Прикладная математика и механика. Том 40, 1976

УДК 62—50

АЛЬТЕРНАТИВА В ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНО-РАЗНОСТНОЙ ИГРЕ СБЛИЖЕНИЯ — УКЛОНЕНИЯ С ФУНКЦИОНАЛЬНОЙ ЦЕЛЬЮ

В. И. Максимов

(Свердловск)

Для конфликтно-управляемой системы, описываемой дифференциально-разностным уравнением, изучается задача сближения — уклонения с функциональным целевым множеством при ограничениях на траекторию системы. Основной результат содержится в утверждении: либо существует стратегия первого игрока, разрешающая задачу сближения, либо существует стратегия второго игрока, разрешающая задачу уклонения. Статья примыкает к исследованиям [1–6].

1. Рассматривается система с последействием

$$x^{\cdot}(t) = f(t, x_t(s), u, v), \quad t_0 \leqslant t \leqslant \vartheta \tag{1.1}$$
$$u \in P \subset E_{r_1}, \quad v \in Q \subset E_{r_2}$$

Здесь x — n-мерный фазовый вектор; u и v — управляющие воздействия первого и второго игроков; P и Q — компакты; функционал $f(t, x_t(s), u, v)$ определен на произведении $[t_0, \vartheta] \times B_\omega \times P \times Q$, где B_ω — любое из пространств $C([-\omega, 0])$ или H_ω $(w = \text{const} \geqslant 0)$; $C([-\omega, 0])$ — пространство непрерывных n-мерных функций $x(s)$, $-\omega \leqslant s \leqslant 0$, с нормой $\|x(s)\|_{1\omega} = \max_s \|x(s)\|$; H_ω — гильбертово пространство n-мерных функций $x(s)$ с нормой

$$\|x(s)\|_{2\omega} = (\|x(0)\|^2 + \int_{-\omega}^{0} \|\dot{x}(s)\|^2 ds)^{1/2}$$
$$\|z\| = (z_1^2 + z_2^2 + \ldots + z_n^2)^{1/2}, \qquad z \in E_n$$

$f(t, x(s), u, v) = f^*(t, x(-\tau_1), \ldots, x(-\tau_m), \varphi(t, x(s)), u, v)$ при $B_\omega = H_\omega$. Функционалы $f(t, x(s), u, v)$, $\varphi(t, x(s))$ и $f^*(t, z_1, \ldots, z_m, z, u, v)$ непрерывны и удовлетворяют условию Липшица по $x(s)$ и $(z_1, \ldots, z_m, z)$ соответственно. Равномерно по $u \in P$ и $v \in Q$ для любого $x(s) \in B_\omega$ выполняются условия роста: если $B_\omega = C([-\omega, 0])$, то

$$\|f(t, x(s); u, v)\| \leqslant \zeta_1(t) + \zeta_2(t) \|x(s)\|_{1\omega}$$

если $B_\omega = H_\omega$, то

$$\|f^*(t, z_1, \ldots, z_m, \varphi(t, x(s)), u, v)\| \leqslant \zeta_1(t) + \zeta_2(t)\|x(s)\|_{2\omega} + \sum_{j=1}^{m} \eta_j(t)\|z_j\|$$

где $\zeta_i(t)$ — неотрицательные суммируемые на $[t_0, \vartheta]$ функции; $\eta_j(t)$ — неотрицательные суммируемые с квадратом на $[t_0, \vartheta]$ функции.

Обозначим

$$x(s;\ \delta) = x(s),\ x_t(s;\ \delta) = x(t+s;\ \delta), -\delta \leqslant s \leqslant 0\ (\delta \geqslant 0)$$

Заданы элемент $x_0(s;\ \omega)$ и непустые замкнутые множества

$$N \subset [t_0,\ \vartheta] \times B_\omega,\ M \subset [t_0 - \omega + \\ + \tau,\ \vartheta] \times B_\mu\ (\mu = \text{const} \geqslant 0,\ \tau = \max[\omega,\ \mu])$$

Цель выбора управления u, формируемого по принципу обратной связи $u[t] = u(t,\ x(t+s;\ \tau))$, состоит в том, чтобы обеспечить приведение отрезка траектории $x(t+s;\ \mu)$ на M не позже чем в момент ϑ, сохраняя реализующиеся в процессе движения отрезки траектории в заданном множестве N, какова бы ни была при этом измеримая реализация $v[t]$. Цель выбора управления v, формируемого по принципу обратной связи $v[t] = v(t,\ x(t+s;\ \tau))$,— обеспечить уклонение движения от множества M внутри N или вывести это движение из N до момента попадания его на M.

