ЛИТЕРАТУРА

1. *Красильников В. Н.* О решении некоторых гранично-контактных задач линейной гидродинамики. ПММ, 1961, т. 25, вып. 4.
2. *Коновалюк И. П., Красильников В. Н.* Влияние ребра жесткости на отражение плоской звуковой волны от тонкой пластины. В сб.: Дифракция и излучение волн, вып 4. Изд-во ЛГУ, 1965.
3. *Хейсин Д. Е.* Динамика ледяного покрова. Л. Гидрометеоиздат, 1967.
4. *Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М.* Теоретическая физика, т. 7. Теория упругости. М., «Наука», 1965.
5. *Кочин Н. Е.* Векторное исчисление и начала тензорного исчисления. М., Изд-во АН СССР, 1961.
6. *Коненков Ю. К., Наумкина Н. И., Тартаковский Б. Д.* Исследование вынужденных изгибных колебаний упругой полосы. Акуст. ж., 1965, т. 11, вып. 3.
7. *Федорюк М. В.* Соотношение типа ортогональности в твердых волноводах. Акуст. ж., 1974, т. 20, вып. 2.

УДК 539.3

СУЩЕСТВОВАНИЕ ГЛОБАЛЬНОГО ФУНКЦИОНАЛА ЛЯПУНОВА ДЛЯ НЕКОТОРЫХ КЛАССОВ НЕЛИНЕЙНЫХ РАСПРЕДЕЛЕННЫХ СИСТЕМ

В. А. Брусин

(Горький)

В продолжение работы [1] исследуется существование глобального функционала Ляпунова для нелинейных эволюционных уравнений в гильбертовом пространстве. Полученные результаты представляют собой обобщение на системы с бесконечномерным фазовым пространством известных результатов в теории абсолютной устойчивости [2, 3] и служат основой для исследования нелокальной устойчивости и неустойчивости нелинейных распределенных систем. Иллюстрация полученных условий существования глобального функционала Ляпунова проводится на примере нелинейной параболической системы, заданной на отрезке [0, 1].

Впервые понятие функционала Ляпунова было введено и эффективно использовано в работе [4].

1. Эволюционные уравнения в гильбертовом пространстве. Класс N нелинейных операторов. Пусть H, V, U — гильбертовы пространства [5] над полем вещественных чисел со скалярными произведениями $\langle,\rangle_H$, $\langle,\rangle_V$, $\langle,\rangle_U$ и нулевыми элементами θ_H, θ_V, θ_U соответственно. Обозначим H^*, V^* гильбертовы пространства, сопряженные с H и V [5], предположим, что $V \subset H = H^* \subset V^*$, пространство V плотно в H и вложение $V \to H$ непрерывно. Пусть A — нелинейный непрерывный оператор $V \to V^*$, замкнутый в пространстве H. Пусть далее B — линейный ограниченный оператор $U \to V^*$, $\Phi(\cdot)$ — нелинейный (вообще говоря) оператор $H \times R^1 \to U$, где R^1 — вещественная ось.

Рассмотрим нелинейное эволюционное уравнение [6]

$$\frac{d}{dt}x(t) = Ax(t) + B\Phi(x(t), t) \tag{1.1}$$

Под обобщенным решением уравнения (1.1) на интервале (τ, T) будем понимать функцию $x(t) \in W(\tau, T; V)$, удовлетворяющую равенству

$$\int_\tau^T \left[\left\langle x(t), \frac{d\xi(t)}{dt}\right\rangle + \langle Ax(t), \xi(t)\rangle + \langle B\Phi(x(t), t), \xi(t)\rangle\right] dt = 0 \tag{1.2}$$

для любой гладкой по t, финитной на интервале (τ, T) функции $(\tau, T) \to V$. Здесь $W(\tau, T; V)$ — гильбертово пространство отображений $y(t) : (\tau, T) \to V$, таких, что

$y(t) \in L^2(\tau, T; V)$, $y^{\cdot}(t) \in L^2(\tau, T; V^*)$, где $y^{\cdot}$ — обобщенная производная; $\langle f, g\rangle$, $f \in V^*$, $g \in V$ — значение функционала f на элементе g.

