Прикладная математика и механика. Том 40, 1976

УДК 62—50

О ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНО-РАЗНОСТНОЙ ИГРЕ УБЕГАНИЯ

А. А. Чикрий, Г. Ц. Чикрий

(Киев)

Рассматривается нелинейная задача убегания для конфликтно-управляемых систем, описываемых дифференциальными уравнениями с запаздывающим аргументом. Получены достаточные условия убегания, которые реализуются в классе кусочно-постоянных функций. Статья примыкает к исследованиям [1–8] и является продолжением работ [9,10].

1. Пусть движение системы описывается дифференциальным уравнением

$$\dot{x}(t) = f(x(t), x(t-\tau), u, v), \quad u \in U, \; v \in V \tag{1.1}$$

Здесь x — n-мерный фазовый вектор, u и v — управляющие параметры первого и второго игроков, U и V — замкнутые и ограниченные множества. Функция $f(x, x_\tau, u, v)$ непрерывна по совокупности аргументов и непрерывно дифференцируема по x и x_τ, $\tau \geqslant 0$ — величина запаздывания.

В пространстве E^n выделено терминальное множество M, которое является подпространством. Игра считается законченной, если $x(t)$ попадает на множество M.

В качестве начального состояния для игры (1.1) можно выбрать любую абсолютно непрерывную функцию $g(t)$, заданную на отрезке $[-\tau, 0]$. В дальнейшем будем предполагать наличие у функций $g(t)$, используемых в качестве начальных, производных всех нужных порядков, которые, как и сами функции на интервале $[-\tau, 0]$, удовлетворяют условию Липшица с постоянной, не превосходящей заданного числа C.

Движение вектора $x(t)$ происходит под воздействием измеримых функций $u(t)$ и $v(t)$, причем предполагаются выполненными условия, обеспечивающие продолжимость решения $x(t)$ на весь полубесконечный интервал времени.

В каждый момент времени t игрокам известно состояние игры $x_t(s) = x(t+s)$, $-\tau \leqslant s \leqslant 0$. Информированность второго игрока, с позиции которого игра будет рассматриваться, этим ограничивается. Будем также предполагать, что по заданной на некотором интервале времени функции $x(t)$ убегающий может мгновенно вычислять ее производные всех нужных порядков в любой точке интервала.

Опишем процесс игры. По известному текущему состоянию $x(\cdot)$ (точка в скобках означает, что рассматривается функция $x(t)$ в целом как элемент функционального пространства) второй игрок определяет число

$\varepsilon(x(\cdot)) > 0$, выбирает управление $v(t) = v(x(\cdot);\ t)$, $0 \leqslant t \leqslant \varepsilon(x(\cdot))$ и сообщает их противнику. На основании полученной информации первый игрок строит свое управление $u(t)$ на интервале $[0, \varepsilon(x(\cdot))]$. Паре выбранных управлений соответствует траектория $x(t)$.

Задача второго игрока состоит в уклонении траектории $x(t)$ от встречи с множеством M на всем интервале $[0, \infty)$ для любой начальной функции $g(t)$, $g(0) \overline{\in} M$, удовлетворяющей оговоренным ранее условиям. Если эта задача выполнима, то будем говорить, что в игре (1.1) возможно убегание.

2. Обозначим через L ортогональное дополнение к подпространству M в E^n и будем предполагать, что $\dim L = \nu \geqslant 2$. Пусть π — оператор ортогонального проектирования из E^n на L.

