деления скоростей для состояния, близкого к термодинамическому равновесию, как это показано в [5].

Если сопоставить уравнение (4.3) с уравнением Фоккера — Планка для поступательно движущихся частичек ([1], стр. 63), то можно установить совпадение структуры слагаемых (4.3), относящихся к поступательной скорости, и при $\sigma = a$ коэффициент β_2 становится равным $2\beta_t$. Структура слагаемых с угловой скоростью вращения аналогична структуре слагаемых с поступательной скоростью, но коэффициент β_3 помимо величин, входящих в β_2, содержит еще моменты инерции броуновских частичек и частичек окружающей среды.

Поступила 26 II 1974

ЛИТЕРАТУРА

1. *Монтгомери Д.* Применение уравнения Больцмана к описанию броуновского движения. Механика. Сб. перев., 1973, № 1.
2. *Слезкин Н. А.* Теория удара вращающихся шаров с абсолютно гибкими поверхностями. Изв. АН СССР. МТТ, 1974, № 5.
3. *Чепмен С., Каулинг Т.* Математическая теория неоднородных газов. М., Изд-во иностр. лит., 1960.
4. *Леви-Чивита Т., Амальди У.* Курс теоретической механики, Т. 1, ч. 1, М.— Л., Объед. научно-технич. изд. НКТП СССР, 1935.
5. *Чандрасекар С.* Стохастические проблемы в физике и астрономии. М., Изд-во иностр. лит., 1947.

УДК 539.3 : 534.1

О ВЕКТОРЕ ПОТОКА ЭНЕРГИИ ДЛЯ ИЗГИБНЫХ КОЛЕБАНИЙ ПЛАСТИНЫ

Д. П. Коузов, В. Д. Лукьянов

(Ленинград)

В инвариантной форме получено выражение для вектора потока энергии изгибных колебаний пластины. В качестве приложения рассмотрен вывод выражений для перерезывающей силы, изгибающего и вращающего момента в произвольной ортогональной системе координат и вывод условия типа ортогональности для нормальных волн, распространяющихся в тонкой упругой полосе со свободными кромками.

При анализе колебаний в системах с распределенными параметрами в ряде случаев оказывается полезным рассмотрение вектора потока энергии. Выражения для вектора Умова — Пойтинга в электродинамике и для вектора потока энергии в акустике общеизвестны. Аналогичный вектор для изгибных колебаний пластины упоминался лишь в работах [1–3]. В [1] этот вектор использован при доказательстве теоремы единственности для двухкомпонентной акустической модели, состоящей из идеальной сжимаемой жидкости и находящихся с ней в контакте упругих пластин. Однако выражение потока энергии, найденное в [1] (оно позднее было приведено в [2, 3] со ссылкой на [1]), ошибочно. Ниже находится точное (в рамках применимости уравнения Кирхгофа) выражение для вектора потока энергия изгибных колебаний пластины и указываются некоторые приложения полученной формулы.

Выпишем выражение для плотности энергии w изгибных колебаний пластины [4]

$$w = \frac{D}{2}\left\{\left(\frac{\partial^2\zeta}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\zeta}{\partial y^2}\right)^2 + 2(1-\sigma)\left[\left(\frac{\partial^2\zeta}{\partial x\,\partial y}\right)^2 - \frac{\partial^2\zeta}{\partial x^2}\frac{\partial^2\zeta}{\partial y^2}\right]\right\} + \frac{\rho}{2}\left(\frac{\partial\zeta}{\partial t}\right)^2 \tag{1}$$

Здесь $\zeta = \zeta(x, y, t)$ — изгибное смещение пластины, D — цилиндрическая жесткость, ρ — поверхностная плотность пластины, σ — модуль Пуассона.

Продифференцируем (1) по времени t и исключим вторую производную по t при помощи уравнения изгибных колебаний пластины

$$D\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)^2\zeta+\rho\frac{\partial^2\zeta}{\partial t^2}=0 \tag{2}$$

