

ОПТИМАЛЬНОЕ УПРАВЛЕНИЕ ПОТОКОМ НЕНЬЮТОНОВСКОЙ ЖИДКОСТИ МЕЖДУ ВРАЩАЮЩИМИСЯ ЦИЛИНДРАМИ

В. И. Елизаров, Т. К. Сиразетдинов

(Казань)

Приведен приближенный метод решения задачи оптимального управления движением неньютоновской жидкости в зазоре между вращающимися валками.

Значительное число процессов получения и переработки неметаллических материалов (пластмасса, резина, тепло-звукоизоляционные материалы и др.) осуществляется на валковых машинах.

Для расчета режимов работы валковых машин успешно используется гидродинамическая теория вальцевания [1,2], в соответствии с которой движение материала в зазоре между валками представляется как течение вязкой неньютоновской жидкости. Поведение этой жидкости при значительных скоростях сдвига удовлетворительно описывается степенным реологическим законом [1-4].

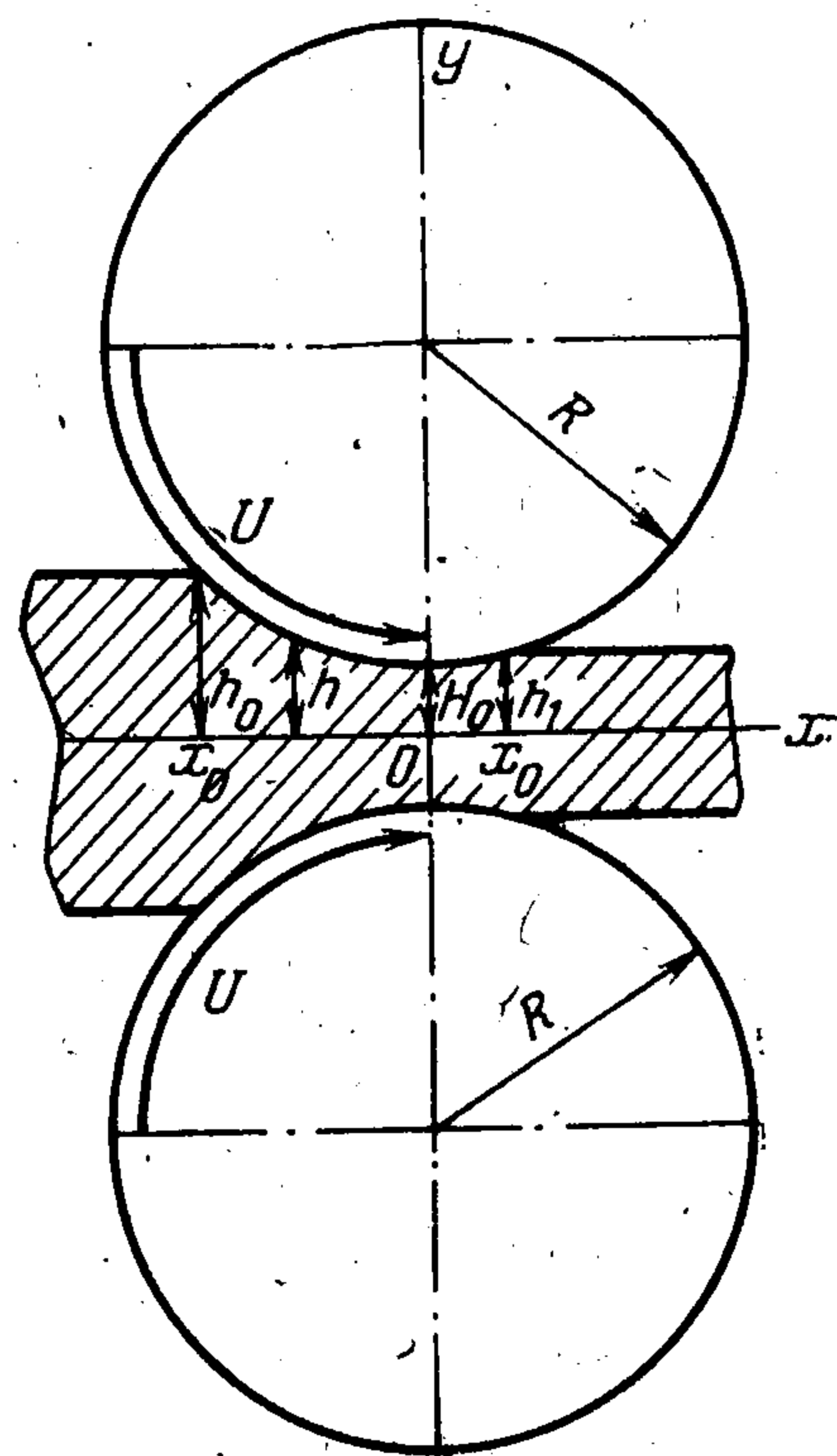
В результате сложных сдвиговых деформаций значительная часть механической энергии переходит в тепловую, существенно изменяя температурное поле потока.

Температура материала в зазоре является определяющим фактором при производстве качественных изделий и одним из основных параметров для расчета энергосиловых характеристик процесса переработки. Тепловые процессы определяют технологические условия, обеспечивающие чистоту прокатываемого листа, вязкость перерабатываемого материала и качество готового продукта [5]. Чрезмерное увеличение температуры внутри листа, являющееся следствием интенсивной механической обработки, может привести к образованию трещин, разрывов листа, к образованию пузырей в готовом изделии и расслоению листа [6].

В данной работе решается задача максимизации расхода неньютоновской жидкости через зазор между вращающимися цилиндрами (т. е. задача о максимизации производительности валков) при условии обеспечения заданного качества изделий, получаемых на выходе из зазора.

Рассмотрим задачу о движении неньютоновской жидкости в зазоре между цилиндрами радиуса R , вращающихся навстречу друг другу с окружной скоростью U (фиг. 1). Величина минимального зазора $2H_0$ мала по сравнению с радиусом R ($R \gg 2H_0$).