При заданной на интервале $[-\tau, 0]$ начальной функции $g(t)$ траектория $x(t)$ удовлетворяет на интервале $[0, \tau]$ обыкновенному дифференциальному уравнению

$$x^{\cdot} = h(x, t, u, v) \tag{2.1}$$

$$h(x, t, u, v) = f(x, g(t-\tau), u, v)$$

Будем предполагать, что функция $f(x, x_\tau, u, v)$ имеет производные всех нужных порядков по x и x_τ. Для дифференцируемой по x функции $\varphi(x, \xi)$ через $\nabla_x \varphi(x, \xi)$ обозначим матрицу Якоби, состоящую из первых производных функции по x, и образуем последовательность функций с помощью рекуррентного соотношения

$$\varphi^{(i)}(x, t, u, v) = \nabla_x \varphi^{(i-1)}(x, t, u, v)\, h(x, t, u, v) + \frac{\partial \varphi^{(i-1)}(x, t, u, v)}{\partial t} \tag{2.2}$$

$$\varphi^{(0)}(x, t, u, v) = \pi x, \quad t \in [0, \tau]$$

Функции $\varphi^{(i)}(x, t, u, v)$, как следует из соотношений (2.2), зависят от начальной функции $g(t)$ и ее производных до $i-1$ порядка. Желая подчеркнуть эту зависимость, обозначим $y_i = y_i(t) = (g(t-\tau), g^{(1)}(t-\tau), \ldots, g^{(i-1)}(t-\tau))$ и положим

$$\varphi^{(i)}(x, t, u, v) = f^i(x, y_i, u, v), \quad i = 1, 2, \ldots$$

Обозначим $I = \{1, \ldots, n\}$, а через I_i — совокупность таких индексов $j \in I$, что функция $\varphi^{(i)}(x, t, u, v)$ зависит от x_j, $i = 0, 1, \ldots$. Будем считать, что система (1.1) такова, что функции $\varphi^{(i)}(x, t, u, v)$ не зависят от $x_j(t-\tau)$ для

$$j \in I \setminus \bigcup_{m=0}^{i} I_m$$

Предположение 1. Существует номер k, $k \leqslant \nu - 1$, такой, что множества $f^i(x, y_i, U, V)$, $i = 1, \ldots, k-1$ состоят из единственных точек.

Положим $y_k = y$, $f^i(x, y_i, u, v) = f^i(x, y_i)$, $i = 1, \ldots, k-1$ и для некоторого подпространства R из L обозначим

$$\Psi_R = \{p\colon p \in R, \|p\| = 1\}$$

Предположение 2. Функция $f^k(x, y, u, v)$ зависит от v, существует подпространство $R \subset L$ и непрерывная по совокупности аргументов функция $l(x, y)$ такие, что

$$F(x,y) = \min_{p\in\Psi_R} \max_{v\in V} \min_{u\in U} (p, f^k(x,y,u,v) - l(x,y)) > 0$$

для всех y и $x \in M$, причем

$$\dim R \geqslant \max_{x, y} \operatorname{rank} B(x, y) \tag{2.3}$$

$$B(x, y) = \begin{pmatrix} \pi x \\ f^1(x, y_1) \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ f^{k-1}(x, y_{k-1}) \\ l(x, y) \end{pmatrix}$$

Теорема. Если выполнены предположения 1 и 2, то в дифференциально-разностной игре (1.1) возможно убегание, которое реализуется в классе кусочно-постоянных функций $v(t)$.

3. Для доказательства теоремы рассмотрим многозначное отображение

$$S(y) = \{x\colon F(x, y) \geqslant 0\}$$

В силу предположения 2 $S(y) \neq \varnothing$ при любом y. Кроме того, отображение $S(y)$ замкнуто и любая точка $x \in M$ в силу непрерывности функции $F(x, y)$ принадлежит $\operatorname{int} S(y)$.

Пусть задана начальная функция $g_0(t)$, $-\tau \leqslant t \leqslant 0$, причем

$$g_0(0) \in M,\quad g_0(0) \in \operatorname{int} S(y^0),\quad y^0 = (g_0(-\tau),\ g_0^{(1)}(-\tau), \ldots \\ \ldots,\ g_0^{(k-1)}(-\tau))$$

Зафиксируем элемент v_0 из V, удовлетворяющий условию

$$\max_{v\in V} \min_{u\in U} (p_0, f^k(g_0(0), y^0, u, v) = \min_{u\in U} (p_0, f^k(g_0(0), y^0, u, v_0)) \tag{3.1}$$