Определение 1. Пусть

$$p: H \to H,\quad q: U \to H,\quad r: U \to U,\quad \alpha: U \to V$$

линейные ограниченные операторы, причем p и r — симметричные операторы

$$\langle px, y\rangle_H = \langle x, py\rangle_H,\ \langle ru, v\rangle_U = \langle u, rv\rangle_U \quad (x, y \in H,\ u, v \in U)$$

Будем говорить, что оператор $\Phi: H \times R^1 \to U$ принадлежит классу $N = N(p, q, r, \alpha)$, если для него выполнены следующие условия:

$$\langle px, x\rangle_H + 2\langle x, q\Phi(x, t)\rangle_H + \langle r\Phi(x, t), \Phi(x, t)\rangle_U \leqslant 0,\quad x \in H,\ t > 0 \tag{1.3}$$

и существует непрерывный в пространстве H функционал $W(x)$, такой, что для любой функции $x(t) \in W(0, T; V)$ и для любого интервала (t_1, t_2), $t_1 < t_2$ справедливо неравенство

$$W(x(t))\Big|_{t=t_1}^{t=t_2} \geqslant \int_{t_1}^{t_2} \left\langle \alpha\Phi(x(t), t), \frac{dx}{dt}\right\rangle dt \tag{1.4}$$

Замечание 1. Условия типа (1.3) в случае конечномерных пространств H и U (с переменой знака) было названо [7] локальной связью между $x(t)$ и $\Phi(t) = \Phi(x, (t), t)$. Условие (1.4), по существу, эквивалентно условию, которое в той же работе названо дифференциальной связью.

Предположение 1. При любом $x_0 \in H$, любых t_0, $T > t_0$ и $\Phi \in N$ существует единственное обобщенное решение $x(t) = x(t, t_0, x_0, \Phi)$, $t \in [t_0, T]$ уравнения (1.1), удовлетворяющее условию $x(t_0) = x_0$.

2. Существование функционала Ляпунова для нелинейного эволюционного уравнения для класса N нелинейных операторов. В данной работе, как и в работе [1], существенную роль играет интегральное неравенство

$$\int_0^\infty [\langle Ru(t), u(t)\rangle_U + 2\langle y(u)(t), Qu(t)\rangle_H + \langle Py(u)(t), y(u)(t)\rangle_H - \\ - \varepsilon\|u(t) - Fy(u)(t)\|^2]\, dt > 0,\quad u(t) \in L^2(0, \infty; U),\quad \varepsilon > 0 \tag{2.1}$$

где $y(u)(t) = y(t, \theta, u)$ — решение (1.1) при $\Phi_{(t)=u(t)}$ и F — произвольный оператор, такой, что $A + BF$ — L^2-устойчивый оператор [1].

В работе [1] сформулирован ряд предположений (предположения 1—3) относительно операторов A и B, при выполнении которых и при выполнении интегрального неравенства (для L^2-устойчивого оператора A оператор F можно положить нулевым оператором) будет существовать линейный непрерывный симметричный оператор $M: H \to V$, удовлетворяющий уравнению

$$\langle (M^*A + A^*M + P)\xi, \eta\rangle = \langle LL^*\xi, \eta\rangle,\ L = (M^*B + Q)K^{-1},\ K^*K = \\ = R,\ \forall\xi, \eta \in V \tag{2.2}$$

Теорема 1. Пусть для операторов A и B выполняются предположения 1—3 работы [1]. Пусть далее выполнено предположение 1 данной работы и функция $\Phi(x, t)$ удовлетворяет условию (1.4). Наконец, пусть для p, q, r — линейных ограниченных операторов $H \to H$, $U \to H$, $U \to U$ справедливо интегральное неравенство (2.1) с операторами

$$R = r + B^*\alpha,\ P = p,\ Q = q + {}^1\!/_2 A^*\alpha \tag{2.3}$$

причем $B^*\alpha$ и $A^*\alpha$ — ограниченные операторы, а оператор F таков, что имеет место L^2-устойчивость [1] оператора $A + BF$. Тогда в пространстве H существует непрерывный функционал $V(x)$

$$V(x) = \langle Mx, x\rangle_H + W(x) \tag{2.4}$$

такой, что для любого решения $x(t) = x(t, t_0, x_0, \Phi)$ уравнения (1.1) при любых Φ справедливо неравенство

$$V(x(t))\Big|_{t=t_1}^{t=t_2} \geqslant \int_{t_1}^{t_2} (\Sigma(x(t))\,dt, \quad \Sigma(x(t)) \equiv \| L^*x(t) + K\Phi(t) \|_U^2 - \tag{2.5}$$

$$- [\langle px(t), x(t)\rangle_H + 2\langle x(t), q\Phi(t)\rangle_H + r\langle \Phi(t), \Phi(t)\rangle_U]$$