Считаем, что режим течения жидкости в зазоре — ламинарный, гравитационные и инерционные силы малы по сравнению с силами трения и



Фиг. 1

поэтому ими можно пренебречь, гидростатическое давление изменяется только в направлении движения жидкости, в рассматриваемой зоне течения материал прилипает к поверхности цилиндров. Движение жидкости симметрично относительно Ox . В этих предположениях уравнения плоского неизотермического течения несжимаемой неньютоновской жидкости между вращающимися цилиндрами сводятся к системе [7]

$$(1.1) \quad \begin{aligned} F_1 &\equiv \frac{\partial p}{\partial x} - \frac{\partial \tau}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial p}{\partial y} = 0, \quad F_2 \equiv \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} = 0 \\ F_3 &\equiv \tau - \mu_0 \exp \left[-b \left(\frac{T - T_0}{T_0 + 273} \right) \right] \left| \frac{\partial v_x}{\partial y} \right|^{n-1} \frac{\partial v_x}{\partial y} = 0 \\ F_4 &\equiv \rho c_p U_x \frac{\partial T}{\partial x} - \lambda \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} - A \tau \frac{\partial v_x}{\partial y} = 0 \end{aligned}$$

с граничными условиями

$$(1.2) \quad \frac{\partial v_x}{\partial y} = \frac{\partial T}{\partial y} = 0, \quad v_y = 0 \quad \text{при } y = 0$$

(условия симметрии потока относительно Ox)

$$(1.3) \quad v_x = u \frac{R + H_0 - h}{R}, \quad v_y = U \frac{x}{R}$$

(условия прилипания жидкости к стенке цилиндров), $T = T_w$ при $y = h$

$$(1.4) \quad p = 0, \quad T = T_0 \quad \text{при } x = x_0$$

$$(1.5) \quad p = 0, \quad dp/dx = 0 \quad (\text{условия отрыва}) \quad \text{при } x = x_1$$

Здесь p — давление; τ — касательное напряжение; v_x и v_y — компоненты скорости потока; T — распределение температуры по потоку жидкости; μ_0 — коэффициент вязкости; n — индекс течения жидкости; λ — коэффициент теплопроводности; A — термический эквивалент работы; R — радиус цилиндров; T_0 — температура жидкости перед входом в зазор; T_w — температура поверхности цилиндров; b — коэффициент, характеризующий энергию активации среды; x_0 и x_1 — координаты входа и отрыва материала; $h = R + H_0 - (R^2 - x_0^2)^{1/2}$ — величина полузазора.

Окружная скорость U , температура предварительного нагрева материала T_0 , температура поверхности валков T_w , глубина загрузки зазора x_0 являются управляющими параметрами процесса, которые удовлетворяют неравенствам

$$(1.6) \quad \begin{aligned} 0 &\leq U \leq U_{\max}, \quad T_{w \min} \leq T_w \leq T_{w \max} \\ T_{0 \min} &\leq T_0 \leq T_{0 \max}, \quad x_{0 \min} \leq x_0 \leq 0 \end{aligned}$$

Считаем, что при заданных значениях (U, T_0, T_w, x_0) существует единственное решение системы (1.1) с условиями (1.2) — (1.5).

Среди допустимых значений управляющих параметров требуется определить такие, которые обеспечивают максимум расхода жидкости через зазор в сечении выхода x_1 (максимум производительности валков) или, что эквивалентно, минимум функционала

$$(1.7) \quad Q = - \int_0^{h_1} v_x(x_1, y) dy$$

при изопериметрической связи

$$(1.8) \quad \gamma = \int_{x_0}^{x_1} \int_0^h [T_j(x, y) - T(x, y)]^2 dy dx = C$$

где Q имеет физический смысл расхода, $T_j(x, y)$ — заданное распределение температуры в области зазора, определяемое технологическими условиями прокатки; γ — величина интегрального квадратичного отклонения температуры $T(x, y)$ от заданного распределения $T_j(x, y)$; $C = \text{const}$.

В основе метода решения вариационной задачи лежит универсальный прием вариационного исчисления, основанный на включении точных уравнений движения и изопериметрического условия с соответствующими неопределенными множителями в дополнительный функционал (метод множителей Лагранжа), и вычисления вариации этого функционала [8].

2. При варьировании параметров (U, T_0, T_w, x_0) изменяются значения функций, характеризующих состояние процесса. Вариации параметров и функций состояния вызывают вариацию границ области течения — перемещения граничных точек x_0 и x_1 .

Присоединим к системе (1.1) уравнение

$$F_5 \equiv q - \partial T / \partial y = 0$$

В соответствии с методом [8], предложенным для решения вариационных задач газовой динамики, составляются вспомогательные функционалы

$$Q^* = Q + \bar{Q}, \quad \gamma^* = \gamma + \bar{\gamma}$$

и вычисляются их первые вариации в задаче с подвижными границами x_0 и x_1 : $\delta Q^* = \delta Q + \delta \bar{Q}$, $\delta \gamma^* = \delta \gamma + \delta \bar{\gamma}$, где

$$\bar{Q} = \int_{x_1}^{x_0} \int_0^h \sum_{i=1}^5 \lambda_i F_i dy dx$$

$$\bar{\gamma} = \int_{x_1}^{x_0} \int_0^h \sum_{i=1}^5 \lambda_i^* F_i dy dx$$

Здесь $\lambda_i = \lambda_i(x, y)$, $\lambda_i^* = \lambda_i^*(x, y)$ ($i = 1, 2, \dots, 5$) — неопределенные множители.

В выражениях вариаций δQ^* и $\delta \gamma^*$ оставим только вариации управляющих параметров, которые являются независимыми, а остальные вариации исключим.

Для этого множители $\lambda_i = \lambda_i(x, y)$, $\lambda_i^* = \lambda_i^*(x, y)$ подберем так, чтобы выражения перед вариациями фазовых координат в δQ^* и $\delta \gamma^*$ обратились в нуль. Это приведет к двум системам уравнений относительно λ_i и λ_i^* : системе

$$(2.1) \quad \frac{\partial \lambda_2}{\partial x} - n \frac{\partial}{\partial y} \left(\tau \lambda_3 / \frac{\partial v_x}{\partial y} \right) - \rho c_p \lambda_4 \frac{\partial T}{\partial x} - A \frac{\partial}{\partial y} (\tau \lambda_4) = 0$$

$$\lambda_3 = \left[A \frac{\partial v_x}{\partial y} \lambda_4 - \frac{\partial \lambda_1}{\partial y} \right]$$

$$\rho c_p \frac{\partial}{\partial x} (\lambda_4 v_x) - \frac{\partial \lambda_5}{\partial y} - \frac{b\tau}{T_0 + 273} \lambda_3 = 0, \quad \lambda_5 = -\lambda \frac{\partial \lambda_2}{\partial y}$$

$$\frac{d}{dx} \int_0^h \lambda_1 dy = 0, \quad \frac{\partial \lambda_2}{\partial y} = 0$$

и системе

$$\begin{aligned}
 (2.2) \quad & \frac{\partial \lambda_2^*}{\partial x} - n \frac{\partial}{\partial y} \left(\tau \lambda_3^* \left/ \frac{\partial v_x}{\partial y} \right. \right) - \rho c_p \lambda_4^* \frac{\partial T}{\partial x} - A \frac{\partial}{\partial y} (\tau \lambda_4^*) = 0, \\
 & \lambda_3^* = A \frac{\partial v_x}{\partial y} \lambda_4^* - \frac{\partial \lambda_1^*}{\partial y} \\
 & \rho c_p \frac{\partial}{\partial x} (\lambda_4^* v_x) - \frac{\partial \lambda_5^*}{\partial y} - \frac{b\tau}{T_0 + 273} \lambda_3^* + 2(T_j - T) = 0, \\
 & \lambda_5^* = -\lambda \frac{\partial \lambda_4^*}{\partial y}, \quad \frac{d}{dx} \int_0^h \lambda_1^* dy = 0, \quad \frac{\partial \lambda_2^*}{\partial y} = 0.
 \end{aligned}$$