В результате после элементарных преобразований получим

$$\frac{\partial w}{\partial t}=D\left\{2\frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{\partial\zeta}{\partial t}\left(\frac{\partial^3\zeta}{\partial x^3}+\frac{\partial^3\zeta}{\partial x\,\partial y^2}\right)+\right.\right. \tag{3}$$

$$+2\frac{\partial}{\partial y}\left[\frac{\partial\zeta}{\partial t}\left(\frac{\partial^3\zeta}{\partial y^3}+\frac{\partial^3\zeta}{\partial y\,\partial x^2}\right)\right]-\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left[\frac{\partial\zeta}{\partial t}\left(\frac{\partial^2\zeta}{\partial x^2}+\sigma\frac{\partial^2\zeta}{\partial y^2}\right)\right]-$$

$$\left.-\frac{\partial^2}{\partial y^2}\left[\frac{\partial\zeta}{\partial t}\left(\frac{\partial^2\zeta}{\partial y^2}+\sigma\frac{\partial^2\zeta}{\partial x^2}\right)\right]-2(1-\sigma)\frac{\partial^2}{\partial x\,\partial y}\left(\frac{\partial\zeta}{\partial t}\frac{\partial^2\zeta}{\partial x\,\partial y}\right)\right\}$$

Введем вектор потока энергии Π соотношением

$$\partial w/\partial t+\operatorname{div}\Pi=0 \tag{4}$$

Отождествляя (3) и (4) и воспользовавшись двумерными операторами Гамильтона ∇ и Лапласа Δ, получим

$$\Pi=-D\left\{2\frac{\partial\zeta}{\partial t}\nabla\Delta\zeta-\sigma\nabla\frac{\partial\zeta}{\partial t}\Delta\zeta-(1-\sigma)\left(\nabla\cdot\frac{\partial\zeta}{\partial t}\nabla\right)\nabla\zeta\right\}$$

$$\nabla=\mathbf{i}\frac{\partial}{\partial x}+\mathbf{j}\frac{\partial}{\partial y},\qquad \Delta=(\nabla\cdot\nabla)$$

Здесь, согласно традиционной символике [5], предполагается, что оператор ∇ действует на все величины, стоящие в произведениях после него. Во втором и третьем слагаемых справа первый оператор ∇ действует как на ζ, так и на $\partial\zeta/\partial t$. С помощью обычных приемов [5] избавимся от этого неудобства. В результате придем к окончательному выражению

$$\Pi=-D\left\{\frac{\partial\zeta}{\partial t}\nabla\Delta\zeta-\sigma\frac{\partial\nabla\zeta}{\partial t}\Delta\zeta-(1-\sigma)\left(\frac{\partial\nabla\zeta}{\partial t}\cdot\nabla\right)\nabla\zeta\right\} \tag{5}$$

Введем ортогональные криволинейные координаты q_1, q_2

$$x=x(q_1,q_2),\qquad y=y(q_1,q_2)$$

и найдем составляющую Π_1 вектора Π вдоль координаты q_1. Рассмотрим подробнее последнее слагаемое в правой части (5), поскольку переход к криволинейным координатам в первых двух слагаемых очевиден

$$\left(\frac{\partial\nabla\zeta}{\partial t}\cdot\nabla\right)\nabla\zeta=\left(\frac{1}{H_1}\frac{\partial^2\zeta}{\partial q_1\partial t}\frac{1}{H_1}\frac{\partial}{\partial q_1}+\right.$$

$$\left.+\frac{1}{H_2}\frac{\partial^2\zeta}{\partial q_2\partial t}\frac{1}{H_2}\frac{\partial}{\partial q_2}\right)\left(\frac{1}{H_1}\frac{\partial\zeta}{\partial q_1}\mathbf{e}_1+\frac{1}{H_2}\frac{\partial\zeta}{\partial q_2}\mathbf{e}_2\right)$$

Здесь H_1, H_2 — коэффициенты Ламе, $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$ — орты. Неудобство последней формулы состоит в том, что в ней предполагается дифференцирование ортов. Используя правила дифференцирования ортов

$$\frac{\partial\mathbf{e}_i}{\partial q_i}=-\frac{1}{H_k}\frac{\partial H_i}{\partial q_k}\mathbf{e}_k,\qquad \frac{\partial\mathbf{e}_i}{\partial q_k}=\frac{1}{H_i}\frac{\partial H_k}{\partial q_i}\mathbf{e}_k$$

$$(i,k=1,2;\quad i\neq k)$$

придем к следующему выражению для составляющей вектора потока Π_1:

$$\Pi_1=F\frac{\partial\zeta}{\partial t}-M\frac{1}{H_1}\frac{\partial^2\zeta}{\partial q_1\partial t}+N\frac{1}{H_2}\frac{\partial^2\zeta}{\partial q_2\partial t} \tag{6}$$

