Прикладная математика и механика. Том 41, 1977

УДК 539.3

О ПЛОСКОЙ ЗАДАЧЕ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ ДЛЯ ПОЛУПОЛОСЫ

М. И. Гусейн-Заде

(Москва)

В связи с построением уточненной теории пластинок и оболочек асимптотическим методом [1–6] возникает вопрос о плоской задаче теории упругости для полуполосы. При асимптотическом подходе область пластинки (оболочки) вблизи края (или других линий возмущения) выделяется в особое рассмотрение. Для определения напряженного состояния в этой области необходимо принять во внимание напряженное состояние погранслоя, которое быстро затухает при удалении от края. Построение погранслоя [4–6] сводится к итерационному процессу, на каждом этапе которого следует решать плоскую и антиплоскую задачи теории упругости для полуполосы. Причем на первом этапе нужно решать однородные уравнения при однородных граничных условиях для напряжений на продольных кромках и при различных условиях на краю. На последующих этапах потребуются решения плоской и антиплоской задач теории упругости для полуполосы при заданных объемных силах и при заданных напряжениях на продольных кромках.

В [7] рассмотрен вопрос о необходимых и достаточных условиях существования затухающих решений плоской задачи теории упругости для полуполосы со свободными продольными кромками при отсутствии объемных сил.

Ниже дается обобщение результатов [7] на случай, когда на полуполосу действуют объемные силы, а на продольных кромках заданы напряжения.

1. Перейдем к решению указанной выше задачи для полуполосы. Условимся считать, что величины размерности длины отнесены к полутолщине h полуполосы, а объемные силы — к h^{-1}.

Рассмотрим полуполосу $0 \leqslant x < \infty$, $-1 \leqslant y \leqslant 1$. Пусть на краю $x = 0$ заданы условия

$$\sigma_x(0, y) = f_1(y), \quad \sigma_{xy}(0, y) = f_2(y) \quad \text{(задача 1)} \tag{1.1}$$

$$2\mu u(0, y) = f_1(y), \quad \sigma_{xy}(0, y) = f_2(y) \quad \text{(задача 2)} \tag{1.2}$$

$$\sigma_x(0, y) = f_1(y), \quad 2\mu v(0, y) = f_2(y) \quad \text{(задача 3)} \tag{1.3}$$

$$2\mu u(0, y) = f_1(y), \quad 2\mu v(0, y) = f_2(y) \quad \text{(задача 4)} \tag{1.4}$$

Как и в [7], будем раздельно рассматривать кососимметричную и симметричную деформации полуполосы. Граничные условия на продольных кромках для всех четырех задач имеют вид

$$\sigma_x(x, 1) = g_1(x), \quad \sigma_{xy}(x, 1) = g_2(x) \tag{1.5}$$

Установим необходимые и достаточные условия, налагаемые на краевые функции $f_1(y)$, $f_2(y)$, при выполнении которых решение неоднородных уравнений Ламе

$$(1.6)\qquad (\lambda+2\mu)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\mu\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+(\lambda+\mu)\frac{\partial^2 v}{\partial x\,\partial y}=-r_x(x,y)$$

$$\mu\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}+(\lambda+2\mu)\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}+(\lambda+\mu)\frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y}=-r_y(x,y)$$

удовлетворяющее заданным условиям (1.5) на продольных границах, имеет затухающий характер в направлении оси x.

Для краевых функций, отвечающих условиям затухания, построим затухающее решение задачи.

Относительно функций в правых частях (1.5) и (1.6) предположим, что они затухают в направлении оси x по экспоненциальному закону.

Решение уравнений (1.6) будем рассматривать в классе затухающих функций.

Для построения решения уравнений (1.6) воспользуемся преобразованием Лапласа по переменной x. Положим

$$(1.7)\qquad U(p,y)=\int_0^\infty u(x,y)\,e^{-px}\,dx,\qquad V(p,y)=\int_0^\infty v(x,y)\,e^{-px}\,dx$$

