Прикладная математика и механика. Том 40, 1976

УДК 539.3

КОНТАКТНЫЕ ЗАДАЧИ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ ПРИ НАЛИЧИИ ИЗНОСА

Л. А. Галин

(Москва)

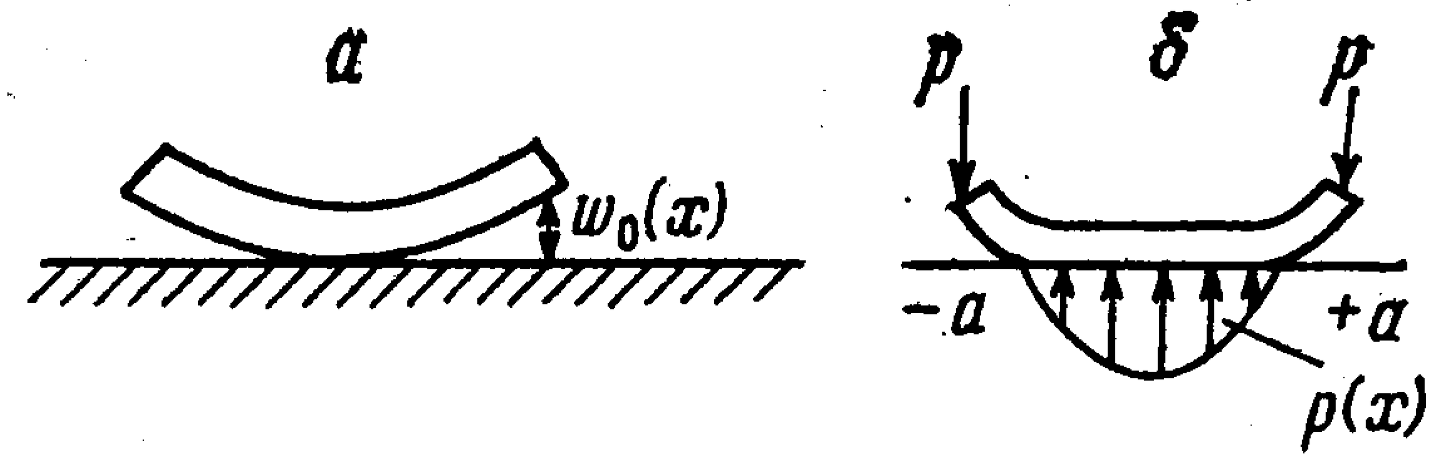
Даются решения контактных задач теории упругости при наличии износа для двух случаев.

В п. 1 рассматриваются задачи, когда первоначально изогнутая балка контактирует с полуплоскостью.

Одно из исходных предположений в рассматриваемых задачах состоит в том, что расстояние между некоторыми направляющими, в которых скользит контактирующее тело, и границей полуплоскости остается неизменным. В п. 1 статьи речь идет о контактировании изогнутой балки с полуплоскостью, причем предполагается, что происходит износ этой полуплоскости. При этом давление, возникающее между балкой и полуплоскостью, в результате износа будет уменьшаться.

Естественно считать, что давление в крайних точках площадки контакта в этом случае будет равно нулю. Как известно, для установления условий, характеризующих давление в этих крайних точках для различных видов контактных задач, необходимо делать дополнительные предположения. На этих вопросах остановимся в дальнейшем.

1. Будем полагать, что первоначальная форма достаточно тонкой балки определяется начальным прогибом $w_0(x)$. Пусть начальная форма балки будет такой, как это изображено на фиг. 1, *а*. После деформации в результате контактирования с жесткой полуплоскостью ее форма будет такой, как на фиг. 1, *б*. Считаем, что в данном случае балка симметрична и контактирует с упругой полуплоскостью на участке $-a < x < +a$.