Если к тому же $\Phi \in N(p_\varepsilon, q, r_\delta, \alpha) = N_{\varepsilon,\delta}$, $p_\varepsilon = p + \varepsilon E_H$, $r_\delta = r + \delta E_U$ (E_H, E_U — тождественные операторы в H и U), то для $V(x)$ имеет место неравенство

$$V(x(t_2)) - V(x(t_1)) \geqslant \int_{t_1}^{t_2} (\varepsilon \| x(t) \|_H^2 + \delta \| \Phi(t) \|_U^2)\,dt, \quad t_1 < t_2 \tag{2.6}$$

Доказательство. Неравенство (2.5) устанавливает следующая цепочка соотношений, справедливых в силу (1.1), (1.4), (2.2) — (2.4)

$$\int_{t_1}^{t_2} \Sigma(x(t))\,dt = \int_{t_1}^{t_2} [\langle M^*Ax(t), x(t)\rangle + \langle M^*B\Phi(t), x(t)\rangle + \langle Mx(t), Ax(t)\rangle +$$

$$+ \langle Mx(t), B\Phi(t)\rangle + \langle Ax(t), \alpha\Phi(t)\rangle + \langle B\Phi(t), \alpha\Phi(t)\rangle]\,dt =$$

$$= \int_{t_1}^{t_2} \left[\left\langle M^* \frac{dx(t)}{dt}, x(t)\right\rangle + \left\langle Mx(t), \frac{dx(t)}{dt}\right\rangle + \left\langle \frac{dx(t)}{dt}, \alpha\Phi(t)\right\rangle\right] dt \leqslant$$

$$\leqslant \int_{t_1}^{t_2} \frac{d}{dt} \langle Mx(t), x(t)\rangle\,dt + W(x(t))\Big|_{t_1}^{t_2} = V(x(t))\Big|_{t_1}^{t_2}$$

Индексы пространств у скалярных произведений и норм здесь и в дальнейшем опущены.

Из первого соотношения (2.2) видно, что свойства оператора M зависят от свойств линейного однородного уравнения

$$\frac{d}{dt} y = Ay \tag{2.7}$$

Обозначим $y(t, y_0)$ решение уравнения (2.7), отвечающее начальному условию $y(0) = y_0$. (Решение здесь понимается в том же смысле, что и для уравнения (1.1) при $\Phi \equiv \theta$. Существование и единственность его при $t > 0$ обеспечивается предположением 1 работы [1].)

Предположение 2. Пусть пространство H разлагается в прямую сумму подпространств H_+ и H_-, определяемых следующими свойствами:

а) при любом $y_0 \in H_+$ решение $y_+(t) = y(t, y_0)$ уравнения (2.5) удовлетворяет условию

$$\lim_{t\to\infty} y_+(t) = \theta \tag{2.8}$$

б) при любом $y_0 \in H_-$ существует единственное решение $y_-(t) = y(t, y_0)$ уравнения (2.5), определенное на интервале $(-\infty, 0)$ и удовлетворяющее условию

$$\lim_{t\to-\infty} y_-(t) = \theta \tag{2.9}$$

Оператор L будем называть положительным, $L > 0$ (отрицательным, $L < 0$), если $\langle Lh, h\rangle \geqslant 0$ (соответственно $\langle Lh, h\rangle \leqslant 0$), причем $\langle Lh, h\rangle = 0$ только при $h = \theta$.

Теорема 2. Предположим, что выполнены все условия теоремы 1 и предположения 2. Кроме того, предположим, что оператор $p - LL^*$ знакопостоянен. Тогда оператор M будет знакопостоянен на подпространствах H_- и H_+, причем знак его на подпространстве H_+ будет совпадать со знаком оператора $p - LL^*$, а на подпространстве H_- будет ему противоположным.