Граничные условия для сопряженных систем определяются из условия равенства нулю коэффициентов при вариациях тех функций в δQ^* и $\delta \gamma^*$, значения которых на границе не заданы, и при вариации подвижной точки x_1 . Имеем

$$\begin{aligned}
 (2.3) \quad & \lambda_3 = \lambda_5 = 0, \quad \lambda_3^* = \lambda_5^* = 0 \quad \text{при } y = 0 \\
 & \lambda_1 = \lambda_4 = 0, \quad \lambda_1^* = \lambda_4^* = 0 \quad \text{при } y = h \\
 & \lambda_2 = 0, \quad \lambda_2^* = 0 \quad \text{при } x = x_0 \\
 & \lambda_4 = 0, \quad \lambda_4^* = 0, \quad \int_0^h \left(\lambda_1 \frac{\partial \tau}{\partial y} - \lambda_2 \frac{\partial v_y}{\partial y} \right) dy = v_x \frac{dh}{dx} \\
 & \int_0^h \left[\lambda_1^* \frac{\partial \tau}{\partial y} - \lambda_2^* \frac{\partial v_y}{\partial y} - (T_j - T)^2 \right] dy = 0 \quad \text{при } x = x_1
 \end{aligned}$$

Вариации δQ^* и $\delta \gamma^*$ с учетом (2.1) — (2.3) запишутся в виде

$$\begin{aligned}
 (2.4) \quad \delta Q^* = & - \left[\int_{x_1}^{x_0} \left(n \frac{R + H_0 - h}{R} \tau \lambda_3 \left/ \frac{\partial v_x}{\partial y} \right. \right)_{y=h} dx + \int_0^{h_1} (\lambda_2 + 1)_{x=x_1} \times \right. \\
 & \times \left. \frac{R + H_0 - h_1}{R} dy \right] \delta U + \left[\int_0^{h_0} (\rho c_p \lambda_4 v_x)_{x=x_0} dy - \right. \\
 & - \left. \int_{x_1}^{x_0} \int_0^h b \frac{T + 273}{(T_0 + 273)^2} \tau \lambda_3 dy dx \right] \delta T_0 - \int_{x_1}^{x_0} \lambda_5(x, h) dx \delta T_w - \\
 & - \int_0^{h_0} \left[\lambda_1 \frac{\partial \tau}{\partial y} + A \tau \lambda_4 \frac{\partial v_x}{\partial y} \right]_{x=x_0} dy \delta x_0
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (2.5) \quad \delta \gamma^* = & - \left[\int_{x_1}^{x_0} \left(n \frac{R + H_0 - h}{R} \tau \lambda_3^* \left/ \frac{\partial v_x}{\partial y} \right. \right)_{y=h} dx + \right. \\
 & + \left. \int_0^{h_1} \lambda_2^*(x_1, y) \frac{R + H_0 - h_1}{R} dy \right] \delta U + \left[\int_0^{h_0} (\rho c_p \lambda_4^* v_x)_{x=x_0} dy - \right. \\
 & - \left. \int_{x_1}^{x_0} \int_0^h b \frac{T + 273}{(T_0 + 273)^2} \tau \lambda_3^* dy dx \right] \delta T_0 - \int_{x_1}^{x_0} \lambda_5^*(x, h) dx \delta T_w - \\
 & - \int_0^{h_0} \left[\lambda_1^* \frac{\partial \tau}{\partial y} + A \tau \lambda_4^* \frac{\partial v_x}{\partial y} - (T_j - T)^2 \right]_{x=x_0} dy \delta x_0
 \end{aligned}$$

3. Одним из методов решения вариационных задач на условный экстремум является метод последовательного спуска [9].

Этот метод является обобщением основных идей метода наискорейшего спуска и распространяется на системы с распределенными параметрами и изопериметрическими связями.

В соответствии с методом задаемся первым приближением значений управляющих параметров $(U^{(1)}, T_0^{(1)}, T_w^{(1)}, x_0^{(1)})$. Общих рекомендаций для построения первого приближения нет. При удачном выборе оно может обеспечить минимум функционала Q при изопериметрическом условии $\gamma = C$ и дифференциальных связях (1.1). Удовлетворить в первом приближении всем этим условиям не всегда удается.

Пусть управляющие параметры удовлетворяют неравенствам (1.6) и в дальнейшем будем считать, что эти ограничения выполняются. Если найденные значения превышают допустимые пределы в (1.6), то принимаем граничные значения управляющих параметров.

По первому приближению строится решение системы (1.1) — (1.5) и вычисляются значения функционалов Q и γ . Следует ожидать, что $\gamma \neq C$, $Q \neq \min Q$. Тогда на основе первого приближения фазовых координат находим неопределенные множители λ_i и λ_i^* ($i = 1, 2, \dots, 5$).

Путем последовательного спуска добиваемся выполнения условий $\gamma = C$, $Q = \min Q$. Сначала зафиксируем значение функционала Q^* ; его первую вариацию во втором и последующих приближениях примем равной нулю

$$(3.1) \quad \delta Q^{*(2)} = \delta Q^{*(3)} = \dots = \delta Q^{*(n)} = 0$$

Для выполнения условия $\gamma = C$, используя выражения (2.4) и (2.5), составим функционал

$$(3.2) \quad \delta \gamma = \delta \gamma^* + \alpha \delta Q^*$$

где α — постоянный множитель.

Согласно методу наискорейшего спуска из (3.2) найдем вариации управляющих параметров

$$(3.3) \quad \begin{aligned} \delta U &= \varepsilon_1 \left\{ \int_{x_1}^{x_0} \left[n\tau \left(\frac{\partial v_x}{\partial y} \right)^{-1} (\lambda_3^* + \alpha \lambda_3) \right]_{y=h} dx + \right. \\ &+ \left. \int_0^{h_1} \frac{R + H_0 - h_1}{R} [\lambda_2^* + \alpha (\lambda_2 + 1)]_{x=x_1} dy \right\} \\ \delta T_0 &= -\varepsilon_2 \left\{ \int_0^{h_0} \rho c_p v_x (\lambda_4^* + \alpha \lambda_4) |_{x=x_0} dy - \right. \\ &- \left. \int_{x_1,0}^{x_0,h} b \frac{T + 273}{(T_0 + 273)^2} \tau (\lambda_3^* + \alpha \lambda_3) dy dx \right\} \\ \delta T_w &= \varepsilon_3 \int_{x_1}^{x_0} (\lambda_5^* + \alpha \lambda_5)_{y=h} dx \\ \delta x_0 &= \varepsilon_4 \int_0^{h_0} \left[\frac{\partial \tau}{\partial y} (\lambda_1^* + \alpha \lambda_1) + A\tau \frac{\partial v_x}{\partial y} (\lambda_4^* + \alpha \lambda_4) - (T_j - T)^2 \right]_{x=x_0} dy \end{aligned}$$

Здесь постоянная ε_i ($i = 1, 2, 3, 4$) определяет шаг приближения.