Подобные задачи для систем с последействием изучались в [2,3], где доказаны соответствующие альтернативные утверждения. В данной работе в отличие от работ [2,3] эти задачи изучаются при дополнительных предположениях о наличии функциональных фазовых ограничений и для более общих целевых множеств.

Стратегией U первого игрока называется правило, сопоставляющее каждой паре $p = \{t,\ x(s;\ \tau)\},\ t \geqslant t_0$,— позиции игры, непустое замкнутое множество $U(p) \subset P$.

При $\mu > \omega,\ t = t_0$ полагаем

$$x(s;\ \tau) = x_0(s;\ \omega),\ s \in [-\omega,\ 0]$$
$$x(s;\ \tau) = x_0(-\omega),\ s \in [-\tau,\ -\omega))$$

Пусть Δ — некоторое конечное покрытие интервала $[t_0,\ \vartheta]$ промежутками $\tau_i \leqslant t < \tau_{i+1},\ \tau_0 = t_0,\ i = 0,\ 1, \ldots;\ \delta = \max_i(\tau_{i+1} - \tau_i)$. Обозначим символом $x_\Delta[t;\ p_0,\ U]$ абсолютно непрерывную при $t_0 \leqslant t \leqslant \vartheta$ функцию $x_\Delta[t]$, такую, что $x_\Delta[t_0 + s;\ \tau] = x_0(s;\ \tau)$ и при почти всех $t \in [t_0,\ \vartheta]$

$$x_\Delta^{\cdot}[t] \in F(t,\ x_\Delta[t+s;\ \omega],\ u[\tau_i])$$

где

$$u[\tau_i] \in U(\tau_i,\ x_\Delta[\tau_i + s;\ \tau]),\ F(t,\ x_\Delta[t+s;\ \omega]$$
$$u[\tau_i]) = \overline{\text{co}}\ \{f(t,\ x_\Delta[t+s;\ \omega],\ u[\tau_i],\ v)\ v \in Q\}$$

Назовем [2] движением $x[t] = x[t,\ p_0,\ U]$ непрерывную функцию со свойством: существует последовательность покрытий $\{\Delta_j\}$ с $\{\delta_j\} \to 0$, такая, что некоторая последовательность функций $\{x_{\Delta_j}[t;\ p_0,\ U]\}$ сходится в $C([t_0,\ \vartheta])$ к $x[t]$. Аналогично определяются стратегия V и движения $x[t;\ p_0,\ V]$ и $x[t;\ p_0,\ U,\ V]$. Обозначим: $X(\cdot;\ p_0,\ V)$ — пучок всех движений $x[t] = x[t;\ p_0,\ V]$ при $t \in [t_0,\ \vartheta]$, $X_\delta(t_* + s;\ p_0,\ V) = \{x_{t_*}(s;\ \delta) \mid x(t) = x[t;\ p_0,\ V]\}$.

Справедливо следующее утверждение [2, 3]:

Лемма 1.1. Множества $X(\cdot; p_0, U)$, $X(\cdot; p_0, V)$ и $X(\cdot; p_0, U, V)$ компактны в себе в $C([t_0, \vartheta])$ и имеют место включения

$$X(\cdot; p_0, U, V) \subset X(\cdot; p_0, U)$$
$$X(\cdot; p_0, U, V) \subset X(\cdot; p_0, V)$$

Задача 1.1. Найти стратегию $U^e(t, x(s; \tau))$, которая обеспечивает встречу

$$\{\tau_*, x[\tau_* + s; \mu]\} \in M$$
$$\{t, x[t + s; \mu]\} \notin M, \quad t_0 + \tau - \omega \leqslant t < \tau_*$$
$$\{\xi, x[\xi + s; \omega]\} \notin N, \quad t_0 \leqslant \xi < \tau_* \leqslant \vartheta$$

для всякого движения $x[t] = x[t; p_0, U^e]$ при $\tau_* \geqslant t_0 + \tau - \omega$.