Доказательство. Предположим ради определенности, что $p - LL^* > 0$. Рассмотрим решение $y(t) \not\equiv \theta$ уравнения (2.7), определенное на некотором интервале (t_1, t_2).

Тогда с учетом (2.2) будем иметь

$$\langle My(t), y(t)\rangle \Big|_{t_1}^{t_2} = \int_{t_1}^{t_2} \langle (M^*A + A^*M)\, y(t), y(t)\rangle\, dt = \tag{2.10}$$

$$= \int_{t_1}^{t_2} \langle (p - LL^*)\, y(t), y(t)\rangle\, dt > 0$$

Пусть $y_0 \in H_+$. Рассмотрим соотношение (2.10) для решения $y(t, y_0)$, $t > 0$. Тогда, устремив t_2 к бесконечности, а t_1 к нулю и принимая во внимание (2.8), получим

$$\langle My_0, y_0\rangle = \int_0^\infty \langle (p - LL^*)\, y(t), y(t)\rangle\, dt > 0, \quad y_0 \neq \theta \tag{2.11}$$

Совершенно аналогично, рассматривая $y_0 \in H_-$ и $t_1 < t_2 < 0$ из соотношения (2.10) (после перехода к пределу при $t_2 \to 0$ и $t_1 \to -\infty$ с учетом (2.9)) получается утверждение теоремы и для подпространства H_-.

Из теорем 1 и 2 с очевидностью вытекает следующий результат.

Теорема 3. Пусть выполнены все условия теоремы 1 и теоремы 2 и $p < 0$. Тогда для уравнения (1.1) при любом операторе $\Phi \in N$ ($\Phi \in N_{\varepsilon, \delta}$) будет существовать функционал (2.4), удовлетворяющий неравенству (2.5) (неравенству (2.6)). В случае неотрицательности функционала $W(x)$ функционал (2.4) будет положительным на подпространстве H_-, а в случае неположительности $W(x)$ — отрицательным на подпространстве H_+.

3. Особый случай: p — нулевой оператор. В этом случае из (2.10) будет вытекать, что $M \leqslant 0$ на подпространстве H_+ и $M \geqslant 0$ на подпространстве H_-. Исследуем свойства линейных пространств $L^{\pm}(M) = \{x \mid x \in H_{\pm},\ Mx = \theta\}$. В частности, интересно знать, в каком случае размерность этих пространств равна нулю.

Предположение 3. Пара операторов (A, Q^*) обладает следующим свойством на подпространстве H_+: из того, что $Q^*y(t, y_0) = \theta_U$, $y_0 \in H_+$, вытекает, что $y_0 = \theta_H$.

Заметим, что в частном случае конечномерных пространств H и U указанное свойство совпадает со свойством идентифицируемости по Калману пары (A, Q^*).

Теорема 4. Пусть A есть L^2-устойчивый оператор [1]. Пусть выполняются все условия теоремы 2 [1] при $p = [0]$ и выполнено предположение 3. Тогда линейное пространство $L^+(M)$ состоит только из нулевого элемента.

Доказательство. Пусть h — произвольный элемент из пространства L^+. Тогда минимальное значение функционала $I_h[u]$ вариационной задачи теоремы 3 работы [1] равно $\langle Mh, h\rangle = 0$. Поскольку $p = [0]$, то функция $u(t) \equiv \theta$ и будет единственным экстремальным элементом $u^\circ(t)$ этой задачи, существование которого гарантируется теоремой 3 работы [1]. Для функций $y^\circ(t) = y(t, u^\circ)$ и $\Psi(t) = My^\circ(t)$ при этом будут справедливы соотношения [1]

$$\frac{d}{dt}\Psi = - A^*\Psi, \quad \frac{dy^\circ}{dt} = Ay^\circ, \quad B^*\Psi + Q^*y^\circ = \theta, \quad t > 0 \tag{3.1}$$

Из (3.1) и предположения 2 работы [1] (входящего в условия теорем 3 и 4) следуют последовательно соотношения: $\Psi(t) = \theta$, $Q^*y^\circ(t) = \theta$, $y(0) = h = \theta$. Последнее и доказывает теорему.