Для $U(p,y)$, $V(p,y)$ получим неоднородную систему обыкновенных уравнений

$$(1.8)\qquad (\lambda+2\mu)p^2U+\mu\frac{\partial^2 U}{\partial y^2}+(\lambda+\mu)p\frac{\partial V}{\partial y}=\Phi(p,y)$$

$$\mu p^2V+(\lambda+2\mu)\frac{\partial^2 V}{\partial y^2}+(\lambda+\mu)p\frac{\partial U}{\partial y}=\Psi(p,y)$$

$$\Phi(p,y)=-R_x(p,y)+\sigma_x(0,y)+\mu\left.\frac{\partial v}{\partial y}\right|_{x=0}+(\lambda+2\mu)pu(0,y)$$

$$\Psi(p,y)=-R_y(p,y)+\sigma_{xy}(0,y)+\lambda\left.\frac{\partial u}{\partial y}\right|_{x=0}+\mu pv(0,y)$$

Здесь $R_x(p,y)$, $R_y(p,y)$ — изображения $r_x(0,y)$, $r_y(0,y)$.

Общее решение (1.8) имеет вид

$$(1.9)\qquad U(p,y)=a_1(p)\sin py+a_2(p)\cos py+ \\ +a_3(p)\,py\cos py+a_4(p)\,py\sin py+U_0(p,y)$$

$$V(p,y)=(-a_2(p)-\varkappa_1a_4(p))\sin py+ \\ +(a_1(p)-\varkappa_1a_3(p))\cos py+a_4(p)\,py\cos py- \\ -a_3(p)\,py\sin py+V_0(p,y)$$

где $U_0(p,y)$, $V_0(p,y)$ — частное решение уравнений (1.9). Причем

$$(1.10)\qquad U_0(p,y)=b_1(p,y)\sin py+b_2(p,y)\cos py+ \\ +b_3(p,y)\,py\cos py+b_4(p,y)\,py\sin py$$

$$V_0(p,y)=(-b_2(p,y)-\varkappa_1b_4(p,y))\sin py+(b_1(p,y)- \\ -\varkappa_1b_3(p,y))\cos py+b_4(p,y)\,py\cos py-b_3(p,y)\,py\sin py$$

$$(1.11)\qquad b_1(p,y)=\frac{\varkappa}{p}\int_{y_1}^{y}[\Psi(p,y)\,py\cos py+ \\ +\Phi(p,y)(\varkappa_1\cos py-py\sin py)]\,dy$$

$$b_2(p, y) = \frac{\varkappa}{p}\int\limits_{y_2}^{y} [-\Psi(p, y)\, py \sin py -$$
$$-\Phi(p, y)(\varkappa_1 \sin py + py \cos py)]\, dy$$

$$b_3(p, y) = \frac{\varkappa}{p}\int\limits_{y_1}^{y} [\Psi(p, y)\sin py + \Phi(p, y)\cos py]\, dy$$

$$b_4(p, y) = \frac{\varkappa}{p}\int\limits_{y_2}^{y} [-\Psi(p, y)\cos py + \Phi(p, y)\sin py]\, dy$$

$$\varkappa_1 = \frac{\lambda + 3\mu}{\lambda + \mu}, \quad \varkappa = \frac{\lambda + \mu}{2\mu(\lambda + 2\mu)}$$

В условиях (1.5) выразим напряжения через смещения и применим преобразование Лапласа. Получим

$$(1.12) \qquad -\lambda u(0,1) + \lambda p U(p, 1) + (\lambda + 2\mu)\frac{\partial V}{\partial y}\Big|_{y=1} = G_1(p)$$
$$-\mu v(0,1) + \mu p V(p, 1) + \mu\frac{\partial U}{\partial y}\Big|_{y=1} = G_2(p)$$

Здесь $G_1(p)$, $G_2(p)$ — изображения функций $g_1(x)$, $g_2(x)$.

2. Рассмотрим сначала кососимметричную деформацию полуполосы. Тогда в (1.9) $a_2(p)$, $a_4(p)$ равны нулю, а в (1.11) $y_1 = -1$, $y_2 = 0$. Определяя $a_1(p)$, $a_3(p)$ из (1.12), получим

