) = \varepsilon^n |C_0|^{-1}(2\pi)^{-n/2}\exp\left\{-\frac{\varepsilon^2}{2}\left[\sum_{i,j=1}^n c_0^{ij}(\tau)(z_i-\lambda_i)(z_j-\lambda_j)\right]\right\}$$

Здесь $c_0^{ij}(\tau)$ — элементы матрицы, обратной по отношению к матрице $\| c_{ij}^\circ \|$, которая определяется формулой

$$c_{ij}^\circ = \int_0^\tau c_{ij}(\tau_1)\, d\tau_1$$

Функция S° находится в результате свертки по переменной z

$$S^\circ(z, \tau; \varepsilon) = p^\varepsilon(z, \tau) * S^\circ(z, 0; \varepsilon) = \int_{|\lambda| \leqslant 1} p^\varepsilon(z-\lambda, \tau)\, d\lambda \tag{2.10}$$

Функции S^k, $k = 1, 2, \ldots j$ определяются формулой

$$(2.11)\qquad S^k(z, \tau; \varepsilon) = \int_0^\tau\int H^\varepsilon(\lambda, \tau_1, S_\lambda^{k-1}(\lambda, \tau_1; \varepsilon)v^{k-1})p^\varepsilon(z-\lambda, \tau-\tau_1)\,d\lambda d\tau_1$$
$$d\lambda = d\lambda_1\ldots d\lambda_n$$

интегрирование по λ в (2.11) производится по R^n.

Отметим некоторые свойства функций $S^k = 0, 1, 2, \ldots$.

Лемма. Пусть коэффициенты b_{ij}^ε линейной формы H^ε удовлетворяют неравенству

$$(2.12)\qquad |b_{ij}^\varepsilon(z, \tau)| \leqslant b_0(1 + b(\varepsilon)|z|^2), \quad b_0, b(\varepsilon) = \mathrm{const}$$

Тогда справедливы оценки

$$(2.13)\qquad |D^l S^0| \leqslant M_0\,\varepsilon^{|l|}\tau^{-(n+|l|)/2}\exp\{-\varepsilon^2\gamma_0|z|^2/\tau\}, \quad |l| \leqslant 2$$
$$D^l = \frac{\partial^{|l|}}{\partial z_i^{l_1}\partial z_j^{l_2}}, \quad l_1 = l_2 + |l|$$

$$(2.14)\qquad |D^l S^k| \leqslant M_k\,\varepsilon^{k+|l|}\exp\{-\gamma_k\varepsilon^2|z|^2/(\tau+\delta_k) + \varepsilon^2\mu_k\tau\}$$
$$|l| \leqslant 1, \quad k = 1, 2, \ldots, j$$

с некоторыми постоянными M_k, γ_k, δ_k и μ_k.

Доказательство. Производные по переменной z от фундаментального решения p^ε краевой задачи (2.5) удовлетворяют ([7], стр. 27) оценкам

$$|D^l p^\varepsilon(z-\lambda, \tau)| \leqslant \varepsilon^{|l|}\tau^{-|l|/2}m\varepsilon^n\tau^{-n/2}\exp\{-\gamma\varepsilon^2|z-\lambda|^2/\tau\}, \quad |l| \leqslant 2$$

с некоторыми постоянными m и γ, зависящими от коэффициентов $c_{ij}(\tau)$ в последнем соотношении (1.4). Поэтому

$$|D^l S^0| \leqslant \varepsilon^{|l|}\tau^{-|l|/2}I(z, \tau, \varepsilon)$$

где

$$I(z, \tau, \varepsilon) = m\varepsilon^n\tau^{-n/2}\int_{|\lambda|\leqslant 1}\exp\left\{\frac{-\gamma\varepsilon^2|z-\lambda|^2}{\tau}\right\}d\lambda$$