Из теорем 3 и 4 вытекает

Теорема 5. Предположим, что $H = H_+$, $W(x) \leqslant 0$ и выполнены условия теоремы 4. Тогда для уравнения (1.1) при любом $\Phi \in N([0], q, r, \alpha)$ существует отрицательный функционал Ляпунова (2.4), для которого справедливы неравенства (2.5) и (2.6). Если $W(x) \leqslant -c\|x\|^q$, $c > 0$, то $V(x) \leqslant -\mathrm{const}\,\|x\|^q$.

---

[1] В интегральном неравенстве в силу L^2-устойчивости оператора A оператор F можно полагать нулевым.

4. Пример. В качестве простого, но не тривиального примера рассмотрим уравнение в частных производных на отрезке [0, 1] (параболического типа)

$$\frac{\partial u(s,t)}{\partial t} = a(s)\frac{\partial^2 u(s,t)}{\partial s^2} - b(s)u(s,t), \quad 0 < s < 1 \tag{4.1}$$

$$\left.\frac{\partial u}{\partial s}\right|_{s=0} = 0, \quad \left.\frac{\partial u}{\partial s}\right|_{s=1} = \varphi(w(t))$$

$$w(t) = G(u(s,t)) = \int_0^1 g(s)\,u(s,t)\,ds \tag{4.2}$$

$$a(s) \geqslant a > 0; \quad b(s) \geqslant b, \quad a(s) \in C^1(0,1) \tag{4.3}$$

$$\mu_1 \leqslant \frac{\varphi(w)}{w} \leqslant \mu_2 \quad (w \neq 0), \quad \int_0^x \varphi(\xi)\,d\xi \geqslant \mathrm{const}\,\|x\|^q \tag{4.4}$$

$$q > 0, \quad \mu_1 \leqslant 0, \quad \mu_2 > 0$$

Здесь G — некоторый линейный непрерывный функционал, действующий в пространстве $L^2(0,1)$ суммируемых с квадратом функций, заданных на интервале (0, 1); $\varphi(w)$ — непрерывная функция, удовлетворяющая указанному выше условию.

Будем рассматривать обобщенные в смысле С. Л. Соболева решения уравнения (4.1), (4.2). Именно, под обобщенным на отрезке $t \in [0, T]$ решением будем понимать функцию $u(s, t)$, удовлетворяющую следующим условиям:

$$\int_0^1 \left(|u(s,t)|^2 + \left|\frac{\partial u}{\partial s}(s,t)\right|^2\right) ds < \infty, \quad 0 < t < T \tag{4.5}$$

Здесь $\partial / \partial s$ — обобщенная производная или производная в смысле теории распределений; для любой функции $g(s, t)$, удовлетворяющей условию (4.5), гладкой и финитной по t на отрезке $[0, T]$, выполняется равенство

$$\int_0^T dt \left\{\int_0^1 \left[u(s,t)\frac{\partial g(s,t)}{\partial t} - \left(a(s)\frac{\partial u}{\partial s}\frac{\partial g}{\partial s} + b(s)ug\right)\right]ds + \right. \tag{4.6}$$

$$\left. + a(1)\varphi(w(t))\,g(1;t)\right\} = 0$$

Для того чтобы включить данное уравнение в рамки предложенной теории, необходимо, во-первых, представить его в виде (1.1), для чего нужно адекватным образом определить пространства H, U, V и операторы A, B, Φ, и, во-вторых, ввести операторы p, q, r, α, определяющие класс N.

Пространством H пусть будет пространство $L^2(0, 1)$ функций $u = u(s)$, суммируемых с квадратом на интервале (0, 1) со скалярным произведением

$$\langle u, v\rangle_H = \int_0^1 u(s)\,v(s)\,ds \tag{4.7}$$

(Точнее, элементами пространства $L^2(0, 1)$ являются не функции, а классы функций [5,6].)