Вариации δU , δT_0 , δT_w , δx_0 подставим в выражение для δQ^* (2.4) и, полагая согласно (3.1) $\delta Q^* = 0$, получим уравнение для определения постоянного множителя α .

Задаваясь малым значением ε_i ($i = 1, 2, 3, 4$), сделаем несколько приближений до достижения $\gamma = C$, как это принято в методе наискорейшего спуска. В каждом приближении для полученного значения $(U^{(s)} + \delta U^{(s+1)}, T_0^{(s)} + \delta T_0^{(s+1)}, T_w^{(s)} + \delta T_w^{(s+1)}, x_0^{(s)} + \delta x_0^{(s+1)})$, где s — номер приближения, решается система (1.1), (2.1), (2.2), определяется свой множитель α в (3.2) и задается свой шаг ε_i .

Достигнув выполнения изопериметрического условия $\gamma = C$, приступаем к построению параметров управления, обеспечивающих $\min Q$. Процедура построения остается такой же, как и при построении значений параметров, удовлетворяющих заданному условию $\gamma = C$. Фиксируем значение функционала γ^* , составляем $\delta Q = \delta Q^* + \alpha \delta \gamma^*$ и на основе метода наискорейшего спуска находим вариации параметров δU , δT_0 , δT_w , δx_0 . Полагая в каждом шаге $\delta \gamma^* = 0$, вычисляем постоянную α и т. д.

Задачу считаем решенной после достаточно точного выполнения условия $Q = \min Q$.

Для практического построения оптимального решения необходимо уметь строить решение уравнений движения при произвольном законе изменения управляющих параметров и решение сопряженных систем при известных коэффициентах в уравнениях.

4. Решение уравнений движения (1.1) — (1.5) приведено в [7].

Основные параметры течения в безразмерных координатах $\xi = x/\sqrt{2RH_0}$, $\eta = y/h$ записываются в виде

$$(4.1) \quad v_\xi = U \left\{ (R + H_0 - h - h_1)(h_1 - h) \left[Rh \int_0^1 \int_1^\eta \left(\frac{\varphi}{\psi} \right)^{1/n} d\varphi d\eta \right]^{-1} \times \right.$$

$$\left. \times \int_1^\eta \left(\frac{\varphi}{\psi} \right)^{1/n} d\varphi + \frac{R + H_0 - h}{R} \right\}$$

$$v_\eta = -h \int_0^\eta \frac{\partial v_\xi}{\partial \xi} d\varphi$$

$$p(\xi) = \mu_0 \left(\frac{U}{R} \right)^n \int_{\xi_0}^\xi \left\{ (R + H_0 - h - h_1) \times \right.$$

$$\left. \times \left[h^{1+2n/n} \int_0^1 \int_1^\eta \left(\frac{\varphi}{\psi} \right)^{1/n} d\varphi d\eta \right]^{-1} \right\}^n |h_1 - h|^{n-1} (h_1 - h) dx$$

где

$$\psi = \exp \left[-b \left(\frac{T - T_0}{T_0 + 273} \right) \right], \quad h = R + H_0 - (R^2 - \xi^2)^{1/2}$$

$$h_1 = R + H_0 - (R^2 - \xi_1^2)^{1/2}, \quad \xi_1 = \frac{x_1}{\sqrt{2RH_0}}$$

Значение параметра h_1 или координаты ξ_1 определяется из условия $p(\xi_1) = 0$, удовлетворяя которому, получим

$$\int_{\xi_0}^{\xi_1} \left\{ [(R^2 - \xi^2)^{1/2} + (R^2 - \xi_1^2)^{1/2} - R - |H_0| \times \right. \\ \left. \times \left[h^{1+2n/n} \int_0^1 \int_0^1 \left(\frac{\varphi}{\psi} \right)^{1/n} d\varphi d\eta \right]^{-1} \right\}^n |(R^2 - \xi^2)^{1/2} - (R^2 - \xi_1^2)^{1/2}|^{n-1} \times \\ \times [(R^2 - \xi^2)^{1/2} - (R^2 - \xi_1^2)^{1/2}] d\xi = 0$$

Вводя безразмерную разность температур

$$\theta = T - T_0/T_0$$

уравнение энергии в координатах ξ и η можно преобразовать к виду

$$(4.2) \quad \frac{\partial \theta}{\partial \xi} = \frac{\nu}{\sigma} \frac{\sqrt{2RH_0}}{h^2 v_\xi} \frac{\partial^2 \theta}{\partial \eta^2} + \frac{B(\xi)}{v_\xi} \exp(-b_0 \theta) \left| \frac{\partial v_\xi}{\partial \eta} \right|^{n+1}$$

где σ — число Прандтля, ν — коэффициент кинематической вязкости

$$B(\xi) = \frac{A\mu_0 \sqrt{2RH_0}}{\rho c_p T_0 h^{n+1}}, \quad b_0 = b \frac{T_0}{T_0 + 273}$$

Распределение температуры ищется в виде ряда

$$(4.3) \quad \theta = \theta_{00} + \sum_{k=1}^{\infty} \theta_k(\xi) \cos \frac{k\pi}{2} \eta, \quad k = 1, 3, 5, \dots$$

Подставив (4.3) в уравнение (4.2), умножив обе части этого равенства на $\cos m\pi/2 \eta$, где m также принимает нечетные значения, и интегрируя по η в интервале (0, 1), приходим к системе уравнений

$$(4.4) \quad \frac{d\theta_m}{d\xi} + \sum_{k=1}^{\infty} A_{km} \theta_k + C_m = 0; \quad m = 1, 3, 5, \dots$$

для определения $\theta_k(\xi)$.

Коэффициенты в уравнениях (4.4) записываются в форме

$$A_{km} = \frac{k^2 \pi^2 \nu \sqrt{2RH_0}}{2\sigma h^2} \int_0^1 v_\xi^{-1} \cos \frac{k\pi}{2} \eta \cos \frac{m\pi}{2} \eta d\eta \\ C_m = -2B(\xi) \int_0^1 v_\xi^{-1} \left| \frac{\partial v_\xi}{\partial \eta} \right|^{n+1} \exp(-b_0 \theta) \cos \frac{m\pi}{2} \eta d\eta$$

Система уравнений (4.4) решается при граничных условиях: $\theta_k(\xi_0) = 0$.