Справедливо равенство

$$I(z, \tau, \varepsilon) = m\varepsilon^n\tau^{-n/2}\exp\left\{\frac{-\varepsilon^2\gamma|z|^2}{\tau}\right\}\times$$
$$\times\int_{|\lambda|\leqslant 1}\exp\left\{-\varepsilon^2\gamma\left(|\lambda|^2 - 2\sum_{i=1}^n\frac{\lambda_i z_i}{\tau}\right)\right\}d\lambda$$

При $|\lambda| \leqslant 1$ максимальное значение формы

$$\sum_{i=1}^n \lambda_i z_i$$

равно

$$\sum_{i=1}^n |z_i|$$

отсюда при $|z| > 4$

$$I(z, \tau, \varepsilon) \leqslant M_0' \exp\left\{-\varepsilon^2\gamma\left(|z|^2 - 2\sum_{i=1}^{n}\frac{|z_i|}{\tau}\right)\right\} \leqslant$$

$$\leqslant M_0' \exp\left\{-\frac{\varepsilon^2\gamma|z|^2}{2\tau}\right\}$$

Здесь M_0' — постоянная, такая, что $I(0, \tau, \varepsilon) \leqslant M_0'$

С другой стороны, при $|z| \leqslant 4$, $\tau \in [0, T]$ интеграл $I(z, \tau, \varepsilon)$ как функция от z и τ, ε является ограниченной. Поэтому можно выбрать такую постоянную $M_0 > M_0'$, чтобы выполнялось неравенство (2.13).

Докажем неравенство (2.14) при $k = 1$ для функции S^1. В силу неравенства (2.12) и (2.13) справедлива оценка

$$|H^\varepsilon(z, \tau, S_z^\circ, v^\circ)| \leqslant K_1 \varepsilon\tau^{-1/2} \exp\{-\varepsilon^2 \gamma_0 |z|^2 / \tau\}, \quad K_1 = \text{const}$$

Покажем сначала, что функция S^1 и ее первые производные по z ограничены на множестве $|z| = 0$ при всех τ. Используя неравенство (2.13) из (2.11) получим, что

$$|S_{z_l}^1| \leqslant \int_0^\tau\int \sum_{i=1}^{m} |v_i^\circ| \sum_{j=1}^{n} |b_{ij}^\varepsilon(\lambda, \tau_1)\| S_{\lambda_j}^\circ(\lambda, \tau; \varepsilon)\| \times$$

$$\times P_{z_l}^\varepsilon(z - \lambda, \tau - \tau_1)|\, d\lambda d\tau_1 \leqslant$$

$$\leqslant K_2\varepsilon \int_0^\tau\int \tau_1^{-1/2}(\tau - \tau_1)^{-1/2} \varepsilon^n (\tau - \tau_1)^{-n/2} \exp\left\{\frac{-\gamma\varepsilon^2|z - \lambda|}{(\tau - \tau_1)}\right\} d\lambda d\tau,$$

$l = 1, 2, \ldots, n$

Так как

$$\varepsilon^n(\tau - \tau_1)^{-n/2}\int \exp\left\{\frac{-\gamma\varepsilon^2|z - \lambda|^2}{(\tau - \tau_1)}\right\} d\lambda \leqslant K_3 \quad \text{при} \quad |z| = 0$$

то справедливо неравенство с постоянной $K_4 = K_3K_2$

$$|S_{z_l}^1(0, \tau; \varepsilon)| \leqslant K_4\varepsilon \int_0^\tau \tau_1^{-1/2}(\tau - \tau_1)^{-1/2} d\tau_1, \quad l = 1, 2, \ldots, n$$

Положим $\tau_2 = \tau_1 / \tau$. Последний интеграл с точностью до постоянной примет вид

$$I_1 = \int_0^1 \tau_2^{-1/2}(1 - \tau_2)^{-1/2} d\tau_2$$

Это выражение является эйлеровым интегралом первого рода (бета-функция), которое может быть выражено через гамма-функции Эйлера

$$I_1 = \frac{[\Gamma(1/2)]^2}{\Gamma(1)} = \frac{\pi}{4}$$

В итоге получим, что функции $S_{z_l}^1$ ($l = 1, \ldots, n$) ограничены при $|z| = 0$ и $\tau \in [0, T]$.

