

ДАВЛЕНИЕ ПЛОСКОГО БЛИЗКОГО В ПЛАНЕ К КРУГОВОМУ ШТАМПА НА УПРУГОЕ ПОЛУПРОСТРАНСТВО

С. С. Голикова, В. И. Моссаковский

(Днепропетровск)

Предлагается приближенный метод решения контактной задачи о вдавливании в упругое полупространство плоского близкого в плане к круговому штампа. Трение на контактной площадке не учитывается. Проводится численная реализация метода. В качестве примеров рассматриваются эллиптический и прямоугольный штампы.

Для задач о близких в плане к круговым штампам не существует какого-либо общего метода решения. Кроме классической задачи о плоском эллиптическом штампе, в литературе известны решения задач о полигональных штампах, причем каждая задача требует отдельного подхода.

В работе [1] предложено приближенное решение задачи о вдавливании в упругое полупространство плоского близкого в плане к круговому штампа. Разработанный метод позволяет осуществить единый подход к решению контактных задач для произвольной области контакта и составить универсальный алгоритм численного решения. Для конкретизации задачи в программе счета достаточно лишь внести соответствующие изменения в процедуру вычисления коэффициентов Фурье уравнения границы области контакта.

Ниже приводится численная реализация указанного приближенного метода. Составлен общий алгоритм решения задачи. Для эллиптического штампа получено также более эффективное представление решения.

1. Уравнение границы области контакта представим в виде ряда Фурье [1]

$$(1.1) \quad \rho^2(\varphi) = a^2 + \alpha \sum_{n=1}^{\infty} C_{2n} \cos 2n\varphi = a^2 + \alpha f(\varphi)$$

Здесь α — малая величина, характеризующая отклонение области контакта от круга, a — радиус этого круга.

Давление под подошвой штампа находится в виде ряда по параметру α (ρ и φ — полярные координаты, W — осадка штампа)

$$(1.2) \quad P(\rho, \varphi) = \frac{F_0(\rho, \varphi) + \alpha F_1(\rho, \varphi) + \alpha^2 F_2(\rho, \varphi) + \dots}{\sqrt{\rho^2(\varphi) - \rho^2}}$$

$$F_0(\rho, \varphi) = -C, \quad C = W \frac{E}{\pi(1-\nu^2)}$$

$$F_1(\rho, \varphi) = \frac{C}{2} \frac{1}{\rho^2 - a^2} \sum_{n=1}^{\infty} C_{2n} \left(1 - \frac{\rho^{2n}}{a^{2n}}\right) \cos 2n\varphi = \sum_{n=1}^{\infty} F1_{2n} \cos 2n\varphi$$

$$F_2(\rho, \varphi) = \frac{1}{\rho^2 - a^2} \sum_{n=1}^{\infty} (R1_{2n} - R2_{2n}) \left(1 - \frac{\rho^{2n}}{a^{2n}}\right) \cos 2n\varphi = \sum_{n=1}^{\infty} F2_{2n} \cos 2n\varphi$$

$$R1_{2n}(\rho, \varphi) = \frac{3}{8} C \frac{FF_{2n}}{\rho^2 - a^2} \left(1 - \frac{\rho^{2n}}{a^{2n}}\right)$$

Величины FF_{2n} , а также $R2_{2n}$ определяются соответственно как коэффициенты Фурье функций $f^2\varphi$ и $1/2 \cdot F_1(\rho, \varphi) f(\varphi)$.

Алгоритм счета состоит из следующих этапов:

вычисление по известным формулам [2] коэффициентов C_{2n} разложения (1.1);

последовательное вычисление по приведенным формулам элементов одномерных массивов $F_{2n} = C_{2n} \cos 2n\varphi$, $F1_{2n}$, FF_{2n} , $R2_{2n}$, $R1_{2n}$ и $F2_{2n}$;

вычисление по первой формуле (1.2) нулевого, первого и второго приближений давления;

построение линий равных давлений.

При нахождении коэффициентов FF_{2n} и R_{2n} используется процедура «ряд (N, F_1, F_2, F)», «ряд» определяет первые N коэффициентов Фурье ряда $F = F_1 \times F_2$ по заданным разложениям