В качестве пространства V возьмем пространство $H^1(0, 1)$ функций $u(s)$, $s \in (0,1)$, удовлетворяющих неравенству (4.5) со скалярным произведением [6]

$$\langle u, v\rangle_V = \int_0^1 \left(u(s)\,v(s) + \frac{\partial u(s)}{\partial s}\frac{\partial v(s)}{\partial s}\right) ds \tag{4.8}$$

Оператор $A: V \to V^*$ определим следующим образом: для любых функций $u(s)$, $v(s) \in H^1(0,1)$ положим

$$\langle Au, v\rangle \equiv \int_0^1 (Au)(s)\, v(s)\, ds = -\int_0^1 \left(a(s)\frac{\partial u}{\partial s}\frac{\partial v}{\partial s} + b(s)\, uv\right) ds \tag{4.9}$$

Далее, пусть $U = R^1$, где R^1 — действительная прямая, а оператор $B: U \to V^*$ определен в соответствии с равенством

$$\langle B\xi, v(s)\rangle = a(1)\, \xi v(1) \qquad (\xi \in R^1,\ v(s) \in H^1(0, 1)) \tag{4.10}$$

(Если условиться операторы умножения на какую-либо функцию или оператор σ обозначать $[\sigma]$, тогда в соответствии с этим обозначением $B = [a(1)\delta(s-1)]$, где $\delta(s)$ — дельта-функция Дирака.)

Наконец, оператор $\Phi: L^2 \to R^1$ зададим как композицию операторов

$$\Phi: L^2 \ni u(s) \to w = G(u(s)) \to \varphi(w) \in R^1 \tag{4.11}$$

При таком определении операторов A, B и Φ решение эволюционного уравнения (1.1) будет совпадать с обобщенным решением уравнения (4.1), (4.2), понимаемом в смысле (4.5), (4.6).

Перейдем к определению операторов p, q, r, α. В силу (4.4) функция $\varphi(w)$ удовлетворяет соотношениям

$$(\mu_2 w - \varphi(w))(\mu_1 w - \varphi(w)) \leqslant 0, \qquad \int_{w(t_1)}^{w(t_2)} \varphi(\lambda)\, d\lambda = \int_{t_1}^{t_2} \varphi(w)\, w^{\cdot} dt \tag{4.12}$$

Из (4.2), (4.11), (4.12) вытекает тогда, что $\Phi \in N(p, q, r, \alpha)$, где

$$p = \mu_1\mu_2 G^* G, \quad r = [1], \quad q = -{}^1\!/_2\, (\mu_1 + \mu_2)\, G^*, \quad \alpha = \rho G^* \tag{4.13}$$

$$W(u(s)) = \rho \int_0^w \varphi(\lambda)\, d\lambda, \quad w = G(u(s)) \tag{4.14}$$

Выясним теперь, какой вид принимает в данном примере неравенство (2.1). Обозначим через $\chi(p)$ функцию комплексного переменного p, определяющуюся соотношениями

$$\chi(p) = G(u_1(s, p)), \quad a(s)\frac{\partial^2 u_1}{\partial s^2} - (b(s) + p)\, u_1 = 0 \tag{4.15}$$

$$\left.\frac{\partial u_1}{\partial s}\right|_{s=0} = 0, \quad \left.\frac{\partial u_1}{\partial s}\right|_{s=1} = 1 \quad (p = \alpha + j\omega)$$

(В теории регулирования эта функция известна как коэффициент передачи от величины φ к величине w в системе (4.1), (4.2) [2].) Несложные выкладки с использованием (4.9) — (4.11), (4.13), (4.15) устанавливают, что неравенство (2.1) эквивалентно известному в теории абсолютной устойчивости [2] частотному неравенству

$$\operatorname{Re}\, [(\mu_2\chi(j\omega) - 1)(\mu_1\chi(j\omega) - 1) + \rho j\omega\chi(j\omega)] \geqslant \varepsilon > 0 \qquad (\omega \in (-\infty, +\infty)) \tag{4.16}$$

Перейдем к анализу предположений 1—3 работы [1] и предположений 1—3 данной работы, фигурирующих в теоремах 1—5.

Согласно (4.3), (4.9) оператор A будет удовлетворять неравенству

$$\langle -Au, u\rangle \geqslant a\left\|\frac{\partial u}{\partial s}\right\|_H^2 + b\|u\|_H^2 \geqslant \varepsilon\|u\|_V^2 + \lambda\|u\|_H^2, \quad \varepsilon > 0 \tag{4.17}$$

и, следовательно [6], предположение 1 из [1] о существовании и единственности решения будет выполнено, причем в случае $b > 0$ в (4.17) имеем $\lambda > 0$ и оператор A будет L^2 устойчивым.