$$(2.1) \qquad a_1(p) = \frac{1}{p\varphi(p)}\left\{\frac{1}{2\mu}(G_1(p) + \lambda u(0,1))\left(\frac{\mu}{\lambda+\mu}\cos p + p\sin p\right) + \right.$$
$$+ \frac{1}{2\mu}(G_2(p) + \lambda v(0,1))\left(\frac{\lambda+2\mu}{\lambda+\mu}\sin p - p\cos p\right) +$$
$$\left. + pb_2(p, 1)\left(\frac{\mu}{\lambda+\mu} + \sin^2 p\right) + pb_4(p, 1)\left(\frac{\mu(\lambda+2\mu)}{(\lambda+\mu)^2} + p^2\right)\right\}$$
$$a_3(p) = \frac{1}{p\varphi(p)}\left\{\frac{1}{2\mu}(G_1(p) + \lambda u(0,1))\cos p + \frac{1}{2\mu}(G_2(p) + \lambda v(0,1)) \times \right.$$
$$\left. \times \sin p + pb_2(p, 1) + pb_4(p, 1)\left(\frac{\mu}{\lambda+\mu} + \cos^2 p\right)\right\}$$
$$\varphi(p) = \sin p\cos p - p$$

В выражения для $U(p, y)$, $V(p, y)$ входят изображения $G_1(p)$, $G_2(p)$, $R_x(p, y)$, $R_y(p, y)$ заданных функций и величины $u(0, y)$, $v(0, y)$, $\sigma_x(0, y)$, $\sigma_{xy}(0, y)$. Среди последних для каждой из четырех задач (1.1) — (1.4) две величины известны из краевых условий на торце, а две другие неизвестны. Вопрос об их определении будет рассмотрен впоследствии.

В плоскости комплексного переменного p функции $U(p, y)$, $V(p, y)$ могут иметь особенности в корнях уравнения $\varphi(p) = 0$ и в особых точках $G_1(p)$, $G_2(p)$, $R_x(p, y)$, $R_y(p, y)$. Поскольку функции $g_1(x)$, $g_2(x)$, $r_x(x, y)$, $r_y(x, y)$ в направлении оси x затухают по экспоненциальному закону, то их изображения не имеют особенностей в начале координат и в правой полуплоскости.

Уравнение $\varphi(p) = 0$ имеет корень третьего порядка в начале координат $p = 0$ и бесконечное множество четверок комплексных корней первого порядка p_n, $\bar{p}_n$, $-\bar{p}_n$, $-p_n$ $(n = 1, 2, \ldots)$.

Так как $u(x, y)$, $v(x, y)$ относятся к классу затухающих функций, то их изображения не должны иметь особенностей, расположенных в правой полуплоскости, включая и мнимую ось. Для этого необходимо и достаточно, чтобы вычеты $U(p, y)e^{px}$, $V(p, y)e^{px}$ относительно полюсов p_n, $\bar{p}_n$ с положительной действительной частью и относительно полюса $p = 0$ обращались в нуль.

Вычеты $U(p, x)e^{px}$, $V(p, x)e^{px}$ относительно полюса $p = p_n$ равны

(2.2) $$\operatorname{res}_{p_n} U(p, y)e^{px} = \frac{\varkappa}{2p_n \sin^2 p_n}(F(p_n) + H(p_n))\,h(p_n, y)\,e^{p_n x}$$

$$\operatorname{res}_{p_n} V(p, y)e^{px} = \frac{\varkappa}{2p_n \sin^2 p_n}(F(p_n) + H(p_n))\,g(p_n, y)\,e^{p_n x}$$

где

(2.3) $$F(p_n) = \int_0^1 [\sigma_x(0, y)\,h(p_n, y) + \sigma_{xy}(0, y)\,g(p_n, y) + 2\mu u(0, y)\,s(p_n, y) + 2\mu v(0, y)\,t(p_n, y)]\,dy.$$

$$H(p_n) = -\frac{\lambda+2\mu}{\lambda+\mu}\left[\cos p_n \int_0^\infty g_1(x)\,e^{-p_n x}\,dx + \sin p_n \int_0^\infty g_2(x)\,e^{-p_n x}\,dx\right] - \int_0^1 \left[h(p_n, y)\int_0^\infty r_x(x, y)\,e^{-p_n x}\,dx + g(p_n, y)\int_0^\infty r_y(x, y)\,e^{-p_n x}\,dx\right]dy$$

$$h(p, y) = py\cos py + \left(\frac{\lambda+2\mu}{\lambda+\mu} - \cos^2 p\right)\sin py$$

$$g(p, y) = py\sin py + \left(\frac{\mu}{\lambda+\mu} + \cos^2 p\right)\cos py$$

$$s(p, y) = p\,(py\cos py + (1 + \sin^2 p)\sin py)$$

$$t(p, y) = p\,(py\sin py - \sin^2 p\cos py)$$

Вычеты $U(p, y)\,y^{px}$, $V(p, y)\,e^{px}$ относительно полюса $p = 0$ равны[1]