Задача 1.2. Найти окрестности $H(N)$ и $G(M)$ и стратегию $V^e(t, x(s; \tau))$, которая исключает встречу

$$\{\tau_*, x[\tau_* + s; \mu]\} \in G(M)$$
$$\{t, x[t + s; \omega]\} \in H(N), \quad t_0 \leqslant t < \tau_* \leqslant \vartheta$$

для всякого движения $x[t] = x[t; p_0, V^e]$ при $\tau_* \geqslant t_0 + \tau - \omega$.

Задача 1.3 (1.4). Решить задачу 1.1 (1.2) при $\tau_* = \vartheta$.

2. Ниже указывается способ решения задач 1.1—1.4, основанный на понятии экстремальной стратегии из [2-4]. В дальнейшем предполагается выполненным

Условие А. Каковы бы ни были вектор $l \in E_n$ и пара $\{t, x(s)\} \in [t_0, \vartheta] \times B_\omega$, справедливо равенство

$$\min_{u \in P} \max_{v \in Q} l' f(t, x(s), u, v) = \max_{v \in Q} \min_{u \in P} l' f(t, x(s), u, v)$$

Пусть каждому значению параметра t $(t_0 \leqslant t \leqslant \vartheta)$ поставлено в соответствие некоторое множество $W(t) \subset B_\tau$. Следуя [1,2], скажем, что множества $W(t)$, $t_0 \leqslant t \leqslant \vartheta$ являются u-стабильными (v-стабильными), если, каковы бы ни были числа $t_0 \leqslant t_* < t^* \leqslant \vartheta$, элемент $x_*(s; \tau) \in W(t_*)$ и стратегия $V(U)$, существует движение

$$x_V[t] = x[t; \{t_*, x_*(s; \tau)\}, V]$$
$$(x_U[t] = x[t; \{t_*, x_*(s; \tau)\}, U])$$

такое, что

$$x_V[t^* + s; \tau] \in W(t^*) \; (x_U[t^* + s; \tau] \in W(t^*))$$

или

$$\{t, x_V[t + s; \mu]\} \in M \; (\{t, x_U[t + s; \omega]\} \notin H(N))$$

хотя бы при одном $t \in [t_*, t^*]$.

В дальнейшем используется также понятие сильно стабильных множеств из [2].

Выберем произвольный элемент $x(s) \in B_\tau$ и положим при $W(t) \neq \varnothing$

(2.1) $$r(x(s), W(t)) = \inf_{y(s) \in W(t)} \| x(s) - y(s) \|_\tau$$

($\|\cdot\|_\tau$ — норма в B_τ).

Экстремальной к множествам $W(t)$, $t_0 \leqslant t \leqslant \vartheta$ назовем стратегию U^e, задаваемую множествами $U_e(t, x(s; \tau))$ вида: если $W(t) = \varnothing$, то

$U_e(t, x(s;\tau)) = P$; если $W(t) \neq \varnothing$, то

$$U_e(t, x(s;\tau)) = \{u_e \mid \max_{v\in Q}(x(0)-z)' f(t, x(s;\omega), u_e, v) = \\ = \min_{u\in P}\max_{v\in Q}(x(0)-z)' f(t, x(s;\omega), u, v)\}$$

Здесь z — произвольный элемент множества $Z(t, x(s;\tau))$; $Z(t, x(s;\tau))$ — совокупность элементов, ближайших к $x(0)$ в E_n из множества частичных пределов последовательности $\{x^{(k)}(0)\}$, являющейся 0-сечением [2] какой-либо минимизирующей для $x(s;\tau)$ последовательности $\{y\} = \{x^{(k)}(s;\tau)\}$ из (2.1); штрих означает транспонирование.

Аналогично определяется стратегия V^e.

Справедлива

Лемма 2.1. Пусть начальная позиция $p_0 = \{t_0, x_0(s;\tau)\}$ такова, что

(2.2) $$x_0(s;\tau) \in W(t_0)$$

Если множества $W(t)$, $t_0 \leqslant t \leqslant \vartheta$ сильно u (v)-стабильны, то экстремальная к ним стратегия U^e (V^e) обеспечивает равенство

$$r(x_t[s;\tau], W(t)) = 0, \quad t_0 \leqslant t \leqslant \vartheta$$

для любого $x[t] = x[t; p_0, U^e]$ $(x[t] = x[t; p_0, V^e])$.