Предположение 2 [1] для данного примера ввиду (4.8), (4.9) получает следующую формулировку. Для любой функции $f(s, t)$, такой, что $\| f(s, t) \|_H \in L^2(0, \infty)$, существует единственное обобщенное решение $\Psi(s, t)$ уравнения

$$-\frac{\partial \Psi}{\partial t} = a(s)\frac{\partial^2 \Psi}{\partial s^2} - b(s)\Psi + f(s, t) = 0, \quad t > 0, \quad \left.\frac{\partial \Psi}{\partial s}\right|_{s=0,1} = 0 \tag{4.18}$$

удовлетворяющее условиям

$$\begin{gathered}\int_0^\infty \int_0^1 \Psi^2(s, t)\, ds dt < \infty \\ \int_0^\infty \int_0^1 \frac{\partial \Psi}{\partial t}(s, t) g(s, t)\, ds dt < \infty, \quad \forall g(s, t) \in L^2(0, \infty; H^1)\end{gathered} \tag{4.19}$$

$$\int_0^1 \left(\frac{\partial \Psi}{\partial s}(s, t)\right)^2 ds < \infty, \quad t > 0 \tag{4.20}$$

Существование и единственность решения $\Psi(s, t)$, удовлетворяющего условиям (4.19), вытекает из неравенства (4.17) и из п. 6.2 гл. 3 работы [6]. Для того чтобы обосновать справедливость (4.20), рассмотрим уравнение для $\Psi'(s, t) = \partial \Psi(s, t) / \partial s$ получающееся из (4.18) дифференцированием по s. (Саму функцию Ψ при этом относим к правой части уравнения для Ψ'.) Можно показать, что к полученному уравнению также приложимы упомянутые результаты [6], откуда заключаем, что функция $\partial \Psi / \partial s$ является L^2-непрерывной по t. Следовательно, будет справедливо (4.20).

Предположение 3 для рассматриваемого примера означает, что решение $u(s, t)$ уравнения

$$\begin{gathered}\frac{\partial u}{\partial t} = a(s)\frac{\partial^2 u}{\partial s^2} - b(s) u, \quad t > 0, \quad s \in (0, 1) \\ \left.\frac{\partial u}{\partial s}\right|_{s=0} = 0, \quad \left.\frac{\partial u}{\partial s}\right|_{s=1} = \varphi(t), \quad \int_0^\infty \varphi^2(t)\, dt < \infty\end{gathered} \tag{4.21}$$

будет обладать L^2-непрерывной по t обобщенной производной $\partial u / \partial s \in L^2(0,1)$, если взять достаточно гладкие начальные условия, например $u(s, 0) \in H^1(0, 1)$.

Это предположение, как и предыдущее, обосновывается путем рассмотрения уравнения для $\partial u / \partial s$ с использованием результатов работы [6].

Перейдем к предположениям, сделанным в данной работе.

Предположение 1 означает существование и единственность обобщенного решения краевой задачи (4.1) — (4.3). Это свойство связано с гладкостью нелинейной функции φ и с видом оператора G. Не вдаваясь в исследование этого вопроса (по которому существует обширная литература, например [8]), просто положим, что это предположение имеет место.

Проверим справедливость предположений 2 и 3. (Последнее нужно только в случае $\mu_1 = 0$.) Эти предположения касаются линейного однородного уравнения (уравнения (4.21) с $\varphi(t) = 0$). Согласно [8] решение $v(s, t)$ этого уравнения может быть представлено в виде ряда

$$v(s, t) = \sum_{i=1}^\infty C_i e^{\lambda_i t} F_i(s) \tag{4.22}$$

где $F_n(s)$ — собственные функции самосопряженного оператора

$$S(v) = \{a(s) v''(s) - b(s) v(s), \; s \in (0, 1), \; v'(0) = v'(1) = 0\} \tag{4.23}$$

а λ_n — соответствующие им собственные числа. Предположение 2 будет выполнено, если $\lambda_n \neq 0$. При этом H_+ — подпространство $L^2(0, 1)$, натянутое на собственные функции, отвечающие отрицательным λ_n, а H_- — подпространство, натянутое на собственные функции, отвечающие положительным λ_n. (Последних конечное число.)