(2.4) $$\operatorname{res}_{p=0} Ue^{px} = -\left[\left(3x^2 + \frac{6}{5} - \frac{3\lambda+8\mu}{\lambda+2\mu}\,y^2\right)A_1 + 2xA_2 + A_3\right]y$$

$$\operatorname{res}_{p=0} Ve^{px} = \left[\left(x^2 - \frac{6(9\lambda+8\mu)}{5(\lambda+2\mu)} + \frac{3\lambda}{5(\lambda+2\mu)}\,y^2\right)xA_1 + \left(x^2 + \frac{2}{5} + \frac{\lambda}{\lambda+2\mu}\,y^2\right)A_2 + A_3 x + A_4\right.$$

$$A_1 = -\frac{\lambda+2\mu}{8\mu(\lambda+\mu)}\left(\int_0^1 \sigma_{xy}(0, y)\,dy - \alpha\right)$$

$$A_2 = -\frac{3(\lambda+2\mu)}{8\mu(\lambda+\mu)}\left(\int_0^1 y\sigma_x(0, y)\,dy - \beta\right)$$

$$A_3 = -\frac{3}{2\mu}\left(\frac{\lambda}{4(\lambda+\mu)}\int_0^1 y^2\sigma_{xy}(0, y)\,dy + 2\mu\int_0^1 yu(0, y)\,dy - \gamma\right)$$

---

[1] В [7] допущена неточность в выражении для вычетов $U(p, y)e^{px}$, $V(p, y)e^{px}$ относительно полюса $p = 0$: не полностью выписаны коэффициенты при A_1, A_2, что не повлияло на последующие результаты.

$$A_4 \quad \frac{3}{4\mu}\left(\frac{3\lambda+4\mu}{6(\lambda+\mu)}\int_0^1 y^3\sigma_x(0, y)\,dy + 2\mu\int_0^1 (1-y^2)\,v(0, y)\,dy - \delta\right)$$

Величины α, β, γ, δ определяются через заданные значения $g_1(x)$, $g_2(x)$, $r_x(x, y)$, $r_y(x, y)$ по формулам

$$\alpha = \int_0^\infty \left(g_1(x) + \int_0^1 r_y(x, y)\,dy\right)dx \tag{2.5}$$

$$\beta = \int_0^\infty \left[-xg_1(x) + g_2(x) + \int_0^1 (yr_x(x, y) - xr_y(x, y))\,dy\right]dx$$

$$\gamma = \frac{\lambda+2\mu}{4(\lambda+\mu)}\int_0^\infty \left\{\left(\frac{\lambda}{\lambda+2\mu} + x^2\right)g_1(x) - 2xg_2(x) + \right.$$

$$\left. + \int_0^1 \left[-2xyr_x(x, y) + \left(x^2 + \frac{\lambda}{\lambda+2\mu}y^2\right)r_y(x, y)\right]dy\right\}dx$$

$$\delta = \frac{\lambda+2\mu}{2(\lambda+\mu)}\int_0^\infty \left\{\left(-\frac{3\lambda+4\mu}{\lambda+2\mu} + \frac{1}{3}x^2\right)xg_1(x, y) + \right.$$

$$+ \left(\frac{3\lambda+4\mu}{3(\lambda+2\mu)} - x^2\right)g_2(x, y) + \int_0^1 \left[\left(-x^2 + \frac{3\lambda+4\mu}{3(\lambda+2\mu)}y^2\right)yr_x(x, y) + \right.$$

$$\left.\left. + \left(-\frac{4(\lambda+\mu)}{\lambda+2\mu} + \frac{1}{3}x^2 + \frac{\lambda}{\lambda+2\mu}y^2\right)xr_y(x, y)\right]dy\right\}dx$$