где вектор p_0 принадлежит Ψ_R и удовлетворяет системе линейных неравенств

$$(p_0, g_0(0)) \geqslant 0,\ (p_0,\ l(g_0(0), y^0)) \geqslant 0,\ (p_0, f^i(g_0(0), y_i^0)) \geqslant 0 \\ i = 1, \ldots k-1 \tag{3.2}$$

В силу соотношения (2.3) система (3.2) разрешима относительно p_0. Так как $g_0(0) \in \operatorname{int} S(y^0)$, то $F(g_0(0), y^0) > 0$ и тем более

$$\min_{u\in U} (p_0, f^k(g_0(0), y^0, u, v_0) - l(g_0(0), y^0)) > 0$$

Выберем окрестность точки $(g_0(0), y^0)$ радиуса r настолько малой, чтобы по непрерывности выполнялось неравенство

$$\min_{u\in U} (p_0, f^k(x, y, u, v_0) - l(g_0, (0), y^0)) \geqslant 0 \tag{3.3}$$

Зафиксируем окрестность каждой из точек $g_0(0)$, $g_0^{(i)}(-\tau)$, $i = 1, \ldots, k-1$ радиуса $r/2$.

Из предположений о множествах U и V и функции $f(x, x_\tau, u, v)$ с использованием леммы Гронуолла [11] получим, что существует такое t_1,

$0 < t_1 \leqslant \tau$, что траектория системы (2.1), начинающаяся в точке $g_0(0)$ с произвольным измеримым управлением $u(t)$ и $v(t) = v_0$, не выйдет из окрестности точки $g_0(0)$ радиуса $r/2$ в течение времени t_1.

Далее, поскольку функция $g_0(t)$ вместе со своими производными удовлетворяют на интервале $[-\tau, 0]$ условию Липшица с постоянной C, то на интервале $[-\tau, r/2C - \tau]$ они лежат в окрестности точек $g_0(-\tau)$, $g_0^{(i)}(-\tau)$, $i = 1, \ldots, k-1$ радиуса $r/2$.

Положим $\varepsilon(g_0(\cdot)) = \min\{t_1, r/2C\}$ и выберем управление убегания следующим образом: $v(g_0(\cdot), t) = v_0$, $0 \leqslant t \leqslant \varepsilon(g_0(\cdot))$. Тогда при произвольной измеримой функции $u(t)$, проинтегрировав систему (2.1) на интервале $[0, \varepsilon(g_0(\cdot))]$, получим траекторию $x(t)$.

Пусть задана начальная функция $g_0(t)$, $-\tau \leqslant t \leqslant 0$, такая, что $g_0(0) \overline{\in} \operatorname{int} S(y^\circ)$. Выберем окрестность точки $g_0(0)$ радиуса r таким образом, чтобы она не пересекалась с множеством M. Тогда существует такое $t_2 > 0$, что траектория системы (2.1), начинающаяся в точке $g_0(0)$ с произвольными измеримыми управлениями $u(t) \in U$ и $v(t) \in V$, не выйдет из окрестности радиуса r точки $g_0(0)$ в течение времени t_2.

Положим $\varepsilon(g_0(\cdot)) = t_2$, а управление убегания $v(g_0(\cdot), t) = v_0$, $0 \leqslant t \leqslant \varepsilon(g_0(\cdot))$, где $v_0 \in V$, но не обязательно удовлетворяет соотношению (3.1).

Используя стационарность уравнения (1.1) в момент $\theta > 0$, функцию $g(s) = x_\theta(s)$, $-\tau \leqslant s \leqslant 0$ можно взять за начальную. Из предположений о системе (1.1) следует, что функция $g(s)$ на интервале $[-\tau, 0]$ вместе со своими производными удовлетворяет условию Липшица с постоянной, зависящей от правой части (1.1) и множеств U и V. Таким образом, управление убегания можно строить указанным выше способом.