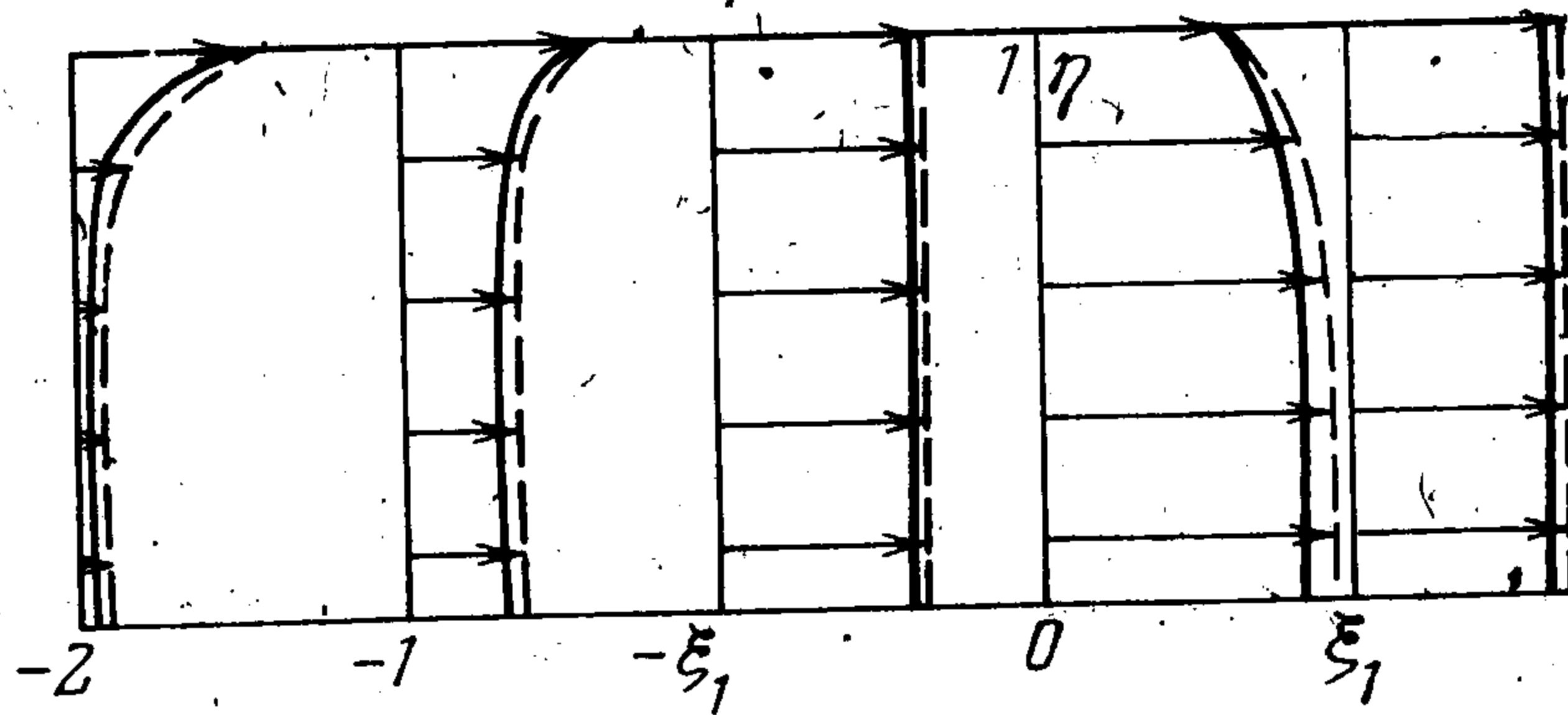
На основе полученных результатов проведен численный расчет физических параметров течения жидкости в зазоре цилиндров радиуса $R = 0.25$ м. Величина минимального зазора $2H_0 = 0.2 \cdot 10^{-3}$ м, глубина загрузки $\xi_0 = -2$, температура поверхности валков $T_w = T_0 = 150^\circ$ С, скорость вращения $U = 0.8$ м/сек. Теплофизические свойства жидкости характеризуются параметрами: $\mu_0 = 0.484 \cdot 10^5$ нсек/м²; $n = 0.23$; $\rho = 1.38$ н/м³; $b = 26.6$; $c_p = 0.025$ ккал/н·град; $\lambda = 0.1 \cdot 10^{-3}$ ккал/мсек·град.

Построение функций состояния процесса осуществляется методом последовательных приближений.

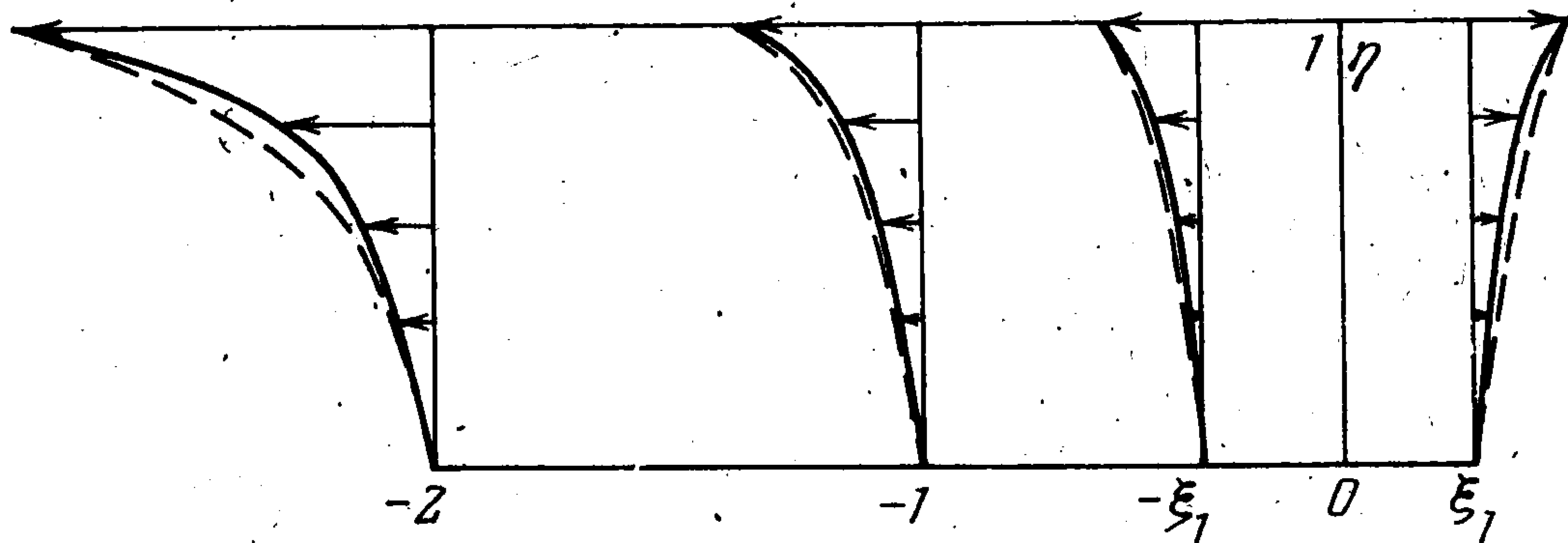
В нулевом приближении полагается $\theta^{(0)}(\xi, \eta) = 0$. На основе нулевого приближения температуры по (4.1) строится нулевое приближение $v_\xi^{(0)}, v_\eta^{(0)}, p^{(0)}(\xi)$, а по нулевому приближению $v_\xi^{(0)}$ вычисляются значения $A_{km}^{(0)}, C_m^{(0)}$, решается система (4.4) и находится первое приближение температуры $\theta^{(1)}(\xi, \eta)$ (4.3) и т. д.