Положим $S^1 = \varepsilon w \exp\{-\varepsilon^2 \gamma_0 |z|^2 / [d_1(\tau + \delta_1)] + \varepsilon^2\mu_1\tau\}$, где d_1, δ_1 и μ_1 — постоянные, которые будут выбраны далее. Из (2.7) получим, что для функции w справедливы соотношения

$$L^\varepsilon(w) + L^\varepsilon_1(w) + f_1(z,\tau,\varepsilon)\,w + \varepsilon^{-1}\exp\{+\varepsilon^2\gamma_0|z|^2/ \tag{2.15}$$
$$/[d_1(\tau+\delta_1)] - \varepsilon^2\mu_1\tau\}\,H^\varepsilon(z,\tau,S_z^\circ,v^\circ) = 0,\quad w|_{\tau=0} = 0$$

Здесь

$$L_1^\varepsilon(w) = -\frac{2\varepsilon^2\gamma_0}{d_1(\tau+\delta_1)}\sum_{i,j=1}^{n} c_{ij}(\tau)(z_j w_{z_i} + z_i w_{z_j})$$

$$f_1(z,\tau,\varepsilon) = \frac{4\varepsilon^4\gamma_0^2}{[d_1(\tau+\delta_1)]^2}\sum_{i,j=1}^{n} c_{ij}z_i z_j - \frac{\varepsilon^2\gamma_0|z|^2}{d_1(\tau+\delta_1)^2} - \tag{2.16}$$
$$-\frac{2\varepsilon^2\gamma_0}{d_1(\tau+\delta_1)}\sum_{i=1}^{n} c_{ii}(\tau) - \mu\varepsilon^2$$

Так как выполняется неравенство (1.5), то, выбирая постоянную $d_1 = 5d_0$ и $\mu_1 = 2c_0\gamma_0 / 5d_0\delta_1$, где c_0 — постоянная, такая, что

$$\Big|\sum_{i=1}^{n} c_{ii}(\tau)\Big| \leqslant c_0$$

получим, что функция $f_1(z,\tau,\varepsilon) < 0$ для всех z и τ. Это позволяет применить к уравнению (2.15) принцип максимума [8] для параболических уравнений на множестве $|z| \geqslant \varepsilon_0 > 0$, $\tau \in [0, T]$. Если число ε_0 достаточно мало, то в силу непрерывности на множестве $|z| < \varepsilon_0$ функция w, как показано выше, является ограниченной $|w| \leqslant K_5$, $K_5 \geqslant \pi K_4 / 4$. На множестве $|z| \geqslant \varepsilon_0$, $\tau \in [0, T]$ из принципа максимума следует, что функция w ограничена и выполняется неравенство (2.14) при $|l| = 0$. Выберем теперь постоянную $M_1 > K_5$ и число δ_1 так, чтобы $\delta_1 \geqslant \varepsilon^2\gamma_0 / /5d_0(\ln M_1 - \ln K_5)$, тогда неравенство (2.14) остается справедливым для всех z и τ с $\gamma_1 = \gamma_0 / d_1$ при $|l| = 0$.

Для того чтобы получить оценку (2.14) для производной функции S^1, необходимо продифференцировать уравнение (2.6) по переменной z и еще раз повторить использованные выше аргументы. При этом однократное дифференцирование по z увеличивает порядок оценки (2.14) по ε на единицу. Оценки для функций S^k, $k = 2, \ldots, j$ получаются аналогичным способом с использованием оценки (2.14) при $|l| = 1$.