Рассмотрим проекцию полученной траектории $x(t)$, $0 \leqslant t \leqslant \varepsilon(g_0(\cdot))$, соответствующей начальной функции $g_0(t)$, $g_0(0) \in \operatorname{int} S(y^\circ)$ и выбранным управлениям, на направление p_0. Используя перестановочность операции проектирования и дифференцирования, согласно предположению 1 и формуле Тейлора [12] получим

$$(p_0, x(t)) = (p_0, g_0(0)) + \sum_{i=1}^{k-1} \frac{t^i}{i!}(p_0, f^i(g_0(0), y_i^\circ)) + \tag{3.4}$$
$$+ \int_0^t \frac{(t-\xi)^k}{k!}(p_0, f^k(x(\xi), y(\xi), u(\xi), v_0))\, d\xi$$

В свою очередь, проекция остаточного члена на направление p_0 представима в виде

$$\int_0^t \frac{(t-\xi)^k}{k!}(p_0, f^k(x(\xi), y(\xi), u(\xi), v_0))\, d\xi = \tag{3.5}$$
$$= \int_0^t \frac{(t-\xi)^k}{k!}(p_0, f^k(x(\xi), y(\xi), u(\xi), v_0) - l(g_0(0), y^\circ))\, d\xi +$$
$$+ \frac{t^{k+1}}{k+1}(p_0, l(g_0(0), y^\circ))$$

Из формулы (3.4) с учетом соотношений (3.5), (3.2) (3.3) следует, что

(3.6) $$(p_0, x(t)) > 0, \; 0 < t \leqslant \varepsilon (g_0(\cdot))$$

Обозначим график многозначного отображения $S(y)$

$$\operatorname{graf} S = \{(x, y),\; x \in S(y)\}$$

Покажем, что для любого состояния $g(\cdot)$, такого, что пара $(g(0), y^\circ) \in \in Z$, где Z — некоторый компакт из множества graf S, можно выбрать величину $\varepsilon(g(\cdot)) \geqslant \varepsilon_Z > 0$, где постоянная ε_Z зависит лишь от множества Z.

В силу предположения 2

$$\min_{(x, y) \in Z + \delta\Omega} F(x, y) = \Delta > 0$$

Здесь δ — произвольное положительное число, которое фиксируем для дальнейшего, Ω — единичный шар.

Рассмотрим функцию

$$\psi(p, x, y, u, v) = (p, f^k(x, y, u, v) - l(x, y))$$

Она равномерно непрерывна по совокупности аргументов на множестве $\Psi_R \times (Z + \delta\Omega) \times U \times V$. Следовательно, существует такое $\eta = \eta(\Delta) > 0$, $\eta \leqslant \delta$, что в окрестности любой точки $(x_0, y^\circ) \in Z$ радиуса не меньше η функция

$$\min_{u \in U} (p_0, f^k(x, y, u, v_0) - l(x_0, y^\circ))$$

где p_0, v_0 вычислены по точке (x_0, y°) в силу соотношений (3.1),(3.2), остается неотрицательной.

Так как $x(t)$ и $y(t)$ — абсолютно непрерывные функции, функция $z(t) = (x(t), y(t))$ в области $Z + \delta\Omega$ удовлетворяет условию Липшица с постоянной K, зависящей от множества $Z + \delta\Omega$. Тогда в течение времени η / K функция $z(t)$, исходящая из любой начальной точки $z_0 = (x_0, y_0) \in Z$, не покинет область $Z + \delta\Omega$, и, следовательно, можно выбрать

$$\varepsilon(g(\cdot)) = \varepsilon(z) \geqslant h / K > 0$$

для всех $z \in Z$.

Из способа построения стратегии убегания и полученного результата следует, что $\varepsilon(z) \geqslant \varepsilon_Z > 0$ для любого компактного множества Z.

Таким образом, если θ', θ'' — такие моменты времени, что $\theta'' = \theta' + \varepsilon(x_{\theta'}(\cdot))$, то на отрезке времени $[\theta', \theta'']$ траектория $x(t)$ не пересекает множество M.