$$F=-D\frac{1}{H_1}\frac{\partial\Delta\zeta}{\partial q_1} \tag{7}$$

$$M=-D\left\{\sigma\Delta\zeta+\frac{(1-\sigma)}{H_1}\left[\frac{\partial}{\partial q_1}\left(\frac{1}{H_1}\frac{\partial\zeta}{\partial q_1}\right)-\frac{1}{H_1H_2}\frac{\partial\zeta}{\partial q_1}\frac{\partial H_1}{\partial q_2}\right]\right\}$$

$$N=D\frac{(1-\sigma)}{H_2}\left[\frac{\partial}{\partial q_2}\left(\frac{1}{H_1}\frac{\partial\zeta}{\partial q_1}\right)-\frac{1}{H_1H_2}\frac{\partial\zeta}{\partial q_2}\frac{\partial H_2}{\partial q_1}\right]$$

Мысленно проведем в пластине разрез $q_2 = q_2^\circ = \mathrm{const}$ и отбросим часть пластины, для которой $q_2 > q_2^\circ$. Тогда F имеет смысл перерезывающей силы, действующей на пластину со стороны отброшенной части, M — изгибающего и N — вращающего момента. Выражения (7) значительно удобнее традиционных формул [4], в которых участвуют декартовы переменные x и y и переход от которых к произвольным координатам связан с прямым пересчетом производных. В частности, для полярных координат $x = r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi$, $q_1 = r$, $q_2 = \varphi$, $H_1 = 1$, $H_2 = r$ немедленно получаем известные выражения.

В качестве другого приложения полученного результата рассмотрим вывод выражения для потока колебательной энергии в упругой ленте. В целях краткости так будем называть бесконечно длинную упругую пластину постоянной ширины. Колебания такой пластины изучались в [6]. Направим ось Oy вдоль пластины, уравнение кромок пластины пусть будет $x = \pm a$.

При $|x| < a$, $y \in (-\infty, +\infty)$ для пластины имеет место уравнение (2). Кромки пластины предполагаются свободными, что дает следующие граничные условия:

$$F - \frac{\partial N}{\partial y} = -D\left[\frac{\partial^3\zeta}{\partial x^3} + (2-\sigma)\frac{\partial^3\zeta}{\partial x\,\partial y^2}\right] = 0 \tag{8}$$

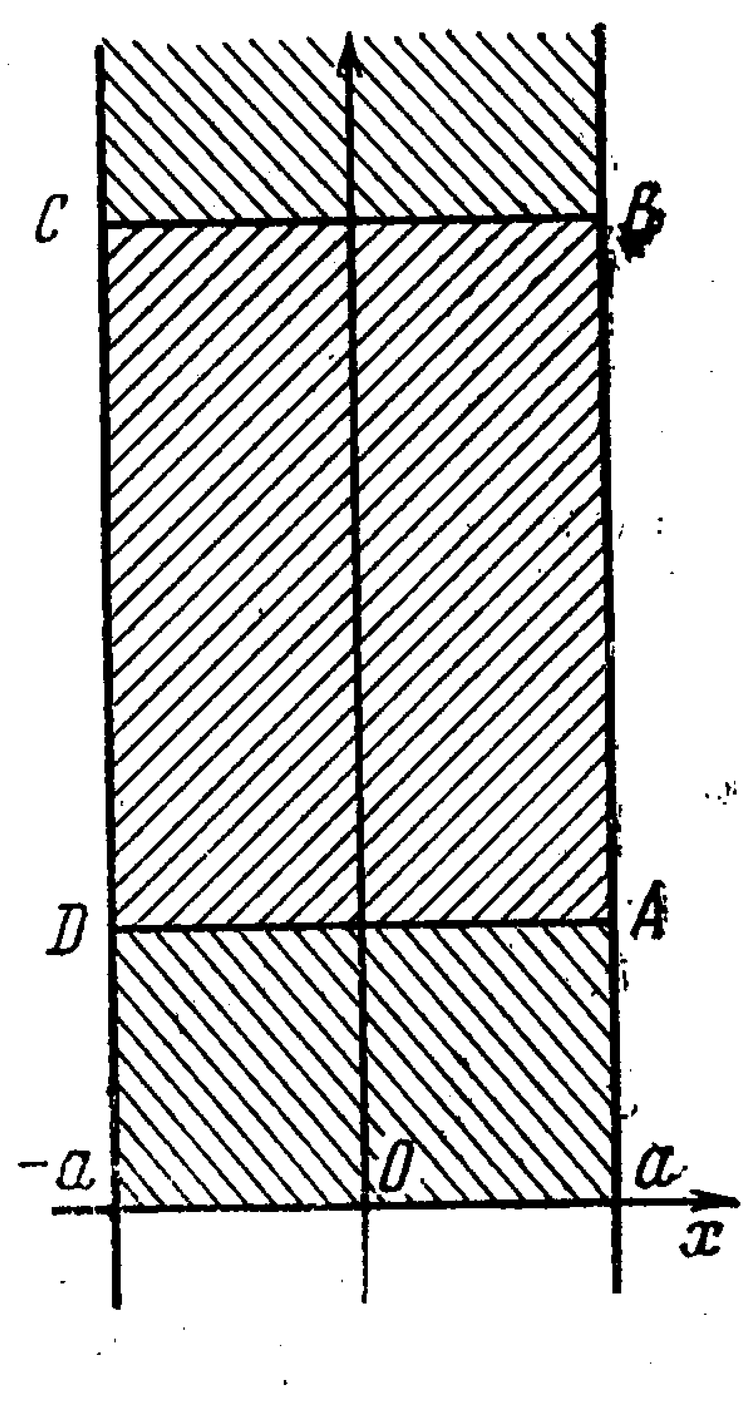
$$M = -D\left(\frac{\partial^2\zeta}{\partial x^2} + \sigma\frac{\partial^2\zeta}{\partial y^2}\right) = 0, \quad x = \pm a$$