3. Оценка погрешности приближенного решения. Приближенный синтез оптимального управления. Обозначим $W^1 = S^\circ + \varepsilon^{(1+\alpha)}S^1$, где S° и S^1 — функции, полученные по формулам (2.10) и (2.11) в результате решения краевых задач (2.5), (2.6). Здесь α — положительное число, определенное ранее в п. 2. Оценим погрешность, задаваемую функцией W^1.

Теорема 1. Пусть выполняется условие (2.12). Тогда для функции W^1 справедлива оценка,

$$|S - W^1| \leqslant K\tau\varepsilon^{4+2\alpha}\exp\{-\varepsilon^2\gamma_1|z|^2/(\tau+\delta_1) + \varepsilon^2\mu_1\tau\} \tag{3.1}$$

Здесь S — функция, являющаяся решением уравнения Беллмана (2.2); γ_1, δ_1, μ_1 — постоянные, фигурирующие в (2.14), K — постоянная.

Доказательство. Положим $S = W^1 + \omega$. Учитывая обозначения (2.2) — (2.4), получим, что

$$0 = A(S; u) = A(S^\circ + \varepsilon^{1+\alpha} S^1 + \omega; u) = L^\varepsilon(S^\circ) + \\ + \varepsilon^{1+\alpha} L^\varepsilon(S^1) + L^\varepsilon(\omega) + \varepsilon^{1+\alpha} \max_u H^\varepsilon(z, \tau, S_z^\circ + \varepsilon^{1+\alpha} S_z^1 + \omega_z; u)$$

Так как

$$\max_u H^\varepsilon(z, \tau, S_z^\circ + \varepsilon^{1+\alpha} S_z^1 + \omega_z; \; u) \leqslant H^\varepsilon(z, \tau, S_z^\circ, \; v^\circ) + \\ + \varepsilon^{1+\alpha} H^\varepsilon(z, \tau, S_z^1, v^1) + \max_u H^\varepsilon(z, \tau, \omega_z, u)$$

v°, v^1 — функции, определенные соотношениями (2.8), то справедливо неравенство

(3.2) $$0 = A(S; \; u) \leqslant L^\varepsilon(S^\circ) + \varepsilon^{1+\alpha} [L^\varepsilon(S^1) + H^\varepsilon(z, \tau, S_z^\circ, v^\circ)] + \\ + \varepsilon^{2(1+\alpha)} H^\varepsilon(z, \tau, S_z^1, v^1) + A(\omega; u)$$

В силу (2.5) и (2.6) из (3.2) следует, что

(3.3) $$A(\omega; u) + \varepsilon^{2(1+\alpha)} H^\varepsilon(z, \tau, S_z^1 v^1) \geqslant 0$$

Используя оценку (2.17) с $|l| = 1$, получим, что справедливо неравенство

(3.4) $$| H^\varepsilon(z, \tau, S_z^1, v^1) | \leqslant K\varepsilon^2 g_1(z, \tau, \varepsilon) \\ g_1(z, \tau, \varepsilon) = \exp\{-\varepsilon^2 \gamma_1 | z |^2 / (\tau + \delta_1) + \varepsilon^2 \mu_1 \tau\}$$

Положим $\omega = \omega_1 + K\tau\varepsilon^{4+2\alpha} g_1(z, \tau, \varepsilon)$, тогда

(3.5) $$A(\omega; u) + \varepsilon^{2(1+\alpha)} H^\varepsilon(z, \tau, S_z^1, v^1) \leqslant A(\omega_1; \; u^1) + f_2(z, \tau, \varepsilon) + \\ + K \varepsilon^{4+2\alpha} g_1(z, \tau, \varepsilon)$$

Здесь u^1 — функция из U, такая, что

$$\max_u H^\varepsilon(z, \tau, \omega_{1,z}, u) = H^\varepsilon(z, \tau, \omega_{1,z}, u^1)$$

$$f_2(z, \tau, \varepsilon) = f_1(z, \tau, \varepsilon) g_1(z, \tau, \varepsilon) + \max_u H^\varepsilon(z, \tau, g_{1,z}, u) - \\ - K\varepsilon^{4+2\alpha} g_1(z, \tau, \varepsilon)$$

Функция f_1 определена равенством (2.16).