Фиг. 1

Будем в дальнейшем полагать, что износ носит абразивный характер. В этом случае количество удаленного материала при износе можно считать пропорциональным работе сил трения. Результаты экспериментальных исследований, касающихся абразивного износа, содержатся в работах [1,2]. В случае, когда при износе происходит приработка поверхностей, в особенности когда материалы контактирующих тел одинаковы, износ может носить нелинейный характер.

При сделанных предположениях скорость изменения прогиба δ будет

(1.1) $$\delta = K^* v\tau = K\sigma, \quad K = K^{**} vK^*$$

Здесь v — осредненный модуль скорости перемещения балки (в направлении, перпендикулярном плоскости чертежа). Тангенциальное усилие $\tau = K^{**}\sigma$, K^{**} — коэффициент трения, K^* — коэффициент пропорциональности между работой сил трения и количеством удаленного материала.

Выше было указано, что при исследовании делается предположение о равенстве нулю давлений на краях площадки контакта. Это будет иметь место, например, в случае, когда коэффициент пропорциональности между скоростью износа и интенсивностью работы сил трения не всегда постоянный, а при достаточно малых значениях давления равен нулю, причем достаточно, чтобы это имело место только для начальной стадии процесса. Ряд экспериментальных данных подтверждает сделанное предположение.

В результате износа может несколько измениться положение крайних точек площадки контакта. Однако в связи с тем, что величина износа мала по сравнению с размерами площадки контакта, этим обстоятельством можно пренебречь. В результате прогиб балки в момент времени t будет

(1.2) $$w(x,t) = w_0(x) - K\int_0^t p(x,\tau)\,d\tau$$

Давление $p(x, t)$ связано с прогибом следующим соотношением:

$$p(x,t) = EI\frac{d^4}{dx^4}w(x,t)$$

На основании этого получим из (1.2)

(1.3) $$w(x,t) = w_0(x) - KEI\frac{d^4}{dx^4}\int_0^t w(x,\tau)\,d\tau$$

Будем искать частное решение этого уравнения в следующей форме

(1.4) $$w_\beta(x, t) = e^{-\beta t} w_\beta(x)$$

Подставляя (1.4) в (1.3), найдем

$$(e^{-\beta t} - 1)\, w_\beta(x) = KEI\left(\frac{1}{\beta}(e^{-\beta t} - 1)\right)\frac{d^4 w_\beta}{dx^4}$$

Это равенство будет иметь место в случае, когда $w_\beta(x)$ удовлетворяет уравнению

(1.5) $$\frac{d^4 w_\beta(x^*)}{dx^{*4}} - \left(\frac{\pi}{a}\right)^4 \frac{\beta}{EIK} w_\beta(x^*) = 0, \quad x^* = \frac{\pi}{a}x$$

Общее решение этого уравнения

(1.6) $$w_\beta(x^*) = \lambda_1 \sin \nu x^* + \lambda_2 \cos \nu x^* + \lambda_3 \operatorname{sh} \nu x^* + \lambda_4 \operatorname{ch} \nu x^*$$

$$\nu = \sqrt[4]{\frac{\beta}{EIK}}\frac{\pi}{a}$$

Можно указать в явном виде собственные значения и собственные функции для уравнения (1.5). При этом должны быть использованы краевые условия для функции $w_\beta(x^*)$ в точках $x^* = -\pi$, $x^* = +\pi$. Эти условия следующие:

$$w_\beta(x^*) = w_\beta''(x^*) = 0 \quad \text{при } x^* = \pm\pi \quad \text{(подпертые концы)} \tag{1.7}$$

$$w_\beta(x^*) = w_\beta'(x^*) = 0 \quad \text{при } x^* = \pm\pi \quad \text{(заделанные концы)}$$

Используя условия (1.7) применительно к функции (1.6), получим четыре однородных уравнения

$$\sum_{k=1}^{4} \alpha_{ki}(\nu)\lambda_k = 0 \quad (i = 1, 2, 3, 4)$$

Это приводит к следующему условию:

$$|\alpha_{ki}(\nu)| = 0$$

В результате получим трансцендентное уравнение для определения собственного значения ν_n. Каждому собственному значению ν_n соответствует фундаментальная функция φ_n. Эти функции могут быть нормированы, причем, как известно, они образуют полную систему ортогональных функций.