Сходимость последовательных приближений здесь не рассматривается, но в данном примере расчета оказалось, что второе приближение функций состояния отличается от первого не более чем на 3%.

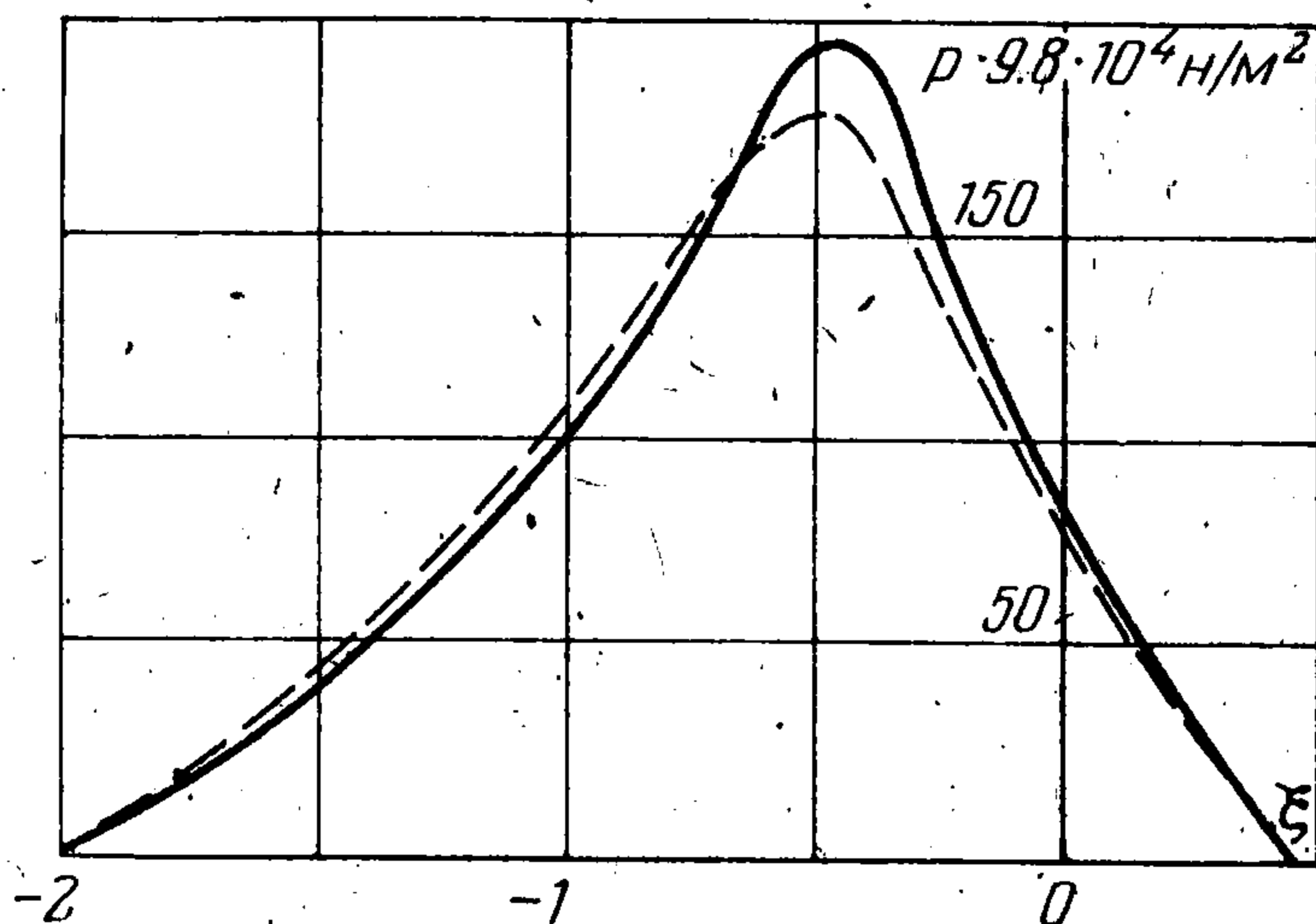
Распределения скоростей v_ξ, v_η и давления $p(\xi)$ в нулевом (сплошные линии) и втором (штриховые линии) приближениях показаны на фиг. 2—4, а второе приближение температуры в сечении $\xi = -1.8$, представленное суммой трех членов ряда (4.3) и вычисленное на основе нулевого приближения v_ξ , приведено на фиг. 5 (ввиду симметрии показана лишь область $0 \leq \eta \leq 1$).