Аналогично тому, как это сделано в лемме при доказательстве оценки (2.14), можно показать, что $f_2(z, \tau, \varepsilon) + K\varepsilon^{4+2\alpha} g_1(z, \tau, \varepsilon) < 0$ для всех z, τ и $\varepsilon > 0$. Поэтому из (3.4) и (3.5) вытекает неравенство

$$A(\omega_1; u^1) \geqslant 0, \quad \omega_1 |_{\tau=0} = 0$$

Применим еще раз принцип максимума [8] к параболическому оператору $A(\omega_1; u^1)$, получим, что $\omega_1 \leqslant 0$. Отсюда следует неравенство

(3.6) $$S - W^1 \leqslant K\tau\varepsilon^{4+2\alpha} g_1(z, \tau, \varepsilon)$$

С другой стороны, пусть u^* — оптимальное управление исходной задачи, тогда справедливо

(3.7) $$0 = A(S; u^*) \geqslant A(S; v^\circ)$$

Здесь v° — функция, полученная из (2.9) при $j = 0$. Используя равенство (2.5) и (2.6), получим, что справедливо

(3.8) $$A(W^1; v^\circ) - \varepsilon^{2(1+\alpha)} H^\varepsilon(z, \tau, S_z^1, v^\circ) = 0$$

Из (3.6) и (3.8) следует неравенство

(3.9) $$A\,(W^1 - S;\ v^\circ) - \varepsilon^{2(1+\alpha)} H^\varepsilon\,(z, \tau, S_z^{\ 1}, v^\circ) \geqslant 0$$

Рассмотри функцию $\omega_2 = W^1 - S - K\tau\varepsilon^{4+2\alpha}\, g_1\,(z, \tau, \varepsilon)$, где K — постоянная из (3.4). Тогда выполняется равенство

$$A\,(W^1 - S;\ v^\circ) = A\,(\omega_2;\ v^\circ) + f_2\,(z, \tau, \varepsilon)$$

Так же, как и ранее, можно показать, что $f_2\,(z, \tau, \varepsilon) + K\varepsilon^{4+2\alpha}\, g_1\,(z, \tau, \varepsilon) \leqslant 0$ для всех z, τ и $\varepsilon > 0$, поэтому, учитывая неравенство (3.4), из (3.9) получим, что

$$A\,(\omega_2;\ v^\circ) \geqslant 0, \quad \omega_2\,|_{\tau=0} = 0$$

Снова применяя принцип максимума, получим, что

(3.10) $$W^1 - S \leqslant K\tau\varepsilon^{4+2\alpha}\, g_1\,(z, \tau, \varepsilon)$$

Из (3.6) и (3.10) следует (3.1).

Замечание 3. Условие (2.12) на коэффициенты формы H^ε необходимо для применения принципа максимума [8].

Следствие 1. Пусть вместо неравенства (2.12) выполняется неравенство

(3.11) $$|\, b_{ij}^\varepsilon(z, \tau)\,| \leqslant b_0\tau^{1/2}\,[1 + b\,(\varepsilon)\,|\, z\,|^2), \quad b_0, \quad b\,(\varepsilon) = \mathrm{const}$$

Тогда справедлива оценка

(3.12) $$|\, S - S^\circ\,| \leqslant K_0\,\tau\varepsilon^{2+\alpha} \exp\,\{-\varepsilon^2\gamma_0\,|\, z\,|^2 / (\tau + \delta_0) + \varepsilon^2\mu_0\tau\}$$

с постоянными γ_0, δ_0 и μ_0 и с некоторой постоянной K_0.