На основании второго равенства (1.6) получим выражение для β_n

$$\beta_n = \frac{a^4EIK}{\pi^4}\nu_n^4$$

Заданная функция $w_0(x)$, которая представляет значение $w(t, x)$ при $t = 0$, может быть разложена в ряд по указанным выше ортогональным функциям φ_n

$$w_0(x^*) = \sum_{n=1}^{\infty} K_n\varphi_n(x)$$

В таком случае решение задачи получаем в следующем виде:

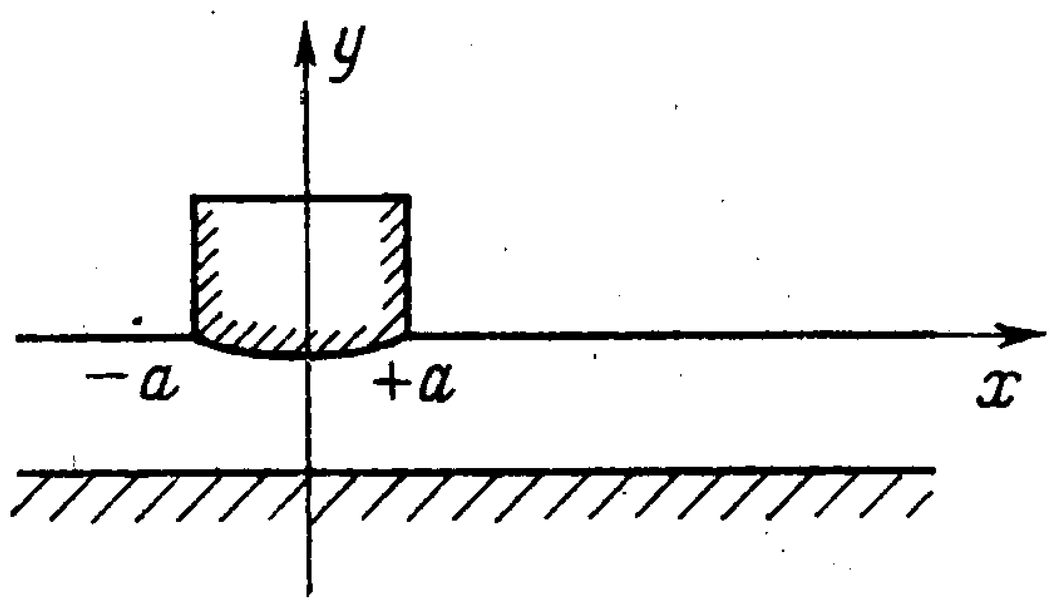
$$w(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} K_n \exp\left(-\frac{a^4EIK}{\pi^4}\nu_n^4 t\right)\varphi_n(x^*) \tag{1.8}$$

Исследование трансцендентных уравнений, на основании которых определяются собственные значения ν_n, позволяет сделать заключение, что эти значения образуют возрастающую последовательность. Поэтому, если представляет интерес асимптотика при больших значениях времени, то достаточно ограничиться только одним или несколькими членами.

Таким образом, получено точное решение поставленной задачи. Ниже будет рассмотрена значительно более сложная двумерная задача, для которой также можно найти точное решение, причем она приводит к нахождению собственных значений и собственных функций, но уже для некоторых интегральных уравнений.

Заметим, что рассмотренная здесь задача близка к задаче о колебаниях прямолинейного стержня постоянного сечения. Однако подобный метод может быть применен и для решения более сложной задачи об износе стержня в виде кривого бруса, форма которого близка к части кругового кольца, контактирующего с жестким круговым цилиндром.