По известному текущему состоянию управление убегания будем строить указанным ранее способом. Убедимся, что при этом траектория $x(t)$ не пересечет M на интервале $[0, \infty)$. Действительно, пусть $T > 0$ — любое конечное время. В силу предположений о параметрах игры (1.1) за это время кривая $z(t)$ не покинет некоторого компактного множества Z при любых управлениях. Поскольку можно выбрать $\varepsilon(z) \geqslant \varepsilon_Z > 0$ для $z \in Z$, то за время T произойдет не более чем $[T / \varepsilon_Z]$ смен управления, т. е. существует лишь конечное число моментов $t_1, t_2, \ldots, t_m$, таких, что в эти моменты менялся выбор управления убегания. При этом на каждом из отрезков $[t_i, t_{i+1}]$ управление $v(t)$ выбиралось так, что $x(t) \overline{\in} M$. Следовательно, и на всем отрезке $[0, T]$ $x(t) \overline{\in} M$, что, в силу произвольного выбора числа T, завершает доказательство.

Замечание 1. Ослабим в предположении 2 требование $F(x, y) > 0$, заменив его на следующее:

$$G(x, y) = \min_{p \in \Psi_R} \min_{u \in U} \max_{v \in V} (p, f^k(x, y, u, v) - l(x, y)) > 0$$

Тогда имеет место доказанная теорема с той лишь разницей, что убегание реализуется в классе измеримых функций $v(t)$ с использованием информации в момент t как о текущей позиции, так и об управлении $u(t)$ [5–8]. Доказательство этого факта аналогично доказательству теоремы и использует результат работы [13].

Замечание 2. Неравенство (2.3) можно заменить более простым $\dim R \geqslant k + 1$, так как

$$\max_{x, y} \operatorname{rank} B(x, y) \leqslant k + 1$$

4. Из теоремы и замечания 1 вытекает ряд следствий, удобных для анализа возможности убегания и построения управления убегания. Доказательства приведем лишь для случаев, не предполагающих информационную дискриминацию преследователя. Доказательства результатов в другом случае аналогичны.

Пусть правая часть системы (1.1) имеет вид

$$f(x(t), x(t-\tau), u, v) = f_1(x(t), x(t-\tau)) + f_2(u, v)$$

Следствие 1. Пусть существует двумерное подпространство R, $R \subset L$ и вектор l, такие, что

$$\min_{p \in \Psi_R} \max_{v \in V} \min_{u \in U} (p, f_2(u, v) - l) > 0 \tag{4.1}$$

$$\left(\min_{p \in \Psi_R} \min_{u \in U} \max_{v \in V} (p, f_2(u, v) - l) > 0\right)$$

Тогда в игре (1.1) возможно убегание, которое реализуется в классе кусочно-постоянных (измеримых) функций $v(t)$.

Доказательство. Пусть задана начальная функция $g_0(t)$, $-\tau \leqslant t \leqslant 0$, причем $g_0(0) \overline{\in} M$.

Выберем элемент v_0 из V из условия

$$\max_{v \in V} \min_{u \in U} (p_0, f_2(u, v)) = \min_{u \in U} (p_0, f_2(u, v_0)) \tag{4.2}$$

где $p_0 \in \Psi_R$ и удовлетворяет системе линейных неравенств

$$(p_0, g_0(0)) \geqslant 0, \quad (p_0, f_1(g_0(0), g_0(-\tau)) + l) \geqslant 0 \tag{4.3}$$

Тогда

$$(p_0, f_1(g_0(0), g_0(-\tau)) + \min_{u \in U} (p_0, f_2(u, v_0)) = (p_0, f_1(g_0(0), g_0(-\tau)) + $$
$$+ l) + \min_{u \in U} (p_0, f_2(u, v_0) - l) > 0$$

в силу соотношений (4.1) — (4.3).