Вырежем мысленно из пластины прямоугольник $ABCD$ (фигура), две стороны которого совпадают с кромками пластины, и вычислим поток энергии Π через его контур. Воспользуемся формулой Грина

$$\iint\limits_{ABCD} div\Pi\,dx\,dy = \int_A^B \Pi_x\,dy - \int_B^C \Pi_y\,dx + \int_C^D \Pi_x\,dy - \int_D^A \Pi_y\,dx$$

В силу (5) составляющую Π_x можно записать в следующем виде:

$$\Pi_x = -D\left[\frac{\partial\zeta}{\partial t}\left(\frac{\partial^3\zeta}{\partial x^3} + \frac{\partial^3\zeta}{\partial x\,\partial y^2}\right) - (1-\sigma)\frac{\partial^2\zeta}{\partial y\,\partial t}\frac{\partial^2\zeta}{\partial x\,\partial y} - \frac{\partial^2\zeta}{\partial x\,\partial t}\left(\frac{\partial^2\zeta}{\partial x^2} + \sigma\frac{\partial^2\zeta}{\partial y^2}\right)\right] \tag{9}$$



Выражение для Π_y получается отсюда круговой заменой $x \to y \to x$. При вычислении интегралов от Π_x во втором слагаемом в квадратных скобках в (9) проведем интегрирование по частям, а затем воспользуемся граничными условиями (8). Подынтегральные члены обратятся при этом в нуль, поэтому

$$\int_A^B \Pi_x\,dy = D(1-\sigma)\left.\frac{\partial\zeta}{\partial t}\frac{\partial^2\zeta}{\partial x\,\partial y}\right|_A^B$$

При вычислении интегралов от Π_y также проведем интегрирование по частям во втором слагаемом. В результате имеем

$$\iint\limits_{ABCD} \operatorname{div}\Pi\,dx\,dy =$$

$$= D\int_B^C \left\{\frac{\partial^2\zeta}{\partial y\,\partial t}\left(\frac{\partial^2\zeta}{\partial y^2} + \sigma\frac{\partial^2\zeta}{\partial x^2}\right) - \frac{\partial\zeta}{\partial t}\left[\frac{\partial^3\zeta}{\partial y^3} + (2-\sigma)\frac{\partial^3\zeta}{\partial y\,\partial x^2}\right]\right\}dx +$$

$$+ D\int_D^A \left\{\frac{\partial^2\zeta}{\partial y\,\partial t}\left(\frac{\partial^2\zeta}{\partial y^2} + \sigma\frac{\partial^2\zeta}{\partial x^2}\right) - \frac{\partial\zeta}{\partial t}\left[\frac{\partial^3\zeta}{\partial y^3} + (2-\sigma)\frac{\partial^3\zeta}{\partial y\,\partial x^2}\right]\right\}dx +$$

$$+ 2D(1-\sigma)\left(\left.\frac{\partial\zeta}{\partial t}\frac{\partial^2\zeta}{\partial x\,\partial y}\right|_B^C + \left.\frac{\partial\zeta}{\partial t}\frac{\partial^2\zeta}{\partial x\,\partial y}\right|_D^A\right)$$