Обозначим: $W_\delta(t) = \{x(s) \in H_\delta \mid x(0) = y(0),\ x(s) = y(s;\tau)$ при почти всех $-\delta \leqslant s \leqslant 0,\ y(s;\tau) \in W(t)\}$; $\bar{K}$ — замыкание множества K; $X_\delta(t_2, x(s;\tau), t_1, V) = \{y = \{t, z(s)\} \mid t \in [t_1, t_2],\ z(s) = x[t+s;\delta],\ x[\cdot] \in X(\cdot; \{t_1, x(s;\tau)\}, V)\}$; $M(t_*)$ $(N(t_*))$ — сечение множества M (N) гиперплоскостью $t = t_*$; $W = \{\{t, x(s;\tau)\} \mid t \in [t_0, \vartheta],\ x(s;\tau) \in W(t)\}$.

Подобно теореме 2.2 из [4] доказывается

Лемма 2.2. Пусть существуют u-стабильные непустые множества $W(t)$, $t_0 \leqslant t \leqslant \vartheta$, такие, что $W_\omega(t) \subset N(t)$ при всех $t \in [t_0, \vartheta]$ и $W_\mu(\vartheta) \subset M(\vartheta)$. Тогда при выполнении условий (2.2) стратегия U^e, экстремальная к этим множествам, решает задачу 1.1.

Имеет место

Лемма 2.3. Пусть непустые множества $W(t)$, $t_0 \leqslant t \leqslant \vartheta$ v — стабильны и существует замкнутая окрестность $G_1(M)$ множества M со свойствами: $W \cap G_1(M) = \varnothing$. Тогда найдется число $\alpha > 0$, такое, что экстремальная к ним стратегия V^e решает задачу 1.2 при всех $x_0(s;\tau)$ из α-окрестности множества $W(t_0)$.

Опираясь на леммы 1.1 и 2.1, можно проверить, что справедлива

Лемма 2.4. Пусть система множеств $D(t) \subset B_\tau$, $t_0 \leqslant t \leqslant \vartheta$, u (v)-стабильна, тогда u (v)-стабильна и система множеств $\bar{D}(t)$, $t_0 \leqslant t \leqslant \vartheta$.

Уберем из пространства $\{t, x(s;\tau)\}$ все те позиции $\{t_*, x_*(s;\tau)\}$ $(t_* \in [t_0, \vartheta])$, для каждой из которых разрешима задача 1.2 (1.4) на отрезке $[t_*, \vartheta]$. Символом $W^u(t_*)$ $(W^\circ(t_*))$ обозначим замкнутое в B_τ множество всех оставшихся позиций.

Лемма 2.5. Множества $W^u(t)$, $t_0 \leqslant t \leqslant \vartheta$ u-стабильны. Если $x_0(s;\tau) \in W^u(t_0)$, то экстремальная к ним стратегия U^e решает задачу 1.1.

Доказательство этого утверждения может быть проведено по планам доказательства аналогичных утверждений из [1–3]. Предполагая, что множества $W^u(t)$, $t_0 \leqslant t \leqslant \vartheta$ не являются u-стабильными, заключаем: найдутся $t_* \in [t_0, \vartheta]$, $t^* \in (t_*, \vartheta]$, $x_*(s; \tau) \in W^u(t_*)$ и стратегия V_1, такие, что

$$X_\tau(t^* + s; \{t_*, x_*(s; \tau)\}, V_1) \cap W^u(t^*) = \varnothing$$

$$X_\mu(t^*, x_*(s; \tau), t_*, V_1) \cap M = \varnothing$$

По определению множеств $W^u(t)$ для всякого $x_k(s; \tau) \in X_\tau(t^* + s; \{t_*, x_*(s; \tau)\}, V_1)$ при некоторых $V = V(x_k)$, $G(M) = \sigma_k(M)$, $H(N) = H_k(N)$ разрешима задача 1.2. Рассмотрим множество

$$W(x_k) = \{\{t, x(s; \tau)\} \mid t^* \leqslant t \leqslant \tau_k(x[\cdot])$$

$$x(s; \tau) = x_\tau[t + s; \{t^*, x_k(s; \tau)\}, V(x_k)]$$

где ($\tau_k(x[\cdot])$ — момент времени, когда движение $x[t]$ впервые покидает область $H_k(N)$). Можно доказать, что множества $W_0(t, x_k)$, $t^* \leqslant t \leqslant \vartheta$, где $W_0(t, x_k) = W(t, x_k)$, если $W(t, x_k) \neq \varnothing$, $W_0(t, x_k) = \varnothing$, если $W(t, x_k) = \varnothing$, v-стабильны. С помощью леммы 2.3 нетрудно проверить, что стратегия $V^e(x_k)$, экстремальная к $W_0(t, x_k)$, $t^* \leqslant t \leqslant \vartheta$, решает задачу 1.2 при некоторых $\beta_k > 0$, $G_k{}^*(M)$, $H_k{}^*(N)$ для всех $x(s; \tau) \in S(\beta_k)$ ($S(\beta_k)$ — окрестность радиуса β_k в B_τ элемента $x_k(s; \tau)$).