Доказательство оценки (3.12) аналогично доказательству оценки (3.1) Вместо неравенства (3.4) необходимо использовать неравенство

$$|\, H^\varepsilon\,(z, \tau, S_z{}^\circ v^1)\,| \leqslant K_0\,\varepsilon \exp\,\{-\varepsilon^2\gamma_0\,|\, z\,|^2 / \tau\}$$

которое следует из (2.13) при $|\, l\,| = 1$ из неравенства (3.11).

Замечание 4. Можно показать [9], что при $\varepsilon^n\tau^{-n/2} \to 0$ функция S°, представляющая функционал неуправляемого движения, убывает как величина, пропорциональная $\varepsilon^n\tau^{-n/2}$. При малых значениях τ, таких, что $\tau^{n/2}\varepsilon^{-n} \to 0$, функция S° — величина порядка единицы, поскольку выполняется граничное условие $S^\circ\,(z, 0;\ \varepsilon) = \psi\,(z)$. Оценка (2.13) поэтому является более слабой при $\varepsilon^n\tau^{-n/2} \to 0$ и $n > 2$, однако она учитывает асимптотику при $|\, z\,| \to \infty$, что важно для вывода оценки (3.1) в предположении (2.12). Асимптотика $\varepsilon^n\tau^{-n/2}$ потребовала бы от коэффициентов формы H^ε условия типа $|\, b_{ij}^\varepsilon\,(z, \tau)\,| \leqslant b\,(\varepsilon)\tau^{n/2}$, которое является более узким, чем условия (2.12) и (3.11).

Теорема 1 показывает, что функция W^1 хорошо аппроксимирует функцию Беллмана S исходной задачи. Однако в некоторых случаях можно использовать и следующие приближения.

Следствие 2. Пусть справедливо условие теоремы 1 и выполняется тождество

(3.13) $$v^\circ \equiv v^1 \equiv \ldots v^j, \qquad j = 1, 2, 3, \ldots$$

Здесь функции v^j, $j = 0, 1, \ldots$ определяются из соотношений (2.9). Тогда для функции $W^j = S^0 + \varepsilon^{1+\alpha}S^1 + \ldots \varepsilon^{j(1+\alpha)}S^j$, полученной при решении краевых задач (2.5) — (2.8), справедлива оценка

(3.14) $$|S - W^j| \leqslant K_j\tau\varepsilon^{(j+1)(2+\alpha)}\exp\{-\varepsilon^2\gamma_j|z|^2/(\tau+\delta_j)+\varepsilon^2\mu_j\tau\}$$

с постоянной K_j и постоянными γ_j, δ_j и μ_j из оценки (2.14).

Доказательство. Рассмотрим функции $\omega_j = S - W^j$. Аналогично неравенству (3.2) получим

$$0 = A(S; u) \leqslant L^\varepsilon(S^0) + \sum_{i=1}^{j-1}\varepsilon^{i(1+\alpha)}[L^\varepsilon(S^j) + H^\varepsilon(z, \tau, S^i, v^i)] +$$
$$+\varepsilon^{j(1+\alpha)}H^\varepsilon(z, \tau, S_z^j, v^j) + A(\omega_j; u)$$

В силу (2.6) — (2.9) получим неравенство

$$A(\omega_j; u) + \varepsilon^{j(1+\alpha)}H^\varepsilon(z, \tau, S_z^j, v^j) \geqslant 0$$

Отсюда аналогично (3.5) получим неравенство

$$S - W^j \leqslant K_j\tau\varepsilon^{(j+1)(2+\alpha)}g_j(z, \tau, \varepsilon)$$

где K_j — постоянная, существование которой гарантируется неравенством (2.14)

$$|H^\varepsilon(z, \tau, S_z^j, v^j)| \leqslant K_j\varepsilon^{j+1}g_j(z, \tau, \varepsilon)$$

Функция $g_j(z, \tau, \varepsilon)$ определяется аналогично функции g_1. Второе неравенство вытекает из (3.7) и соотношения

$$A(W^j; v^c) - \varepsilon^{j(1+\alpha)}H^\varepsilon(z, \tau, S_z^j, v^c) = 0$$

справедливого при выполнении условия (3.11) и равенств (2.6) — (2.9).