Из (2.2), (2.4) следует, что для обращения в нуль вычетов $U(p, y)\,e^{px}$, $V(p, y)\,e^{px}$ относительно полюсов с положительной действительной частью и относительно полюса $p = 0$, необходимо и достаточно выполнение условий

$$F(p_n) + H(p_n) = 0 \quad (n = 1, 2, \ldots) \tag{2.6}$$

$$A_i = 0 \quad (i = 1, 2, 3, 4) \tag{2.7}$$

Систему условий (2.7) можно представить в виде

$$\int_0^1 \sigma_{xy}(0, y)\,dy = \alpha \tag{2.8}$$

$$\int_0^1 y\sigma_x(0, y)\,dy = \beta \tag{2.9}$$

$$\frac{\lambda}{4(\lambda+\mu)}\int_0^1 y^2\sigma_{xy}(0, y)\,dy + 2\mu\int_0^1 yu(0, y)\,dy = \gamma \tag{2.10}$$

$$\frac{3\lambda+4\mu}{6(\lambda+\mu)}\int_0^1 y^3\sigma_x(0, y)\,dy + 2\mu\int_0^1 (1-y^2)\,v(0, y)\,dy = \delta \tag{2.11}$$

Для каждой из четырех задач (1.1) — (1.4) система условий (2.6), (2.8) — (2.11) позволяет определить те из величин $u(0, y)$, $v(0, y)$, $\sigma_x(0,$

y), σ_{xy} $(0, y)$, которые неизвестны из краевых условий при $x = 0$, и получить два условия, налагаемые на краевые функции, которые необходимы и достаточны для существования затухающего решения.

Для перехода от изображений $U(p, y)$, $V(p, y)$ (2.1) к оригиналам $u(x, y)$, $v(x, y)$ представим $U(p, y)$, $V(p, y)$ в виде суммы двух слагаемых

$$U(p, y) = U^{(1)}(p, y) + U^{(2)}(p, y), \quad V(p, y) = V^{(1)}(p, y) + V^{2}(p, y) \tag{2.12}$$

Слагаемые $U^{(1)}(p, y)$, $V^{(1)}(p, y)$ соответствуют изображениям для смещений в полуполосе при отсутствии объемных сил и напряжений на продольных кромках. В слагаемые $U^{(2)}(p, y)$, $V^{(2)}(p, y)$ входят изображения объемных сил и напряжений при $y = \pm 1$.

При нахождении оригиналов для $U^{(1)}(p, y)$, $V^{(1)}(p, y)$ используем теорему обращения, а для $U^{(2)}(p, y)$, $V^{(2)}(p, y)$ — теорему свертывания, теорему обращения и теорему об интегрировании по параметру. В результате получим

$$u(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} (u^*(-p_n, x, y) + u^*(-\bar{p}_n, x, y)) \tag{2.13}$$

$$v(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} (v^*(-p_n, x, y) + v^*(-\bar{p}_n, x, y))$$

$$u^*(-p_n, x, y) = \frac{\lambda+\mu}{4\mu(\lambda+2\mu)}\frac{1}{p_n \sin^2 p_n}[F(-p_n)e^{-p_n x} + K(-p_n, x)]\, h(p_n, y)$$

$$v^*(-p_n, x, y) = \frac{\lambda+\mu}{4\mu(\lambda+2\mu)}\frac{1}{p_n \sin^2 p_n}[F(-p_n)e^{-p_n x} + K(-p_n, x)]\, g(p_n, y)$$

Значения $F(-p_n)$ даны в (2.3), а для $K(-p_n, x)$ имеем

$$K(-p_n, x) = \int_0^x \left\{\frac{\lambda+2\mu}{\lambda+\mu}(-\cos p_n g_1(\xi) + \sin p_n g_2(\xi)) - \int_0^1 [-h(p_n, y) r_x(\xi, y) + g(p_n, y) r_y(\xi, y)]\, dy\right\} e^{-p_n(x-\xi)} d\xi \tag{2.14}$$

Выражения (2.13) для смещений содержат неизвестные пока величины, которые входят в $F(-p_n)$ и $F(-\bar{p}_n)$. Вопрос об их определении и об установлении условий затухания рассмотрим для каждой из задач (1.1) — (1.4).

Для задачи 1 из (1.1), (2.8) и (2.9) имеем два условия затухания

$$\int_0^1 f_2(y)\, dy = \alpha, \quad \int_0^1 f_1(y)\, y\, dy = \beta \tag{2.15}$$

Значения α, β даны в (2.5). Полученные условия имеют статический характер. Их можно получить из условий равновесия полуполосы под действием всех приложенных к ней воздействий.