В силу компактности множества $X_\tau(t^* + s; \{t_*, x_*(s; \tau)\}, V_1)$ в B_τ (лемма 1.1), его можно покрыть конечной системой таких окрестностей $S(\beta_k)$, $k = 1, 2, \ldots, q$. Рассмотрим множество $W_1 = \{W_1(t), \ t_* \leqslant t \leqslant \vartheta\}$ тех пар $\{t, x(s; \tau)\}$, $x(s; \tau) \in W_1(t)$, которые удовлетворяют условию

$$t_* \leqslant t \leqslant t^*, \ x(s; \tau) = x_\tau[t + s; \{t_*, x_*(s; \tau)\}, V_1]$$

или условию

$$t^* \leqslant t \leqslant \tau^*(x[\cdot]), \ x(s; \tau) = x_\tau[t + s; \ \{t^*, x(s; \tau)\}, \ V^e(x_k)]$$

Здесь $x(s; \tau)$ — произвольный элемент из $S(\beta_k)$; $\tau^*(x[\cdot])$ — момент времени, когда движение $x[t]$ впервые покидает область

$$H(N) = \bigcap_k H_k{}^*(N).$$

Покажем v-стабильность множеств $W_1(t)$, $t_* \leqslant t \leqslant \vartheta$. Предположим от противного, что существуют моменты t_1 и t_2 из $[t_*, \vartheta]$ ($t_2 > t_1$), элемент $x_1(s; \tau) \in W_1(t_1)$ и стратегия U_1, такие, что

$$\{t, x_\omega[t + s; \{t_1, x_1\}, U_1] \in H(N), \ t_1 \leqslant t \leqslant t_2 \tag{2.3}$$

$$X_\tau(t_2 + s; \{t_1, x_1(s; \tau)\}, U_1) \cap W_1(t_2) = \varnothing \tag{2.4}$$

Пусть, например, $t_1 > t^*$. По способу построения W_1 найдутся номер k_1, элемент $g(s; \tau) \in S(x_{k_1})$ и движение $x^\circ[t] = x[t; \{t^*, g(s; \tau)\}, V^e(x_{k_1})]$, такие, что $x_1(s; \tau) = x^\circ[t + s; \tau]$, $t_1 \leqslant \tau^*(x^\circ[\cdot])$.

Рассмотрим произвольное движение

$$x^*[t] = x[t; \{t_1, x_1(s; \tau)\}, U_1, V^e(x_{k_1})]$$

Если $\tau^* = \tau^*(x^*[\cdot]) \leqslant t_2$, то по построению $W^u(t)$ и в силу леммы 1.1 $\{\tau^*, x^* \cdot [\tau^* + s; \omega]\} \notin H(N)$, что противоречит (2.3). Если $\tau^* > t_2$, то $x^*[t_2 + s; \tau] \in W_1 \cdot (t_2)$, что противоречит (2.4). Аналогично проверяется v-стабильность множеств $W_1(t)$, $t_* \leqslant t \leqslant \vartheta$ и при $t_1 \leqslant t^*$.

Ясно, что $W_1 \cap \overline{G}(M) = \varnothing$, какова бы ни была замкнутая окрестность множества M $\overline{G}(M) \subset \bigcap_k \overline{G}_k{}^*(M)$. С помощью леммы 2.3 устанавливается (так как $x_*(s; \tau) \in W_1(t_*)$), что экстремальная к множествам $W_1(t)$, $t_0 \leqslant t \leqslant \vartheta$ стратегия V^e решает задачу 1.2 при некоторых $H(N)$ и $G(M)$. Однако это возможно лишь при $x_*(s; \tau) \notin W(t_*)$.