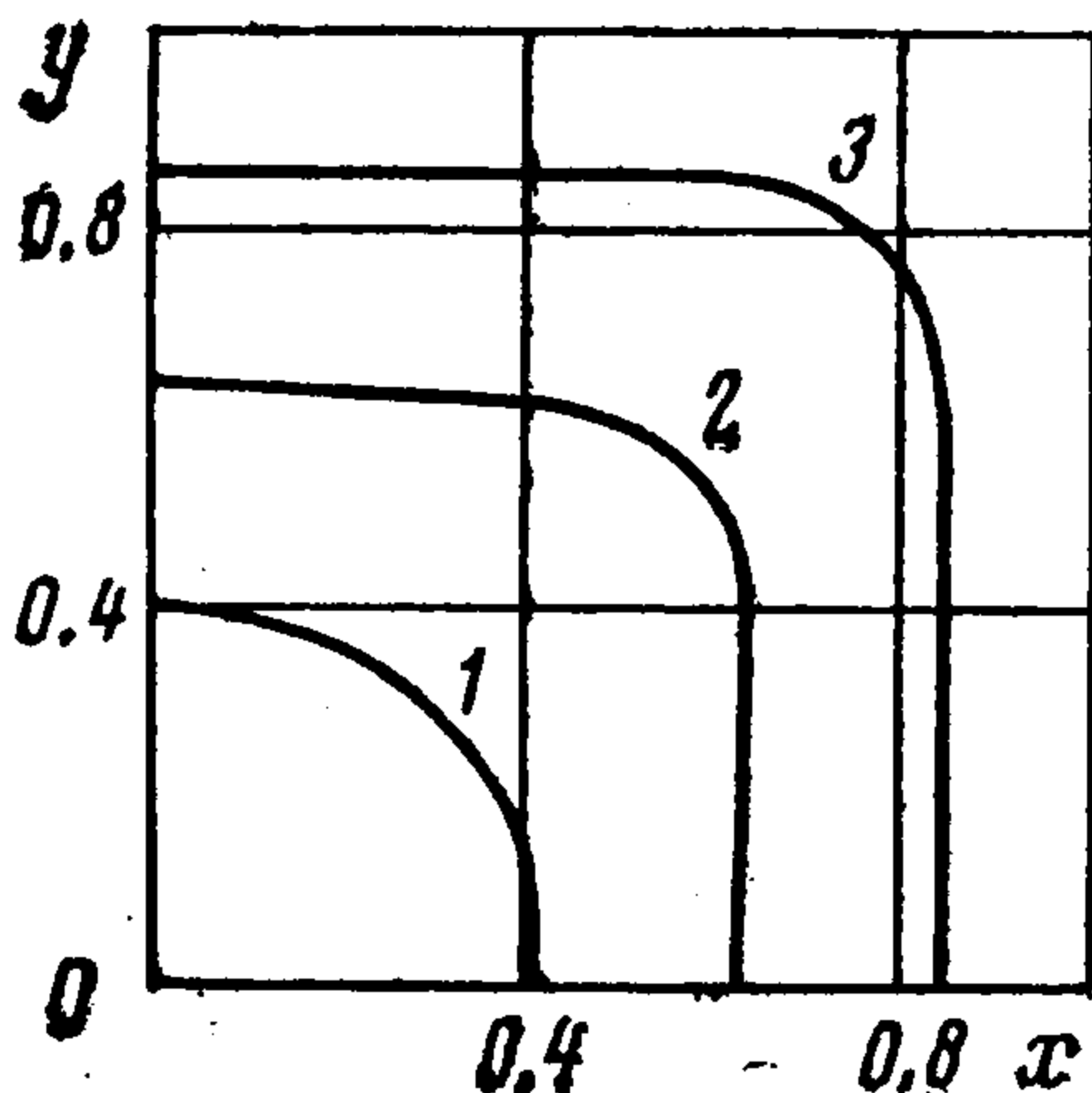
$$F_1 = F_{1_2} \cos 2\varphi + F_{1_4} \cos 4\varphi + \dots + F_{1_{2N}} \cos 2N\varphi$$

$$F_2 = F_{2_2} \cos 2\varphi + F_{2_4} \cos 4\varphi + \dots + F_{2_{2N}} \cos 2N\varphi$$

Каждый коэффициент F_{2L} определяется по формуле

$$F_{2L} = \frac{1}{2} \sum_{i+j=L} F_{1_{2i}} \times F_{2_{2j}} \quad (L = 1, 2, \dots, N)$$

Для выполнения последнего этапа алгоритма удобно в начале вычислений покрыть область контакта сеткой концентрических окружностей и полярных радиусов (формируются массивы координат R и FI), определить давления в узлах полярной сетки (при $\rho > \rho(\varphi)$, полагая $P(\rho, \varphi) = 0$) и заносить значения давления в массив $P[I, J]$.



Построение линий равных давлений проводится в таком порядке:

а) при $FI[1] = 0$ фиксируется значение $P[L, 1]$ ($L = 2, 3, 4, \dots$);

б) для каждого $FI[K]$ ($K = 2, 3, 4, \dots$) формируется одномерный массив $T[J] = |P[J, K] - P[L, 1]|$;

в) отыскивается наименьший элемент массива $T[J]$. Точки линий постоянных давлений определяются как точки, давление в которых соответствует наименьшему элементу массива T .

Составленный алгоритм может быть использован для решения задачи о произвольном плоском штампе, когда область контакта определяется соотношением (1.1).