Система условий (2.10), (2.11) и (2.6) служит для определения неизвестных $u(0, y)$, $v(0, y)$, входящих в решение (2.13). Способ определения этих величин из указанной системы условий дан в [7].

Для задачи 2 из (1.2) и (2.8), (2.10) имеем два условия затухания

$$\int_0^1 f_2(y)\,dy = \alpha, \quad \frac{\lambda}{4(\lambda+\mu)}\int_0^1 f_2(y)\,y^2\,dy + \int_0^1 f_1(y)\,y\,dy = \gamma \tag{2.16}$$

Из них лишь первое условие можно получить из статических условий равновесия полуполосы.

Система условий (2.9), (2.11) и (2.6) позволяет определить неизвестные $\sigma_x(0, y)$, $v(0, y)$. Однако при построении затухающего решения задачи в рассматриваемом случае можно избежать их определения, так как система условий (2.6) позволяет исключить $\sigma_x(0, y)$, $v(0, y)$ из решения (2.13). Действительно, из (2.3) имеем

$$F(-p_n) = \int_0^1 [-\sigma_x(0, y)\,h(p_n, y) + \sigma_{xy}(0, y)\,g(p_n, y) + \\ + 2\mu u(0, y)\,s(p_n, y) - 2\mu v(0, y)\,t(p_n, y)]\,dy \tag{2.17}$$

Прибавляя к правой части (2.17) величину $F(p_n) + H(p_n)$, равную нулю согласно (2.6), получим выражение $F(-p_n)$ через величины, известные из условий (1.2) при $x = 0$

$$F(-p_n) = 2\int_0^1 [f_2(y)\,g(p_n, y) + f_1(y)\,s(p_n, y)]\,dy + H(p_n) \tag{2.18}$$

Для задачи 3 из (1.3) и (2.9), (2.11) имеем два условия затухания

$$\int_0^1 f_1(y)\,y\,dy = \beta, \quad \frac{3\lambda+4\mu}{6(\lambda+\mu)}\int_0^1 f_1(y)\,y^3\,dy + \int_0^1 (1-y^2)\,f_2(y)\,dy = \delta \tag{2.19}$$

Из них лишь одно имеет статический характер. Система условий (2.6) позволяет исключить из решения (2.13) неизвестные $u(0, y)$, $\sigma_{xy}(0, y)$. Можно получить, что

$$F(-p_n) = -2\int_0^1 [f_1(y)\,h(p_n, y) + f_2(y)\,t(p_n, y)]\,dy - H(p_n) \tag{2.20}$$

Для задачи 4 неизвестные $\sigma_x(0, y)$, $\sigma_{xy}(0, y)$ входят во все условия (2.6), (2.8) — (2.11). Без их определения нельзя получить ни решения задачи, ни условий затухания.

Поэтому прежде всего следует определить $\sigma_x(0, y)$, $\sigma_{xy}(0, y)$ из условий (2.6), (2.8), (2.9). (Способ их определения дан в [7] [1].) После чего из (2.10) и (2.11) получим два условия затухания, налагаемые на краевые функции $f_1(y)$, $f_2(y)$.

3. Рассмотрим симметричную деформацию полуполосы. Тогда в (1.9) $a_1(p)$, $a_3(p)$ равны нулю, а в (1.11) $y_1 = 0$, $y_2 = -1$. Определяя $a_2(p)$,

[1] В [7] в формуле (4.2) для $\Phi_0(y)$ допущена опечатка. Следует считать, что

$$\Phi_0(y) = \begin{pmatrix} y & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$a_4(p)$ из (1.12), получим

(3.1)
$$a_2(p)=\frac{1}{p\varphi(p)}\left\{-\frac{1}{2\mu}(G_1(p)+\lambda u(0,1))\left(\frac{\mu}{\lambda+\mu}\sin p-p\cos p\right)+\right.$$
$$+\frac{1}{2\mu}(G_2(p)+\lambda v(0,1))\left(\frac{\lambda+2\mu}{\lambda+\mu}\cos p+p\sin p\right)-$$
$$\left.-pb_1(p,1)\left(\frac{\mu}{\lambda+\mu}+\cos^2 p\right)+pb_3(p,1)\left(\frac{\mu(\lambda+2\mu)}{(\lambda+\mu)^2}+p^2\right)\right\}$$
$$a_4(p)=\frac{1}{p\varphi(p)}\left\{\frac{1}{2\mu}(G_1(p)+\lambda u(0,1))\sin p-\right.$$
$$-\frac{1}{2\mu}(G_2(p)+\lambda v(0,1))\cos p+$$
$$\left.+pb_1(p,1)+pb_3(p,1)\left(-\frac{\lambda+2\mu}{\lambda+\mu}+\cos^2 p\right)\right\}$$
$$\varphi(p)=\sin p\cos p+p$$