2. Найдем теперь решения некоторых двумерных контактных задач при наличии износа. Будем рассматривать давление штампа на границу упругого слоя. Штамп совершает перемещения относительно этого слоя. Движение происходит в направлении, перпендикулярном плоскости чертежа (фиг. 2). Как и в случаях, рассмотренных в п. 1, штамп перемещается в некоторых направляющих так, что расстояние между этими направляющими и границей упругого слоя остается неизменным. В этом случае при



Фиг. 2

наличии износа давление, действующее на границу слоя, будет уменьшаться. Полагаем, что силы трения (в направлении оси x) отсутствуют. При этом исследуются контактные задачи при следующих условиях:

1°. Слой покоится на жестком основании, причем силы трения в направлении оси x между ними отсутствуют.

2°. Слой жестко связан с жестким основанием.

3°. Модуль упругости материала, из которого состоит слой, представляет собой функцию координаты y (не равную нулю, когда $y = 0$). Нижняя граница слоя может покоиться на основании без сил трения или быть с ним жестко связана.

Во всех указанных задачах перемещение поверхности и давление, возникающее под штампом, связаны следующим интегральным соотношением:

$$w(x) = \int_{-a}^{a} K|x-\xi|\,p(\xi)d\xi \tag{2.1}$$

Заметим, что ядро в данном соотношении симметрично. Последнее обусловлено тем, что перемещение границы в результате действия силы представляет собой функцию расстояния между координатой приложенной силы и координатой точки, где имеет место перемещение. Простейшее соотношение подобного рода известно для полуплоскости

$$w = A\int_{-a}^{a} \ln|x-\xi|\,p(\xi)\,d\xi$$

Следует отметить, что все ядра типа ядра в (2.1) будут иметь также логарифмическую особенность (но не более высокого порядка). Отсюда следует, что ядра такого вида будут интегрируемыми вместе с квадратом, что существенно для их дальнейшего исследования. Таким образом, имеем ядра $K_1|x-\xi|$, $K_2|x-\xi|$, $K_3'|x-\xi|$, $K_3^{('')}|x-\xi|$ (последние два ядра относятся к третьей задаче, где могут иметь место два различных условия на нижней границе упругого слоя).

Нужно сказать, что задача, в которой упругий слой покоится без сил трения на полуплоскости, не вполне корректна, так как при этом может иметь место отставание слоя от основания. Однако она будет корректной при определенных условиях для весомого слоя, когда подобного отставания не будет. При этом для построения интегрального соотношения нужно воспользоваться несколько иной функцией Грина.

Будем полагать, что имеет место абразивный износ, и, следовательно, используем соотношение (1.1). Остаются в силе и те соображения, содержащиеся в п. 1, которые касаются давления на краях площадки контакта.

Используя соотношение (1.1), получим следующее уравнение:

$$w(x,t) = w_0(x) - k\int_0^t p(x,\tau)\,d\tau \tag{2.2}$$

Здесь функция $w_0(x)$ описывает поверхность штампа в начальный момент времени и является заданной. Выражение для $w(x, t)$ может быть представлено в виде суммы двух слагаемых

$$w(x, t) = w_1(x, t) + w_2(x, t)$$

$$w_1(x,t) = w_{01}(x,t) - k\int_0^t p_1(x,\tau)\,d\tau \tag{2.3}$$

$$w_2(x,t) = w_{02}(x,t) - k\int_0^t p_2(x,\tau)\,d\tau$$

Оказывается целесообразным представить давление $p(x, t)$ в виде суммы двух слагаемых, соответствующих функциям $w_1(x)$, $w_2(x)$

$$p(x, t) = p_1(x, t) + p_2(x, t)$$

Это обусловлено тем, что давление при $t = 0$, $p(x)$ может быть представлено в виде ряда, состоящего из собственных функций некоторого однородного уравнения Фредгольма. Но собственные значения для этого интегрального уравнения могут быть и положительными, и отрицательными. Для того, чтобы получить давление, которое будет убывать в последующие моменты времени, эти собственные функции нужно умножить на некоторую экспоненциальную функцию времени, причем эта экспонента должна содержать время, умноженное на отрицательный коэффициент (аналогично тому, как это имело место в выражениях (1.4)). Поэтому для нахождения давления, а также перемещения в последующие моменты времени нужно эти собственные функции умножить на различные функции времени.