Выберем окрестность точки $(g_0(0), g_0(-\tau))$ радиуса r настолько малой, чтобы по непрерывности выполнялось неравенство

$$(p_0, f_1(x, y)) + \min_{u \in U} (p_0, f_2(u, v_0)) \geqslant 0 \tag{4.4}$$

Выбрав окрестность каждой из точек $g_0(0)$, $g_0(-\tau)$ радиуса $r/2$, построим управление убегания аналогично тому, как это делалось при доказательстве теоремы. В результате интегрирования системы (1.2) с выбранным управлением $u(t)$ получим траекторию $x(t)$ на интервале $[0, \varepsilon(g_0(\cdot))]$, $\varepsilon(g_0(\cdot)) \leqslant \tau$. Из формулы (3.4) с учетом соотношений (4.3), (4.4) получим оценку для проекций полученной траектории на направление p_0

$$(p_0, x(t)) > 0, \quad 0 < t \leqslant \varepsilon(g_0(\cdot))$$

Покажем, что для любого состояния $g(\cdot)$, такого, что пара $(g(0), g(-\tau))$ принадлежит компакту Z из E^{2n}, можно выбрать $\varepsilon(g(\cdot)) \geqslant \varepsilon_Z > 0$, где постоянная ε_Z зависит лишь от множества Z.

В силу выбора p_0 в любой точке (x_0, y°) имеем $(p_0, f_1(x_0, y^\circ)) + \min\limits_{u\in U}(p_0, f_2(u, v_0)) \geqslant \Delta > 0$

$$\Delta = \min_{p\in\Psi_R} \max_{v\in V} \min_{u\in U}(p, f_2(u, v) - l)$$

функция $f_1(x, y)$ непрерывна по совокупности аргументов. Тогда существует такое число $\eta = \eta(\Delta) > 0$, что в окрестности любой точки $(x_0, y^\circ) \in Z$ радиуса не меньше η функция в левой части неравенства (4.4), где векторы p_0, v_0 вычислены по точке (x_0, y°) в силу соотношений (4.2), (4.3), остается неотрицательной.

Так как $x(t)$ — абсолютно непрерывная функция, то и функция $z(t) = (x(t), x(t-\tau))$ абсолютно непрерывная и, следовательно, в области $Z + \eta\Omega$ удовлетворяет условию Липшица с постоянной K, зависящей от множества $Z + \eta\Omega$.

В течение времени η / K функция $z(t)$, исходящая из любой точки $z_0 = (x_0, y^\circ) \in Z$, не покинет область $Z + \eta\Omega$ и, следовательно, можно выбрать

$$\varepsilon(g(\cdot)) = \varepsilon(z) \geqslant \eta / k > 0$$

для всех $z \in Z$.

Завершающая часть доказательства повторяет соответствующие рассуждения из доказательства теоремы.

Пусть правая часть системы (1.1) имеет вид

$$f(x(t), x(t-\tau), u, v) = A_1 x(t) + A_2(x)(t-\tau) + f_2(u, v)$$

A_1, A_2 — квадратные матрицы порядка $n \times n$.

Следствие 2. Пусть существует номер k, подпространство R, $R \subset L$, $\dim R \geqslant k + 1$ и вектор l, такие, что множества $\pi A_1^i f_2(U, V)$, $i = 0, \ldots, k-2$ состоят из единственных точек и

$$(\min_{p\in\Psi_R} \max_{v\in V} \min_{u\in U}(p, A_1^{k-1} f_2(u, v) - l) > 0 \tag{4.5}$$

$$(\min_{p\in\Psi_R} \min_{u\in U} \max_{v\in V}(p, A_1^{k-1} f_2(u, v) - l) > 0)$$

Тогда в игре (1.1) возможно убегание, которое реализуется в классе кусочно-постоянных (измеримых) функций $v(t)$.