Уравнение $\varphi(p)=0$ имеет корень первого порядка в начале координат и бесконечное множество четверок комплексных корней первого порядка p_n, $\bar p_n$, $-\bar p_n$, $-p_n$. В соответствии с этим $U(p, y)$ имеет полюс второго порядка при $p=0$ и полюса первого порядка и комплексных корнях уравнения $\varphi(p)=0$, а $V(p, y)$ — простые полюса во всех корнях уравнения $\varphi(p)=0$.

Приравнивая нулю вычеты $U(p, y)e^{px}$, $V(p, y)e^{px}$ относительно полюсов p_n с положительной действительной частью, имеем систему условий

(3.2)
$$F(p_n)+H(p_n)=0 \quad (n=1,2,\ldots)$$

где
$$F(p_n)=\int_0^1[\sigma_x(0,y)h(p_n,y)+\sigma_{xy}(0,y)g(p_n,y)+$$
$$+2\mu u(0,y)s(p_n,y)+2\mu v(0,y)t(p_n,y)]\,dy$$
$$H(p_n)=-\frac{\lambda+2\mu}{\lambda+\mu}\left[\sin p_n\int_0^1 g_1(x)e^{-p_nx}dx-\cos p_n\int_0^1 g_2(x)e^{-p_nx}dx\right]-$$
$$-\int_0^1\left[h(p_n,y)\int_0^\infty r_x(x,y)e^{-p_nx}dx+g(p_n,y)\int_0^\infty r_y(x,y)e^{-p_nx}dx\right]dy$$
$$h(p,y)=py\sin py-\left(\frac{\mu}{\lambda+\mu}+\cos^2 p\right)\cos py$$
$$g(p,y)=-py\cos py+\left(\frac{\mu}{\lambda+\mu}+\sin^2 p\right)\sin py$$
$$s(p,y)=p\,(py\sin py-(1+\cos^2 p)\cos py)$$
$$t(p,y)=p\,(-py\cos py-\cos^2 p\sin py)$$

Приравнивая нулю вычеты $U(p, y)e^{px}$, $V(p, y)e^{px}$ относительно полюса $p=0$, получим два условия

(3.3)
$$\int_0^1\sigma_x(0,y)\,dy=\alpha$$

(3.4)
$$\frac{\lambda}{2(\lambda+\mu)}\int_0^1\sigma_{xy}(0,y)\,y\,dy+2\mu\int_0^1 u(0,y)\,dy=\beta$$

Здесь

$$\alpha = \int_0^\infty \left[g_1(x) + \int_0^1 r_x(x, y)\, dy \right] dx$$

$$\beta = \frac{\lambda + 2\mu}{2(\lambda + \mu)} \int_0^\infty \left[-x g_2(x) + \int_0^1 \left(-x r_x(xy) + \frac{\lambda}{\lambda + 2\mu} y r_y(x, y)\, dy \right) \right] dx$$

Перейдем к построению затухающего решения для полуполосы. Как и в случае кососимметричной деформации, представим $U(p, y)$, $V(p, y)$ в виде суммы двух слагаемых, первые из которых являются изображениями для смещений при отсутствии объемных сил и напряжений на продольных кромках, а вторые содержат изображения объемных сил и напряжений при $x = \pm 1$. При нахождении оригиналов, соответствующих первым слагаемым, применим теорему обращения. При построении оригиналов для вторых слагаемых используем теорему свертывания, теорему обращения и теорему об интегрировании по параметру. В результате получим

$$u(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(u^*(-p_n, x, y) + u^*(-\bar{p}_n, x, y) \right) \tag{3.5}$$

$$v(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(v^*(-p_n, x, y) + v^*(-\bar{p}_n, x, y) \right)$$