Последнее свойство множеств $W^u(t)$, $t_0 \leqslant t \leqslant \vartheta$ следует из способа их построения и леммы 2.2. Лемма доказана.

Подобно лемме 2.5 доказывается

Лемма 2.6. Множества $W^\circ(t)$, $t_0 \leqslant t \leqslant \vartheta$ сильно u-стабильны. Если $x_0(s;\tau) \in W^\circ(t_0)$, то экстремальная к ним стратегия U^e решает задачу 1.3.

Из лемм 2.2, 2.5 и 2.6 следуют

Альтернатива 1. Либо $x_0(s;\tau) \in W^u(t_0)$ и тогда разрешима задача 1.1 (причем в качестве стратегии $U^e(t, x(s;\tau))$ может быть выбрана стратегия U^e, экстремальная к множествам $W^u(t)$, $t_0 \leqslant t \leqslant \vartheta$)), либо $x_0(s;\tau) \notin W^u(t_0)$ и тогда разрешима задача 1.2.

Альтернатива 2. Либо $x_0(s;\tau) \in W^\circ(t_0)$ и тогда разрешима задача 1.3 (причем в качестве стратегии $U^e(t, x(s;\tau))$ может быть выбрана стратегия U^e, экстремальная к множествам $W^\circ(t)$, $t_0 \leqslant t \leqslant \vartheta$)), либо $x_0(s;\tau) \notin W^\circ(t_0)$ и тогда разрешима задача 1.4.

3. Укажем два способа построения сильно u (v)-стабильных множеств, аналогичные [1].

Построим включение

$$\dot{x}(t) \in \Phi(t, x(t+s;\omega)), \quad t_0 \leqslant t \leqslant \vartheta \tag{3.1}$$
$$\Phi(t, x(s;\omega)) = \bigcap_{v\in Q} F(t, x(s;\omega), v)$$

Лемма 3.1. Пусть $\Phi(t, x(s;\omega)) \neq \varnothing$ для каждой пары $\{t, x(s;\omega)\}$ из некоторой области $D \in [t_0, \vartheta] \times B_\omega$ и существует абсолютно непрерывное решение $x = w(t)$ $(t_0 \leqslant t \leqslant \vartheta)$ включения (3.1), удовлетворяющее условиям

$$w(t_0+s;\omega) = x_0(s;\omega), \quad w(\vartheta+s;\mu) \in M(\vartheta)$$
$$\{t, w(t+s;\omega)\} \in D \cap N, \quad t_0 \leqslant t \leqslant \vartheta$$

Пусть также в некоторой открытой области D_1, такой, что $\{t, w(t+s;\omega)\} \in D_1$, $t_0 \leqslant t \leqslant \vartheta$, выполнено условие A. Тогда стратегия U^e, экстремальная к дорожке

$$W = [\{t, x(s;\tau)\} \mid t_0 \leqslant t \leqslant \vartheta, \ x(s;\tau) = w(t+s;\tau)]$$

обеспечивает перемещение всех позиций $\{t, x_\tau[t+s; p_0, U^e]\}$ по этой дорожке вплоть до встречи с $\{\vartheta, M(\vartheta)\}$.

Пусть для каждой пары $\{t, x(s;\omega)\}$ из некоторой открытой области D_2, такой, что $N \subset D_2$ и $\{t_0, x_0(s;\omega)\} \in D_2$, выполнено условие A и функция

$$\varkappa(t, x(s;\omega), l) = -\max_{u\in P}\min_{v\in Q} l' f(t, x(s;\omega), u, v)$$

выпукла по l. Обозначим: $x(t) = x(t; t_0, x_0(s;\omega))$ — произвольное решение включения

$$\dot{x}(t) \in R(t, x(t+s;\omega)), \quad t_0 \leqslant t \leqslant \vartheta \tag{3.2}$$
$$R(t, x(s;\omega)) = \bigcap_{u\in P} F(t, x(s;\omega)), u)$$

и $\tau = \tau(x(\cdot))$ — первый момент, когда либо $\{\tau, x(\tau+s;\omega)\} \notin D_2$, либо $\{\tau, x(\tau+s;\mu)\} \in M$.