В отсутствие внешних источников поля $\operatorname{div}\Pi = 0$, следовательно, выражение

$$\Pi = 2D(1-\sigma)\frac{\partial\zeta}{\partial t}\frac{\partial^2\zeta}{\partial x\,\partial y}\Big|_{x=-a}^{x=a} + \tag{10}$$

$$+ D\int_{-a}^{a}\left\{\frac{\partial^2\zeta}{\partial y\,\partial t}\left(\frac{\partial^2\zeta}{\partial y^2}+\sigma\frac{\partial^2\zeta}{\partial x^2}\right)-\frac{\partial\zeta}{\partial t}\left[\frac{\partial^3\zeta}{\partial y^3}+(2-\sigma)\frac{\partial^3\zeta}{\partial y\,\partial x^2}\right]\right\}dx$$

в этом случае не зависит от выбора y. Это выражение имеет смысл энергии изгибных колебаний, переносимой за единицу времени через произвольное нормальное сечение упругой ленты в направлении возрастания координаты y. Следует обратить внимание на наличие в (10) внеинтегрального члена.

Обратимся теперь к рассмотрению стационарных процессов. Предположим, что зависимость от времени задается множителем $\exp(-i\omega t)$ и условимся его всегда опускать. В качестве смещения в пластине будем, как обычно, принимать действительную часть комплексной величины $\zeta(x, y)\exp(-i\omega t)$. В общем случае для вектора потока энергии (5) имеем после усреднения по времени (звездочка — знак комплексного сопряжения)

$$\langle\Pi\rangle = -\frac{D\omega}{2}\operatorname{Im}\{\zeta^*\nabla\Delta\zeta - \sigma\nabla\zeta^*\Delta\zeta - (1-\sigma)(\nabla\zeta^*\cdot\nabla)\nabla\zeta\}$$

Для потока энергии в упругой ленте (10) соответственно получим

$$\langle\Pi\rangle = 2D\omega(1-\sigma)\operatorname{Im}\zeta^*\frac{\partial^2\zeta}{\partial x\,\partial y}\Big|_{x=-a}^{x=a} +$$

$$+\frac{D\omega}{2}\operatorname{Im}\int_{-a}^{a}\left\{\frac{\partial\zeta^*}{\partial y}\left(\frac{\partial^2\zeta}{\partial y^2}+\sigma\frac{\partial^2\zeta}{\partial x^2}\right)-\zeta^*\left[\frac{\partial^3\zeta}{\partial y^3}+(2-\sigma)\frac{\partial^3\zeta}{\partial y\,\partial x^2}\right]\right\}dx$$

Введем в рассмотрение две нормальные волны [6]

$$\zeta_1 = u_1(x)e^{i\mu_1 y}, \quad \zeta_2 = u_2(x)e^{i\mu_2 y}$$
$$(\operatorname{Im} u_{1,2} = 0, \quad \operatorname{Im}\mu_1, \mu_2 = 0)$$

распространяющиеся в упругой ленте с волновыми числами μ_1 и μ_2 ($\mu_1 \ne \mu_2$). Для потока энергии $\langle\Pi\rangle$ их суперпозиции $\zeta = \zeta_1 + \zeta_2$ имеем, очевидно

$$\langle\Pi\rangle = \langle\Pi_1\rangle + \langle\Pi_2\rangle + \langle\Pi_{12}\rangle \tag{11}$$

Здесь $\langle\Pi_1\rangle$, $\langle\Pi_2\rangle$ — потоки энергии, переносимые порознь волнами ζ_1 и ζ_2. Для потока $\langle\Pi_{12}\rangle$ энергии их взаимодействия после некоторых вычислений получим

$$\langle\Pi_{12}\rangle = \frac{D\omega}{2}(\mu_1+\mu_2)\cos[(\mu_1-\mu_2)y]\left\{\sigma(u_2u_1' + u_1u_2')\Big|_{-a}^{a} + \right. \tag{12}$$

$$\left. + \int_{-a}^{a}[(\mu_1^2+\mu_2^2)u_1u_2 + 2u_1'u_2']\,dx\right\}$$

Величины $\langle\Pi\rangle$, $\langle\Pi_1\rangle$, $\langle\Pi_2\rangle$ не зависят от y, откуда в силу (11) поток $\langle\Pi_{12}\rangle$ также не должен зависеть от y. Поэтому выражение в фигурных скобках в (12) должно равняться нулю. В результате приходим к следующему условию типа ортогональности [7] для нормальных волн в упругой ленте:

$$\sigma(u_1u_2' + u_2u_1')\Big|_{-a}^{a} + \int_{-a}^{a}[(\mu_1^2+\mu_2^2)u_1u_2 + 2u_1'u_2']\,dx = 0$$