Построенные асимптотические приближения W^1, W^j, $j = 2, 3, \ldots$ не отвечают на вопрос о том, каким должен быть синтез оптимального управления исходной задачи.

Покажем, что управление v^0, найденное из соотношения (2.9) при $j = 0$, близко к оптимальному в смысле близости соответствующих функционалов.

Через G обозначим функцию, являющуюся решением краевой задачи

(3.15) $$A(G; v^0) = 0, \quad G|_{\tau=0} = \psi(z)$$

Теорема 2. Пусть выполняется условие (2.12). Тогда справедлива оценка

$$0 \leqslant S - G \leqslant 2K\tau\varepsilon^{4+2\alpha}\exp\{-\varepsilon^2\gamma_1|z|^2/(\tau+\delta_1)+\varepsilon^2\mu_1\tau\}$$

с постоянными K, γ_1, δ_1 и μ_1 из (3.1).

Доказательство. Из неравенства (3.7) и равенства (3.15) следует, что

(3.16) $$S - G \geqslant 0$$

С другой стороны, используя (3.8) и (3.15), получим, что

$$A(W^1 - G; v^0) - \varepsilon^{2(1+\alpha)}H^\varepsilon(z, \tau, S_z^1, v^0) = 0$$

Так же, как и при доказательстве неравенства (3.10), получим, что

(3.17) $$W^1 - G \geqslant K\tau\varepsilon^{4+2\alpha}g_1(z, \tau, \varepsilon)$$

Из (3.16), (3.8) следует (3.15)

$$0 \leqslant S - G = (S - W^1) + (W^1 + G) \leqslant 2K\tau\varepsilon^{4+2\alpha}g_1(z, \tau, \varepsilon)$$

Следствие 3. Пусть выполняются тождества (3.13) и справедливо неравенство (2.12). Тогда выполняется оценка

$$0 \leqslant S - G \leqslant 2K_j\tau\varepsilon^{(j+1)(2+\alpha)} \exp\{-\varepsilon^2\gamma_j\,|z|^2/(\tau+\delta_j) + \varepsilon^2\mu_j\tau\}$$

Замечание 5. Полученные результаты остаются справедливыми и в том случае, когда множество R_ε является параллелепипедом со сторонами, кратными значению ε, либо полосой шириной ε. В последнем случае замену переменных (2.1) необходимо производить лишь по части переменных.

Пример. Пусть управляемое движение материальной точки описывается уравнением

$$d^2y/dt^2 = u + \xi, \quad |u| \leqslant 1, \quad t \in [0, T], \quad y(0) = y_0, \quad y^{\cdot}(0) = y_0^{\cdot}$$

ξ — гауссовский белый шум единичной интенсивности. Ищется синтез оптимального управления, максимизирующий вероятность попадания в момент $t = T$ на множество $|y| \leqslant \varepsilon$, и само значение этой вероятности. Положим $y = (T - t)x^{\cdot} + x$, тогда

$$\frac{dx}{dt} = (T-t)(u+\xi), \quad |u| \leqslant 1, \quad t \in [0, T], \quad x(0) = x_0$$

Функционал конечного состояния при такой замене не меняется, поскольку $y(T) = x(T)$.