$$u^*(-p_n, x, y) = -\frac{\lambda + \mu}{4\mu(\lambda + 2\mu)} \frac{1}{p_n \cos^2 p_n} \left[F(-p_n) e^{-p_n x} + K(-p_n, x) \right] h(p_n, y)$$

$$v^*(-p_n, x, y) = -\frac{\lambda + \mu}{4\mu(\lambda + 2\mu)} \frac{1}{p_n \cos^2 p_n} \left[F(-p_n) e^{-p_n x} + K(-p_n, x) \right] g(p_n, y)$$

$$K(-p_n, x) = \int_0^x \left\{ \frac{\lambda + 2\mu}{\lambda + \mu} (\sin p_n g_1(\xi) + \cos p_n g_2(\xi)) - \right.$$

$$\left. - \int_0^1 \left[-h(p_n, y) r_x(\xi, y) + g(p_n, y) r_y(\xi, y) \right] dy \right\} e^{-p_n(x-\xi)} d\xi$$

Рассмотрим вопрос об условиях затухания для задач (1.1) — (1.4). Для задачи 1 из (1.1) и (3.3) получим условие затухания

$$\int_0^1 f_1(y)\, dy = \alpha$$

Это условие получается из статических условий равновесия полуполосы. Условия (3.2), (3.4) служат для определения неизвестных $u(0, y)$, $v(0, y)$, входящих в решение (3.5). (Способ указан в [7].)

Для задачи 2 из (1.2) и (3.4) имеем условие затухания

$$\frac{\lambda}{2(\lambda + \mu)} \int_0^1 f_2(y)\, y\, dy + \int_0^1 f_1(y)\, dy = \beta$$

Система условий (3.2) позволяет исключить из решения (3.5) неизвестные $v(0, y)$, $\sigma_x(0, y)$, входящие в выражение для $F(-p_n)$. В результате получим

$$F(-p_n) = -2\int_0^1 [f_2(y)g(p_n, y) + f_1(y)s(p_n, y)]\,dy - H(p_n)$$

Для задачи 3 из (1.3) и (3.3) получим такое же условие затухания, как и для задачи 1. Система условий (3.2) позволяет исключить из решения (3.5) неизвестные $u(0, y)$, $\sigma_{xy}(0, y)$. Для $F(-p_n)$ в этом случае имеем

$$F(-p_n) = 2\int_0^1 [f_1(y)h(p_n, y) + f_2(y)t(p_n, y)]\,dy + H(p_n)$$

Для задачи 4 неизвестные $\sigma_x(0, y)$, $\sigma_{xy}(0, y)$ входят во все условия (3.2) — (3.4) и в решение (3.5). Система условий (3.3), (3.2) позволяет определить неизвестные $\sigma_x(0, y)$, $\sigma_{xy}(0, y)$. После чего из (3.4) получим условие, налагаемое на функцию $f_1(y)$, выполнение которого необходимо и достаточно для существования затухающего решения.

Поступила 20 V 1976

ЛИТЕРАТУРА

1. *Гольденвейзер А. Л.* Построение приближенной теории изгиба пластинки методом асимптотического интегрирования уравнений теории упругости. ПММ, 1962, т. 26, вып. 4.
2. *Гольденвейзер А. Л.* Построение приближенной теории оболочек при помощи асимптотического интегрирования уравнений теории упругости. ПММ, 1963, т. 27, вып. 4.
3. *Гольденвейзер А. Л.* О двумерных уравнениях общей линейной теории тонких оболочек. В сб.: Проблемы гидродинамики и механики сплошной среды. М., «Наука», 1969.
4. *Гольденвейзер А. Л.* Погранслой и его взаимодействие с внутренним напряженным состоянием упругой тонкой оболочки. ПММ, 1969, т. 33, вып. 6.
5. *Колос А. В.* Метод уточнения классической теории изгиба и растяжения пластинок. ПММ, 1965, т. 29, вып. 4.
6. *Гусейн-Заде М. И.* Напряженное состояние погранслоя для слоистых пластинок. Тр. VII Всес. конференции по теории оболочек и пластинок. Днепропетровск, 1969. М., «Наука», 1970.
7. *Гусейн-Заде М. И.* О необходимых и достаточных условиях существования затухающих решений плоской задачи теории упругости для полуполосы. ПММ, 1965, т. 29, вып. 4.