Лемма 3.2. Если $R(t, x(s;\omega)) \neq \varnothing$ при $\{t, x(s;\omega)\} \in D_2$ и существует решение $x(t) = x(t; t_0, x_0(s;\omega))$ включения (3.2), для которого позиция $\{t, x(t+s; \tau)\}$ минует M до выхода из N или минует M до момента ϑ, то стратегия V^e, экстремальная к дорожке $\{t, x(t+s; \tau)\}$, решает задачу 1.2. В противном случае стратегия U^e, экстремальная к множеству $W = [\{t, x(s; \tau)\} \mid t_0 \leqslant t \leqslant \tau(x(\cdot)), x(t) = x(t; t_0, x_0(s; \omega))]$, решает задачу 1.1.

Примечания. 3.1. Из полученных результатов подобно (см. [1], § 18) можно получить решение следующих задач.

Задача 1.5. Найти стратегию $U = U_e(t, x(s; \tau))$, удовлетворяющую условию

$$\sup_{x[\cdot]} I(x_{U^e}[\vartheta + s; \mu]) = \min_U \sup_{x[\cdot]} I(x_U[\vartheta + s; \mu])$$

$$(x_U[t] = x[t; \{t_0, x_0(s; \tau)\}, U])$$

Задача 1.6. Найти стратегию $V = V_e(t, x(s; \tau))$, удовлетворяющую условию

$$\inf_{x[\cdot]} I(x_{V^e}[\vartheta + s; \mu]) = \max_V \inf_{x[\cdot]} I(x_V[\vartheta + s; \mu])$$

$$(x_V[t] = x[t; \{t_0, x_0(s; \tau)\}, U])$$

Функционал $I(x(s; \mu))$ предполагается полунепрерывным снизу (сверху) в B_μ.

3.2. Альтернативы 1 и 2 также справедливы, если под движением $x[t; \{t_0, x(s; \tau)\}, U]$ $(x[t; \{t_0, x(s; \tau)\}, V])$ понимать непрерывную функцию $x[t]$ со свойствами: существует последовательность покрытий $\{\Delta_j\}$ с $\{\delta_j\} \to 0$ при $j \to \infty$, такая, что последовательность функций

$$\{x_{\Delta_j}[t; \{t_0, x_j(s; \tau)\}, U]\}$$

$$(\{x_{\Delta_j}[t; \{t_0, x_j(s; \tau)\}, V]\})$$

сходится в $C([t_0, \vartheta])$ к $x[t]$, причем $x_j(s; \tau) \to x(s; \tau)$ в B_τ при $j \to \infty$. В этом случае пучок

$$X(\cdot; \{t_0, x(s; \tau)\}, U)\ (X(\cdot; \{t_0, x(s; \tau)\}, V))$$

полунепрерывен сверху по включению [1] в каждой точке $x(s; \tau) = x_*(s; \tau)$ (относительно параметра $x_*(s; \tau)$ и в метрике $C([t_0, \vartheta])$).

При таком определении движения игра сближения — уклонения с запоминанием информации [1] (с полной памятью [6]) будет частным случаем задач 1.1 и 1.2, если функционал $\varphi = \varphi(x[t], t_0 \leqslant t < \infty)$ (см. [1], стр. 427) удовлетворяет условию: $\varphi = \varphi(x[t], t_0 \leqslant t \leqslant \vartheta_1)$, где ϑ_1 — некоторое положительное число. При этом

$$\omega = 0,\ \mu = \vartheta_1,\ B_\delta = C([-\delta, 0]),\ N = B_\omega$$

$$(\omega = \mu = \vartheta_1,\ B_\delta = C([-\delta, 0])).$$

Автор благодарит Ю. С. Осипова за постановку задачи и ценные советы.

Поступила 7 VI 1976

ЛИТЕРАТУРА

1. *Красовский Н. Н., Субботин А. И.* Позиционные дифференциальные игры. М., «Наука», 1974.
2. *Осипов Ю. С.* Дифференциальные игры систем с последействием. Докл. АН СССР, 1971, т. 196, № 4.
3. *Осипов Ю. С.* Альтернатива в дифференциально-разностной игре. Докл. АН СССР, 1971, т. 197, № 5.
4. *Осипов Ю. С.* Дифференциальная игра наведения для систем с последействием. ПММ, 1971, т. 35, вып. 1.
5. *Куржанский А. Б.* Дифференциальные игры сближения в системах с запаздыванием. Дифференциальные уравнения, 1971, т. 7, № 8.
6. *Субботин А. И.* Экстремальные стратегии в дифференциальных играх с полной памятью. Докл. АН СССР, 1972, т. 206, № 3.