Для решения уравнений (2.2) и (2.3) воспользуемся функциями, связанными с собственными функциями некоторого однородного уравнения Фредгольма. Способ построения этих функций указан выше.

$$\begin{aligned}\int_{-a}^{a} e^{-\alpha_{n'}\tau} K|x-\xi|\, p_{n'}(\xi)\,d\xi + \int_{-a}^{a} e^{+\alpha_{n''}\tau} K|x-\xi|\, p_{n''}(\xi)\,d\xi = \\ = \int_{-a}^{a} K|x-\xi|\, p_{n'}(\xi)\,d\xi + \int_{-a}^{a} K|x-\xi|\, p_{n''}(\xi)\,d\xi - \\ -K\int_0^t e^{-\alpha_{n'}\tau}\, p_{n'}(\xi)\,d\tau - k\int_0^t e^{+\alpha_{n''}\tau}\, p_{n''}(\xi)\,d\tau\end{aligned} \tag{2.4}$$

Уравнения (2.4) могут быть представлены следующим образом:

$$(e^{-\alpha_n' t}-1)\left\{\int_{-a}^{a} K|x-\xi|\,p_{n'}(\xi)\,d\xi-\frac{K}{\alpha_n'}p_1(x)\right\}+ \tag{2.5}$$

$$+(e^{-\alpha_n'' t}-1)\left\{\int_{-a}^{a} K|x-\xi|\,p_{n''}(\xi)\,d\xi+\frac{K}{\alpha_n''}p_2(x)\right\}=0$$

Итак, для того, чтобы было удовлетворено равенство (2.4), функции $p_1(\xi)$ и $p_2(\xi)$ должны удовлетворять однородному уравнению Фредгольма

$$\int_{-a}^{a} K|x-\xi|\,p(\xi)\,d\xi-\lambda p(x)=0 \tag{2.6}$$

Здесь функции $p_1(\xi)$ и $p_2(\xi)$ подобраны таким образом, что $p_1(\xi)$ разлагается в ряд, в котором содержатся собственные функции однородного уравнения Фредгольма, которым соответствуют положительные характеристические числа, а $p_2(\xi)$ разлагается в ряд по собственным функциям того же уравнения Фредгольма, для которых собственные значения будут отрицательными. Это обусловливает полноту рассматриваемой системы функций.

Уравнение (2.6) и указанные обстоятельства позволяют определить величины α_n' и α_n''. В случае положительного λ_n имеем

$$\lambda_n=K/\alpha'_n,\quad \alpha_n'=K/\lambda_n$$

В случае отрицательного λ_n

$$\lambda_n=-K/\alpha_n''$$

и следовательно $\alpha_n''=-K/\lambda_n$.

Исходная функция, представляющая собой $p_0(x)$ — давление в начальный момент времени, разлагается в ряд по собственным функциям интегрального уравнения (2.6), которые являются ортогональными вследствие симметрии ядра

$$p_0(x)=\sum_{n=1}^{\infty} A_n p_{n'}(x)+\sum_{m=1}^{\infty} B_m p_{m''}(x)$$

Давление в последующие моменты времени таково:

$$p(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty} A_n \exp\left(-\frac{K}{|\lambda_n'|}t\right)p_{n'}(t)+\sum_{m=1}^{\infty} B_m \exp\left(-\frac{K}{|\lambda_m''|}t\right)p_{m''}(t)$$

Здесь λ_n' — положительные, λ_m'' — отрицательные характеристические числа.

Поступила I VII 1976

ЛИТЕРАТУРА

1. *Хрущов М. М., Бабичев М. А.* Исследование изнашивания металлов. М., изд-во АН СССР, 1960.
2. *Хирст В.* Износ хрупких материалов. В сб.: Контактное взаимодействие твердых тел и расчет сил трения и износа. М., «Наука», 1971.