Уравнение Беллмана и краевое условие с учетом замены (2.1) принимают вид

$$\varepsilon^2 S_\tau = \varepsilon\tau\,|S_z| + \frac{1}{2}\tau^2 S_{zz}, \qquad S(z, 0) = \begin{cases} 1, & |z| \leqslant 1 \\ 0, & |z| > 1 \end{cases}$$

Согласно (2.5) и (2.6) найдем функции S° и S^1, а также управление v°

$$S^\circ(z, \tau; \varepsilon) = \frac{\varepsilon}{\sqrt{2\pi\tau}} \int\limits_{|\lambda| \leqslant 1} \exp\left\{\frac{\varepsilon^2(z-\lambda)^2}{2\tau}\right\} d\lambda$$

$$v^\circ = \operatorname{sign} S_z^\circ = \operatorname{sign}\{\exp(-\varepsilon^2(z+1)^2/2\tau)[1 - \exp(\varepsilon^2 z/\tau)]\} = \begin{cases} -1, & z > 0 \\ +1, & z < 0 \end{cases}$$

$$S^1(z, \tau, \varepsilon) = \frac{\varepsilon^2}{2\pi} \int\limits_0^\tau \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{\tau_1^{1/2}}{\sqrt{\tau - \tau_1}} \exp\left\{\frac{-\varepsilon^2(\lambda+1)^2}{2\tau_1}\right\}\left[1 - \exp\left\{\frac{\varepsilon^2\lambda}{\tau_1}\right\}\right] \times$$
$$\times \exp\left\{\frac{-\varepsilon^2(z-\lambda)^2}{2}(\tau - \tau_1)\right\} d\lambda\, d\tau$$

Для рассмотренного случая найдем значения постоянных, используемых в лемме и теореме 1

$$M_0 = M_1 = (2\pi)^{-1/2}\exp\{-3\varepsilon^2\}, \quad \gamma_0 = 3/8$$

$$K_2 = K_3 = K_4 = 1, \quad K_5 = \sqrt{\pi}/2\Gamma(3/2), \quad d_0 = c_0 = 1$$

Постоянную K выберем так, чтобы $K > \max\{K_5; M_0\}$, тогда $\delta_1 \geqslant 3\varepsilon^2/40(\ln K - \ln K_5)$, $\mu = 3/20\delta_1$, $\gamma_1 = \gamma_0/5 = 3/40$.

Из теоремы 1 вытекает справедливость оценки

$$|S - (S^\circ + \varepsilon S^1)| \leqslant K\tau\varepsilon^4 \exp\{-3\varepsilon^2|z|^2/40(\tau + \delta_1) + 3\varepsilon^2\tau/20\delta_1\}$$

Поступила 24 II 1976

ЛИТЕРАТУРА

1. *Понтрягин Л. С., Болтянский В. Г., Гамкрелидзе Р. В., Мищенко Е. Ф.* Математическая теория оптимальных процессов. М., Физматгиз, 1961.
2. *Солянин А. И., Черноусько Ф. Л.* Приближенный метод синтеза оптимального управления системой, подверженной случайным возмущениям. ПММ, 1972, т. 36, вып. 5.
3. *Братусь А. С.* Метод приближенного решения уравнения Беллмана для задач оптимального управления системой, подверженной случайным возмущениям. ПММ, 1975, т. 39, вып. 2.
4. *Братусь А. С.* Метод малого параметра для построения приближенных стратегий одного класса дифференциальных игр. ПММ, 1975, т. 39, вып. 6.
5. *Черноусько Ф. Л.* Некоторые задачи оптимального управления с малым параметром. ПММ, 1968, т. 32, вып. 1.
6. *Ладыженская О. А., Солонников В. А., Уральцева Н. Н.* Линейные и квазилинейные уравнения параболического типа. М., «Наука», 1967.
7. *Эйдельман С. Д.* Параболические системы. М., «Наука», 1964.
8. *Ильин А. М., Калашников А. С., Олейник О. А.* Линейные уравнения второго порядка параболического типа. Успехи матем. наук, 1962, т. 17, вып. 3.
9. *Nash J.* Continuity of solutions of parabolic and elliptic equations. Amer. J. Math., 1958, vol. 80, No. 4.