Программа счета составлена на языке АЛГОЛ-60. Вычисления проводились на ЭВМ «М-222». Найдены первые два приближения давления, и построены линии постоянного давления.

Приближенный метод апробирован на задаче о плоском эллиптическом штампе. Полуоси эллипса $b = 1, 1.1 \leq a \leq 1.4$. Сопоставление численных результатов показывает, что второе приближение отличается от точного значения [3] давления лишь в третьем-четвертом знаке после запятой. В рядах, определяемых последними двумя формулами в (1.2), достаточно удерживать пять-шесть членов.

С помощью приведенного выше алгоритма численно решена задача о вдавливании в упругое полупространство плоского прямоугольного штампа. Некоторые результаты счета приведены в таблице (стороны прямоугольника $2\bar{a} = 2.2, 2\bar{b} = 2$).

Для квадратного штампа значения давлений совпадают со значениями, полученными в [4]. Линии постоянного давления под подошвой квадратного штампа изображены на фигуре. Кривые 1, 2, 3 соответствуют значениям отношения P/\bar{P}_0 , равным 1,08, 1,21, 1,58 (\bar{P}_0 — давление в точке $\rho = 0$).

φ	ρ	P_0/C	P_1/C	P_2/C	φ	ρ	P_0/C	P_1/C	P_2/C
0°	0.0	0.9108	0.8474	0.8487	15°	0.8	1.1989	1.1049	1.1030
0°	0.5	1.0148	0.9236	0.9245	45°	0.0	0.7030	0.8593	0.8566
0°	0.8	1.3153	1.1581	1.1572	45°	0.5	0.7529	0.9538	0.9495
15°	0.0	0.8803	0.8457	0.8464	45°	0.8	0.8463	1.1416	1.1331
15°	0.5	0.9799	0.9258	0.9259					

2. В случае эллиптического штампа коэффициенты Фурье уравнения границы области контакта зависят от параметра α (a и b — полуоси эллипса)

$$\rho^2(\varphi) = \left[\frac{\cos^2 \varphi}{a^2} + \frac{\sin^2 \varphi}{b^2} \right]^{-1} = a_0^2 + 2a_0^2 \alpha \sum_{n=1}^N \alpha^{n-1} \cos 2n\varphi$$

$$\alpha = a - b/a + b, \quad a_0^2 = ab$$

Такое свойство коэффициентов позволяет видоизменять конечные формулы и сравнительно просто получать более высокие приближения.

Разложение (2.2) из [1] с точностью до α^3 принимает вид

$$\frac{1}{\sqrt{\xi - \alpha f(\varphi)}} = \frac{1}{\sqrt{\xi}} \left\{ 1 + \alpha \frac{1}{2} \frac{C_2}{\xi} \cos 2\varphi + \right.$$

$$+ \alpha^2 \left[\frac{1}{2} \frac{C_4 \cos 4\varphi}{\xi} + \frac{3}{8} \frac{C_2^2 \cos^2 2\varphi}{\xi^2} \right] +$$

$$+ \alpha^3 \left[\frac{1}{2} \frac{C_6 \cos 6\varphi}{\xi} + \frac{3}{4} \frac{C_2 C_4 \cos 2\varphi \cos 6\varphi}{\xi^2} + \right.$$

$$\left. \left. + \frac{5}{16} \frac{C_2^3 \cos^3 2\varphi}{\xi^3} + \dots \right] \right\}, \quad \xi = \xi^2 - a_0^2$$

Поступая далее, как в [1], находим первые три приближения

$$F_0(\rho, \varphi) = -C, \quad F_1(\rho, \varphi) = -C \cos 2\varphi, \quad F_2(\rho, \varphi) = -\frac{3}{4}C \cos 4\varphi$$

$$F_3(\rho, \varphi) = -\frac{1}{8}C \cos 2\varphi + \frac{5}{8a_0^2}C(6\rho^2 - a_0^2) \cos 6\varphi$$

Давление под подошвой штампа определяется первой формулой (1.2).

Особенность давления на границе области контакта, предполагаемая с самого начала, сохраняется. Нетрудно убедиться, что такое представление давления дает хорошее совпадение с точными значениями [3].

Предложенный метод может быть использован для решения задачи о произвольном близком в плане к круговому плоском штампе.

Поступила 25 VII 1974

ЛИТЕРАТУРА

1. Моссаковский В. И. Зависимость между силой и осадкой для близкого к круговому в плане плоского штампа. Гидроаэромеханика и теория упругости, вып. 14. Изд-во Днепропетровск. ун-та, 1972.
2. Выгодский М. Я. Справочник по высшей математике. М., «Наука», 1973.
3. Лурье А. И. Теория упругости. М., «Наука», 1970.
4. Леонов М. Я., Посацкий С. Л., Иващенко А. Н. Расчет фундамента, квадратного в плане. Вопросы машиноведения и прочности в машиноведении, вып. 4. Киев, Изд-во АН УССР, 1956.