Поступила 7 VIII 1975

ЛИТЕРАТУРА

1. *Красильников В. Н.* О решении некоторых гранично-контактных задач линейной гидродинамики. ПММ, 1961, т. 25, вып. 4.
2. *Коновалюк И. П., Красильников В. Н.* Влияние ребра жесткости на отражение плоской звуковой волны от тонкой пластины. В сб.: Дифракция и излучение волн, вып 4. Изд-во ЛГУ, 1965.
3. *Хейсин Д. Е.* Динамика ледяного покрова. Л. Гидрометеоиздат, 1967.
4. *Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М.* Теоретическая физика, т. 7. Теория упругости. М., «Наука», 1965.
5. *Кочин Н. Е.* Векторное исчисление и начала тензорного исчисления. М., Изд-во АН СССР, 1961.
6. *Коненков Ю. К., Наумкина Н. И., Тартаковский Б. Д.* Исследование вынужденных изгибных колебаний упругой полосы. Акуст. ж., 1965, т. 11, вып. 3.
7. *Федорюк М. В.* Соотношение типа ортогональности в твердых волноводах. Акуст. ж., 1974, т. 20, вып. 2.

УДК 539.3

СУЩЕСТВОВАНИЕ ГЛОБАЛЬНОГО ФУНКЦИОНАЛА ЛЯПУНОВА ДЛЯ НЕКОТОРЫХ КЛАССОВ НЕЛИНЕЙНЫХ РАСПРЕДЕЛЕННЫХ СИСТЕМ

В. А. Брусин

(Горький)

В продолжение работы [1] исследуется существование глобального функционала Ляпунова для нелинейных эволюционных уравнений в гильбертовом пространстве. Полученные результаты представляют собой обобщение на системы с бесконечномерным фазовым пространством известных результатов в теории абсолютной устойчивости [2, 3] и служат основой для исследования нелокальной устойчивости и неустойчивости нелинейных распределенных систем. Иллюстрация полученных условий существования глобального функционала Ляпунова проводится на примере нелинейной параболической системы, заданной на отрезке [0, 1].

Впервые понятие функционала Ляпунова было введено и эффективно использовано в работе [4].

1. Эволюционные уравнения в гильбертовом пространстве. Класс N нелинейных операторов. Пусть H, V, U — гильбертовы пространства [5] над полем вещественных чисел со скалярными произведениями $\langle , \rangle_H$, $\langle , \rangle_V$, $\langle , \rangle_U$ и нулевыми элементами θ_H, θ_V, θ_U соответственно. Обозначим H^*, V^* гильбертовы пространства, сопряженные с H и V [5], предположим, что $V \subset H = H^* \subset V^*$, пространство V плотно в H и вложение $V \to H$ непрерывно. Пусть A — нелинейный непрерывный оператор $V \to V^*$, замкнутый в пространстве H. Пусть далее B — линейный ограниченный оператор $U \to V^*$, $\Phi(\cdot)$ — нелинейный (вообще говоря) оператор $H \times R^1 \to U$, где R^1 — вещественная ось.

Рассмотрим нелинейное эволюционное уравнение [6]

$$\frac{d}{dt} x(t) = Ax(t) + B\Phi(x(t), t) \tag{1.1}$$

Под обобщенным решением уравнения (1.1) на интервале (τ, T) будем понимать функцию $x(t) \in W(\tau, T; V)$, удовлетворяющую равенству

$$\int_\tau^T \left[\left\langle x(t), \frac{d\xi(t)}{dt}\right\rangle + \langle Ax(t), \xi(t)\rangle + \langle B\Phi(x(t), t), \xi(t)\rangle\right] dt = 0 \tag{1.2}$$

для любой гладкой по t, финитной на интервале (τ, T) функции $(\tau, T) \to V$. Здесь $W(\tau, T; V)$ — гильбертово пространство отображений $y(t) : (\tau, T) \to V$, таких, что