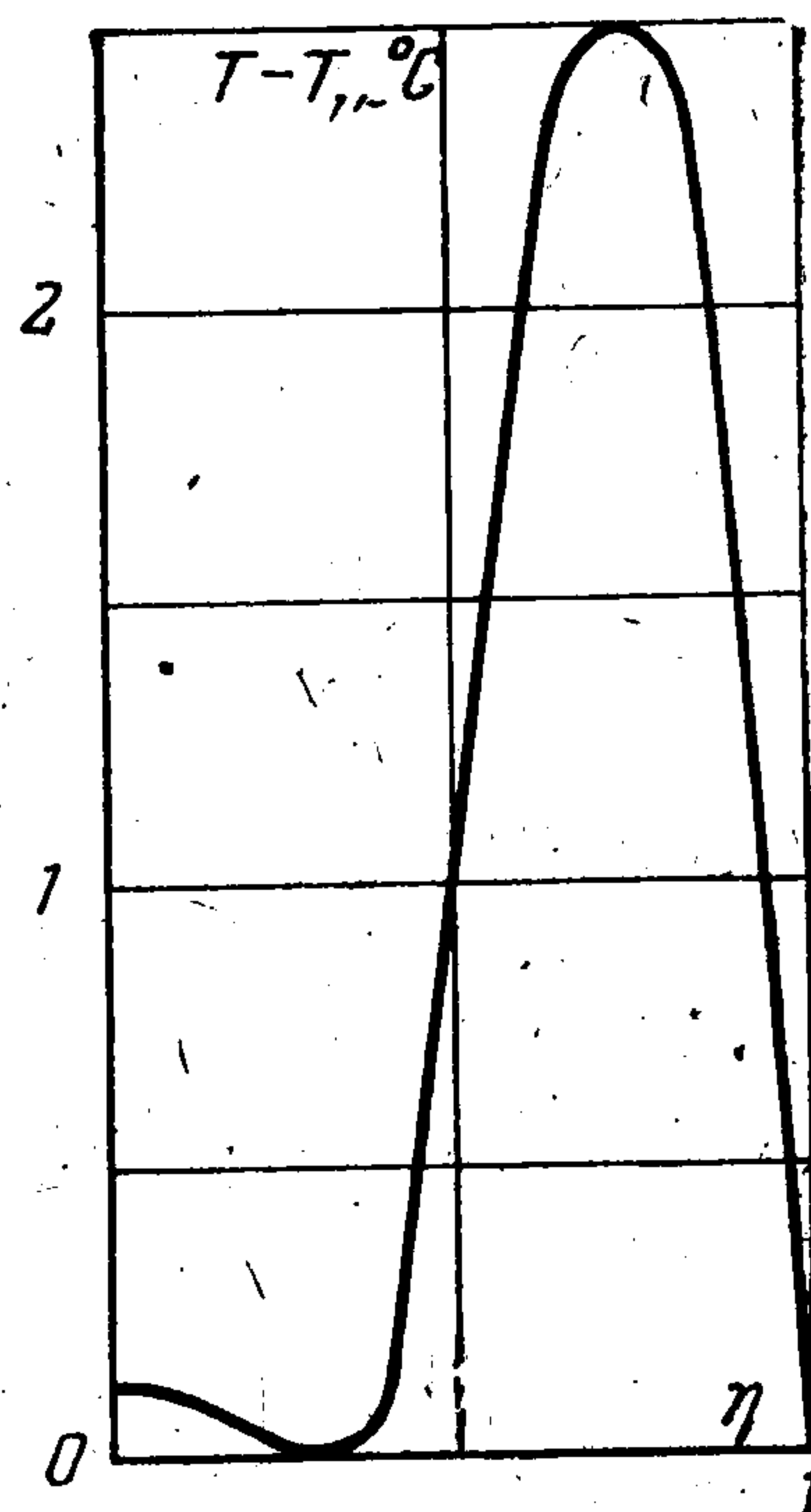
Фиг. 2



Фиг. 3



Фиг. 4



Фиг. 5

Рассмотрим интегрирование сопряженных систем уравнений. Покажем решение системы (2.2). Исключим из уравнений λ_3^* и λ_5^* . В безразмерных координатах ξ и η уравнения представим в виде

$$(4.5) \quad \frac{d\lambda_2^*}{d\xi} + b(\xi) \psi \left| \frac{\partial v_\xi}{\partial \eta} \right|^{n-1} \frac{\partial^2 \lambda_1^*}{\partial \eta^2} + b(\xi) \frac{\partial}{\partial \eta} \left(\psi \left| \frac{\partial v_\xi}{\partial \eta} \right|^{n-1} \right) \frac{\partial \lambda_1^*}{\partial \eta} - \\ - \rho c_p \lambda_4^* \frac{\partial T}{\partial \xi} - A \frac{n+1}{h} \frac{\partial}{\partial \eta} (\tau \lambda_4^*) = 0 \\ \frac{\partial \lambda_4^*}{\partial \xi} + \frac{a(\xi)}{v_\xi} \frac{\partial^2 \lambda_4^*}{\partial \eta^2} - \left(v_\xi^{-1} \frac{\partial v_\xi}{\partial \xi} - \frac{AB\tau}{\sqrt{2RH_0} h v_\xi} \frac{\partial v_\xi}{\partial \eta} \right) \lambda_4^* - \\ - \frac{B\tau}{\sqrt{2RH_0} h v_\xi} \frac{\partial \lambda_1^*}{\partial \eta} + \frac{2\sqrt{2RH_0}(T_j - T)}{\rho c_p v_\xi} = 0$$

$$(4.6) \quad \int_0^1 \lambda_1^* d\eta = \frac{\text{const}}{h}$$

Размерности множителей λ_i^* ($i = 1, 2, 4$): $[\lambda_1^*] = \text{град}^2 \text{м}^3 / \text{н}$; $[\lambda_2^*] = \text{град}^2 \text{сек}$; $[\lambda_4^*] = \text{град}^2 \text{м}^3 \text{сек} / \text{ккал}$. Граничные условия после проведенных преобразований записываются в форме

$$(4.7) \quad \left. \begin{aligned} \frac{\partial \lambda_1^*}{\partial \eta} = \frac{\partial \lambda_4^*}{\partial \eta} = 0 \quad \text{при } \eta = 0 \\ \lambda_1^* = \lambda_4^* = 0 \quad \text{при } \eta = 1 \\ \lambda_2^* = 0 \quad \text{при } \xi = \xi_0 \\ \lambda_4^* = 0, \quad \lambda_2^* = -Rh_1 [U\xi_1]^{-1} \int_0^1 (T_j - T)^2 d\eta \quad \text{при } \xi = \xi_1 \end{aligned} \right\}$$

Здесь

$$b(\xi) = \frac{n\mu_0}{\sqrt{(2RH_0)^n h^{n+1}}}, \quad a(\xi) = \frac{v}{\sigma h \sqrt{2RH_0}} \\ B = \frac{b \sqrt{2RH_0}}{\rho c_p (T_0 + 273)}, \quad h = h(\xi)$$

Множители λ_1^* и λ_4^* разыскиваются в виде

$$(4.8) \quad \lambda_1^*(\xi, \eta) = \sum_{m=1}^{\infty} \lambda_{1m}^*(\xi) \cos \frac{m\pi}{2} \eta, \quad \lambda_4^*(\xi, \eta) = \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_{4k}^*(\xi) \cos \frac{k\pi}{2} \eta$$

которые удовлетворяют граничным условиям (4.7). Здесь m и k принимают нечетные значения.

Так же, как и при решении уравнения энергии, подставим разложения (4.8) в уравнения (4.5), умножим соответственно на $\cos s\pi/2 \eta$ и $\cos r\pi/2 \eta$ (s и r — нечетные) и, интегрируя по η в интервале $(0, 1)$, получим

$$(4.9) \quad \frac{d\lambda_2^*}{d\xi} - \sum_{m=1}^{\infty} B_{ms} \lambda_{1m}^* - \sum_{k=1}^{\infty} D_{ks} \lambda_{4k}^* = 0 \\ \frac{d\lambda_{4p}^*}{d\xi} - \sum_{k=1}^{\infty} A_{kp} \lambda_{4k}^* - \sum_{m=1}^{\infty} C_{mp} \lambda_{1m}^* + C_p^* = 0$$

где

$$\begin{aligned}
 B_{ms} &= b(\xi) \frac{s\pi}{2 \sin s\pi/2} \int_0^1 \left[\frac{m^2\pi^2}{4} \psi \left| \frac{\partial v_\xi}{\partial \eta} \right|^{n-1} \cos \frac{m\pi}{2} \eta + \right. \\
 &\quad \left. + \frac{m\pi}{2} \frac{\partial}{\partial \eta} \left(\psi \left| \frac{\partial v_\xi}{\partial \eta} \right|^{n-1} \right) \sin \frac{m\pi}{2} \eta \right] \cos \frac{s\pi}{2} \eta d\eta \\
 D_{ks} &= \frac{s\pi}{2 \sin s\pi/2} \int_0^1 \left[\left(\rho c_p \frac{\partial T}{\partial \xi} + \frac{A(n+1)}{h} \frac{\partial \tau}{\partial \eta} \right) \cos \frac{k\pi}{2} \eta - \right. \\
 &\quad \left. - \frac{k\pi}{2} A \frac{n+1}{h} \tau \sin \frac{k\pi}{2} \eta \right] \cos \frac{s\pi}{2} \eta d\eta \\
 A_{kp} &= 2 \int_0^1 \left[\frac{k^2\pi^2 a(\xi)}{4v_\xi} - \left(v_\xi^{-1} \frac{\partial v_\xi}{\partial \xi} - A \frac{B\tau}{\sqrt{2RH_0} h v_\xi} \frac{\partial v_\xi}{\partial \eta} \right) \right] \cos \times \\
 &\quad \times \frac{k\pi}{2} \eta \cos \frac{p\pi}{2} \eta d\eta \\
 C_{mp} &= \frac{2B}{h \sqrt{2RH_0}} \int_0^1 \frac{m\pi\tau}{2v_\xi} \sin \frac{m\pi}{2} \eta \cos \frac{p\pi}{2} \eta d\eta \\
 C_p^* &= \frac{4 \sqrt{2RH_0}}{\rho c_p} \int_0^1 \frac{T_j - T}{v_\xi} \cos \frac{p\pi}{2} \eta d\eta
 \end{aligned}$$