Доказательство. Пусть задана начальная функция $g_0(t)$, $-\tau \leqslant t < 0$. Выберем элемент v_0 из V из условия

$$\max_{v\in V} \min_{u\in U}(p_0, A_1^{k-1} f_2(u, v)) = \min_{u\in U}(p_0, A_1^{k-1} f_2(u, v_0)) \tag{4.6}$$

где $p_0 \in \Psi_R$ и удовлетворяет системе линейных неравенств

$$(4.7)\qquad (p_0, g_0(0)) \geqslant 0$$

$$(p_0, A_1^{i+1}g_0(0) + \sum_{j=0}^{i} A_1^{i-j}A_2 g_0^{(j)}(-\tau) + A_1^i f_2(u, v)) \geqslant 0, \quad i = 0, \ldots, k-2$$

$$(p_0, A_1^k g_0(0) + \sum_{j=0}^{k-1} A_1^{k-j-1}A_2 g_0^{(j)}(-\tau) + l) \geqslant 0$$

Здесь $A_1^i f_2(u, v)$ — некоторые векторы, так как выполнено первое условие следствия 1. Поскольку $k + 1 \leqslant \nu$, то система (4.7) разрешима относительно p_0. Тогда

$$(4.8)\qquad \left(p_0, A_1^k g_0(0) + \sum_{j=0}^{k-1} A_1^{k-j-1}A_2 g_0^{(j)}(-\tau) + \min_{u\in U}(p_0, A_1^{k-1}f_2(u, v_0)\right) =$$

$$= (p_0, A_1^k g_0(0)) + (p_0, \sum_{j=0}^{k-1} A_1^{k-j-1}A_2 g_0^{(j)}(-\tau) + l) + \min_{u\in U}(p_0, A_1^{k-1}f_2(u, v_0) - l) > 0$$

в силу соотношений (4.5) — (4.7).

Выбор длины интервала постоянства $\varepsilon(g_0(\cdot))$ для управления убегания v_0 производится так же, как это делалось при доказательстве теоремы с использованием (4.8). Аналогичным образом может быть получена и оценка (3.6). Доказательство того факта, что для любого состояния $g(\cdot)$, такого, что набор $(g(\cdot), g(-\tau), g^{(1)}(-\tau), \ldots$ $\ldots, g^{(k-1)}(-\tau))$ принадлежит компакту Z из $E^{n(k+1)}$, можно выбрать $\varepsilon(g(\cdot)) \geqslant$ $\geqslant \varepsilon_Z > 0$, проводится аналогично доказательству теоремы и следствия 1. Заключительная часть повторяет доказательство теоремы.

Поступила 10 XI 1975

ЛИТЕРАТУРА

1. *Красовский Н. Н., Субботин А. И.* Позиционные дифференциальные игры. М., «Наука», 1974.
2. *Красовский Н. Н., Осипов Ю. С.* Линейные дифференциально-разностные игры. Докл. АН СССР, 1971, т. 197, № 4.
3. *Осипов Ю. С.* Альтернатива в дифференциально-разностной игре. Докл. АН СССР, 1971, т. 197, № 5.
4. *Осипов Ю. С.* Минимаксное поглощение в дифференциально-разностных играх. Докл. АН СССР, 1972, т. 203, № 1.
5. *Понтрягин Л. С., Мищенко Е. Ф.* Задача об уклонении от встречи в линейных дифференциальных играх. Дифференциальные уравнения, 1971, т. 7, № 3.
6. *Пшеничный Б. Н.* О задаче убегания. Кибернетика, 1975, № 4.
7. *Никольский М. С.* О линейной задаче убегания. Докл. АН СССР, 1974, т. 218, № 5.
8. *Никольский М. С.* Линейная дифференциальная игра убегания при наличии запаздываний. В сб.: Прикладная математика и программирование, вып. 10. Кишинев, «Штиинца», 1973.
9. *Чикрий А. А.* Задача уклонения в нелинейных дифференциальных играх. Кибернетика, 1975, № 3.
10. *Чикрий А. А.* Задача уклонения в нестационарных дифференциальных играх. ПММ, 1975, т. 39, вып. 5.
11. *Сансоне Дж.* Обыкновенные дифференциальные уравнения, т. 1. М., Изд-во иностр. лит., 1953.
12. *Картан А.* Дифференциальное исчисление. М., «Мир», 1971.
13. *Чикрий А. А.* Об одном классе нелинейных игр убегания. Кибернетика, 1976, № 3.