В случае $b > 0$ все собственные числа отрицательные и H_- пусто. Рассмотрим в этом случае предположение 3. Оно в данном примере будет означать, что из равенства $G(v, (s, t)) \equiv 0$, $t > 0$ вытекает $v(s, t) \equiv 0$. Из (4.22) видно, что это будет иметь место, если

$$G(F_n(s)) \neq 0 \ (n = 1, 2, \ldots)$$

Итак, на основании теорем 3,5 получаем следующий результат.

Теорема 6. Пусть относительно краевой задачи (4.1) — (4.4) справедливо следующее:

1) при любой начальной функции $u_0(s) \in L^2(0, 1)$ существует единственное обобщенное решение $u(s, t)$, $t \in [0, \infty)$, обращающееся в $u_0(s)$ при $t = 0$;

2) оператор G является линейным ограниченным на $L^2(0, 1)$ функционалом, удовлетворяющим условию (2.24) и условию, что $[\rho\delta(s-1)]\, G^*$ и $[\rho\partial^2 / \partial s^2]\, G^*$ — ограниченные отображения $R^1 \to R^1$, $R^1 \to L^2$ соответственно. Заметим, что если $G(v) = \int g(s)\, v(s)\, ds$, $g(s)$ — дважды дифференцируемая на интервале $(0, 1)$, $|g''(s)| < \infty$, $s \in [0, 1]$, то эти последние условия будут выполнены и при $\rho \neq 0$;

3) выполнено частотное неравенство (4.16);

4) выполнено условие стабилизируемости. Существует такая функция $\rho(x) \in L^2(0, 1)$, что все решения линейного уравнения (4.1) — (4.4) с $\varphi(u) = \int \rho(s)\, u(s, t)\, ds$ по норме $L^2(0, 1)$ экспоненциально стремятся к нулю. (Если $b > 0$, то $p(s) = 0$.)

Тогда будет существовать непрерывный функционал $V(u(s)) : L^2(0, 1) \to R^1$ вида

$$V(u(s)) = \int_0^1 (Mu)(s)\, u(s)\, ds + \rho \int_0^w \varphi(\sigma)\, d\sigma$$

(M — линейный ограниченный оператор $L^2(0, 1) \to H^1(0, 1)$), определяющийся с помощью теоремы 3 работы [1], ρ—число, фигурирующее в частотном условии (4.16), монотонно возрастающий вдоль обобщенных решений уравнения (4.1) — (4.4), если $\varphi(x)$ удовлетворяет (4.5), и удовлетворяет (2.6), если $\varphi \in N[p_\varepsilon, q, r_\delta, \alpha]$.

Если $\rho \leqslant 0$ и $b > 0$, то $V(u) \leqslant -|\rho|\, \mathrm{const}\, |w|^q < 0$. Функционал $V(u)$ будет иметь положительные значения, если $\rho \geqslant 0$ и среди собственных чисел λ_n оператора (4.23) есть положительные и нет равных нулю. В последнем случае будут существовать начальные условия, при которых функции $V(u(s, t))$, $|\rho w(t)|$ будут неограниченными функциями времени.

Поступила 27 XII 1973

ЛИТЕРАТУРА

1. *Брусин В. А.* Уравнения Лурье в гильбертовом пространстве и их разрешимость. ПММ, 1976, т. 40, вып. 5.
2. *Гантмахер Ф. Р., Якубович В. А.* Абсолютная устойчивость нелинейных регулируемых систем. Тр. II Всес. съезда по теоретической и прикладной механике, вып. 1. М., «Наука», 1965.
3. *Айзерман М. А., Гантмахер Ф. Р.* Абсолютная устойчивость регулируемых систем. М., «Наука», 1963.
4. *Красовский Н. Н.* О применении второго метода А. М. Ляпунова для уравнений с запаздываниями времени. ПММ, 1956, т. 20, вып. 3.
5. *Иосида К.* Функциональный анализ. М., «Мир», 1967.
6. *Лионс Ж.-Л.* Оптимальное управление системами, описываемыми уравнениями с частными производными. М., «Мир», 1972.
7. *Якубович В. А.* Абсолютная неустойчивость нелинейных систем управления. I. Общие частотные критерии. Автоматика и телемеханика, 1970, № 12.
8. *Ладыженская О. А., Солоников, В. А., Уральцева Н. Н.* Линейные и квазилинейные уравнения параболического типа. М., «Наука», 1967.