Интегральное условие (4.6) после подстановки в него разложения λ_1^* из (4.8) и проведенных преобразований, записывается в виде

$$(4.10) \quad \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\lambda_{1m}^*}{m} \sin \frac{m\pi}{2} = \frac{\text{const}}{h(\xi)}$$

Граничные условия для системы (4.9), (4.10) имеют вид

$$\lambda_2^*(\xi_0) = 0, \quad \lambda_{4k}^*(\xi_1) = 0$$

Для определения const используется значение функции λ_2^* на границе $\xi = \xi_1$.

Интегрирование уравнений (4.9), (4.10) дает распределения $\lambda_2^*(\xi)$, $\lambda_{1m}^*(\xi)$ и $\lambda_{4k}^*(\xi)$ ($m, k = 1, 3, 5, \dots$), которые совместно с разложениями (4.8) являются решением системы (4.5).

Решение системы (2.1) строится аналогично.

Рассмотрим пример расчета оптимального управления. Пусть $T_j = \text{const} = 150^\circ \text{C}$, $\gamma = C = 2 \text{ град}^2$.

Определим оптимальную окружную скорость U_0 , температуру стенки T_{u0} , температуру предварительного нагрева материала T_{00} и оптимальную глубину загрузки ξ_{00} валков, перерабатывающих материал, обладающий теплофизическими свойствами, указанными в п. 4.

Зададимся значениями управляющих параметров в первом приближении, соблюдая неравенства

$$0 \leq U \leq U_{\max} = 0.8 \text{ м / сек}, \quad 0 \leq T_w \leq T_{w\max} = 150^\circ \text{C}$$

$$0 \leq T_0 \leq T_{0\max} = 170^\circ \text{C}, \quad 0 \geq \xi_0 \geq \xi_{0\min} = -2$$

Пусть

$$U^{(1)} = U_{\max} = 0.8 \text{ м / сек}, \quad T_0^{(1)} = 155^\circ \text{C}; \quad T_w^{(1)} = 145^\circ \text{C}, \quad \xi_0 = -2$$

Распределение температуры θ , функций λ_i и λ_i^* ($i = 1, 2, 4$) принимаем в виде одного члена ряда.

На основе первого приближения параметров ($U^{(1)}, T_0^{(1)}, T_w^{(1)}, \xi_0^{(1)}$) решаем исходную систему уравнений (1.1) — (1.5) и проверяем выполнение условий $Q = \min Q$ и $\gamma = C$. В данном случае $Q = \min Q$, $\gamma > C$.

Определяем множители λ_i, λ_i^* ($i = 1, 2, 4$), составляем выражения вариации управляющих параметров и уравнение для определения постоянного множителя α . Задаемся шагом приближения: $\varepsilon_1 = 0.0005$; $\varepsilon_2 = 29$; $\varepsilon_3 = 1.25$; $\varepsilon_4 = 0.0005$ и находим α .

Определяем приращения $\delta U, \delta T_0, \delta T_w, \delta x_0$ и второе приближение для параметров управления ($U^{(2)}, T_0^{(2)}, T_w^{(2)}, \xi_0^{(2)}$).

Значение координаты $\xi_0^{(2)}$ во втором приближении выходит за допустимый предел $\xi_0 = -2$. В последующих приближениях принимаем $\xi_0 = -2$. В третьем прибли-

Таблица 1

№ приближения	$U, \text{ м/сек}$	$T_0, \text{ град}$	$T_w, \text{ град}$	ξ_0	$Q \cdot 10^{-3}, \text{ м}^2/\text{сек}$	$\gamma, \text{ град}^2$
1	0.8	155	145	-2	94.75	23.45
2	0.755	150	146.1	-2	89.60	14.11
3	0.704	144.2	147.9	-2	83.70	2.02

Таблица 2

№ приближения	$U, \text{ м/сек}$	$T_0, \text{ град}$	$T_w, \text{ град}$	ξ_0	$Q \cdot 10^{-3}, \text{ м}^2/\text{сек}$	$\gamma, \text{ град}^2$
1	0.704	144.2	147.9	-2	83.70	6.887
2	0.606	134.8	150	-2	72.10	2.43
3	0.515	129.5	150	-2	60.92	2.38
4	0.400	124	150	-2	47.70	2.0

жении добиваемся выполнения условия $\gamma = C$ и значения ($U^{(3)} = U_0, T_0^{(3)} = T_{00}, T_w^{(3)} = T_{w0}, \xi_0^{(3)} = \xi_{00}$) являются оптимальными. Результаты расчетов приведены в табл. 1.

В табл. 2 приведены результаты расчетов оптимального управления для случая, в котором распределения температуры θ , множителей λ_i, λ_i^* ($i = 1, 2, 4$) представляются суммой двух первых членов ряда.

Поступила 16 IX 1975

ЛИТЕРАТУРА

1. Мак-Келви Д. М. Переработка полимеров. М., «Химия», 1965.
2. Розе Н. В., Красовский В. Н., Мирзоев Р. Г. Теория процессов каландрования полимерных материалов, подчиняющихся степенному закону течения. В сб.: Машины и технология переработки полимеров. Материалы к конференции. Тр. Ленинград. технол. ин-та им. Ленсовета, 1967.
3. Уилкинсон У. Л. Неньютоновские жидкости. М., «Мир», 1964.
4. Лойцянский Л. Г. Механика жидкости и газа. М., «Наука», 1970.
5. Бернхардт Э. Переработка термопластичных материалов. М., «Химия», 1962.
6. Finston M. Thermal effects in calendering viscous fluids. J. Appl. Mech., 1951, vol. 18, No. 1.
7. Елизаров В. И., Сираветдинов Т. К. Течение неньютоновской жидкости в зазоре вращающихся цилиндров. Изв. вузов. Авиационная техника, 1973, № 4.
8. Сираветдинов Т. К. Оптимальные задачи газодинамики. Изв. вузов. Авиационная техника, 1963, № 2.
9. Сираветдинов Т. К. Метод последовательного спуска для оптимизации систем с распределенными параметрами. Казань, Таткнигоиздат, 1970, кн. 1.