УДК 533.6·011.8

УРАВНЕНИЕ ФОККЕРА — ПЛАНКА ДЛЯ БРОУНОВСКОГО ДВИЖЕНИЯ ВРАЩАЮЩИХСЯ СФЕРИЧЕСКИХ ЧАСТИЧЕК

Н. А. Слезкин

(Москва)

Уравнение Фоккера — Планка для броуновского движения поступательно движущихся частичек устанавливается на основании уравнения Ланжевена. Уравнение Фоккера — Планка для броуновского движения частичек, имеющих помимо поступательной скорости еще и угловую скорость вращения, до сих пор не было установлено. Это обстоятельство, по всей видимости, объясняется тем, что при наличии вращения (частички уравнение Ланжевена для вектора скорости поступательного движения) частички необходимо дополнить соответствующим уравнением для вектора угловой скорости вращения, содержащее помимо систематического момента сопротивления, линейно-зависящего от самой угловой скорости вращения, еще и случайный момент, быстро меняющийся со временем. При этом для обеспечения совместности системы двух векторных дифференциальных уравнений потребуется ввести дополнительные соотношения не только между коэффициентами систематических сопротивлений, но и между случайными векторами, быстро меняющимися со временем.

В [1] уравнение Фоккера — Планка для поступательного движения броуновских частичек установлено с помощью уравнений Больцмана для смеси двух газов. Такой же способ можно применить для броуновского движения сферических частичек, имеющих помимо поступательных скоростей угловые скорости собственных вращений. При этом не возникнет необходимости вводить дополнительные соотношения между случайными быстро меняющимися векторами.

В данной статье проводится вывод уравнения Фоккера — Планка для новой модели вращающихся сферических молекул, которая была введена в [2].

1. При выводе основного уравнения Больцмана для броуновского движения вращающихся сферических частичек будем рассматривать, как и в [1], смесь двух газов в однородном состоянии без учета действия внешних сил. Частички первого газа будем называть броуновскими; масса такой частички намного превышает массу частички второго газа, а их количество в единице объема намного меньше количества частичек второго газа, т. е.

$$m_2/m_1 = \varepsilon \ll 1, \quad n_2/n_1 \gg 1 \tag{1.1}$$

При таких предположениях из системы двух уравнений Больцмана можно сохранить лишь одно, в правой части которого содержится только один интеграл столкновений броуновских частичек с частичками второго газа. Это основное уравнение можно представить в виде (см. [3], стр. 246)

$$\frac{\partial f_1}{\partial t} = n_2\sigma^2 \int\limits_{(\boldsymbol{\omega}_2)} \int\limits_{(\mathbf{c}_2)} \int\limits_{(\mathbf{k})} (f_1'f_2' - f_1f_2)(\mathbf{c}_1 - \mathbf{c}_2)\,\mathbf{k}d\mathbf{k}\, d\mathbf{c}_2 d\boldsymbol{\omega}_2 \tag{1.2}$$

где $\mathbf{c}_1$ и $\mathbf{c}_2$ — векторы скоростей поступательных движений частичек, $\boldsymbol{\omega}_2$ — вектор угловой скорости вращения частичек второго газа, $\mathbf{k}$ — единичный вектор направления от центра броуновской частички к центру частички второго газа в момент их прямого столкновения, f_1 и f_2 — функции распределения скоростей частичек смеси перед их прямым столкновением, f_1' и f_2' — те же функции распределения скоростей перед их обратным столкновением, а σ — сумма радиусов сферических частичек, т. е.

$$\sigma = a_1 + a_2$$

Повторяя рассуждения статьи [1], можно показать, что для частичек второго газа можно использовать выражение максвелловской функции распределения скоростей предельного термодинамического состояния равновесия второго газа, имеющей вид

$$f_2 = \frac{(m_2 I_2)^{3/2}}{(2\pi k T_2)^3} \exp\left(-\frac{m_2 c_2^2 + I_2 \omega_2^2}{2kT_2}\right) \tag{1.3}$$

где I_2 — осевой момент инерции частички второго газа, а T_2 — парциальная температура этого газа.

Если ввести разности проекций на неподвижные оси векторов

$\mathbf{c}_1'$, $\mathbf{c}_1$, $\boldsymbol{\omega}_1'$ и $\boldsymbol{\omega}_1$, т. е.

$$\Delta c_{1i} = c_{1i}' - c_{1i}, \quad \Delta\omega_{1i} = \omega'_{1i} - \omega_{1i} \tag{1.4}$$

то функцию распределения скоростей броуновских частичек перед их обратным столкновением с легкими частичками можно представить в виде ряда Тэйлора

$$f_1' = f_1 + \sum_{\mu=1} \frac{1}{\mu!}\left[\sum_{i=1}^{i=3}\left(\Delta c_{1i}\frac{\partial}{\partial c_{1i}} + \Delta\omega_{1i}\frac{\partial}{\partial\omega_{1i}}\right)^{(\mu)}(f_1)\right] \tag{1.5}$$

Полагая

$$I_1 = m_1 \varkappa_1, \quad I_2 = m_2 \varkappa_2 = \varepsilon m_1 \varkappa_2 \tag{1.6}$$

из закона сохранения суммы кинетических энергий в обратном столкновении рассматриваемых частичек получим

$$c_2'^2 + \varkappa_2 \omega_2'^2 = c_2^2 + \varkappa_2\omega_2^2 - \frac{1}{\varepsilon}[(2\mathbf{c}_1 + \Delta\mathbf{c}_1)\Delta\mathbf{c}_1 + \varkappa_1(2\boldsymbol{\omega}_1 + \Delta\boldsymbol{\omega}_1)\cdot\Delta\boldsymbol{\omega}_1] \tag{1.7}$$

Подставляя (1.7) в соответственное равенство для f_2', получим

$$f_2' = f_2 + f_2 \sum_{\mu=1} \frac{1}{\mu!}\left\{\frac{m_2}{2\varepsilon k T_2}[(2\mathbf{c}_1 + \Delta\mathbf{c}_1)\cdot\Delta\mathbf{c}_1 + \varkappa_1(2\boldsymbol{\omega}_1 + \Delta\boldsymbol{\omega}_1)\cdot\Delta\boldsymbol{\omega}_1]\right\}^{\mu} \tag{1.8}$$

Ряд в правой части равенства (1.8) представляет собой разложение функции f_2' по степеням $\sqrt{\varepsilon}$, если принять скорости $\mathbf{c}_2$ и $\boldsymbol{\omega}_2$ по величине порядка единицы, скорости броуновских частичек порядка $\sqrt{\varepsilon}$, а разности $\Delta\mathbf{c}_1$ и $\Delta\boldsymbol{\omega}_1$ имеющими порядок ε.

Если подставить выражения (1.5) и (1.8) и выписать слагаемые, имеющие порядок величины ε в меньших степенях, то можно получить

$$\begin{aligned} f_1'f_2' - f_1 f_2 = f_2 \Bigg\{ & \left(\frac{\partial f_1}{\partial \mathbf{c}_1}\cdot\Delta\mathbf{c}_1 + \frac{\partial f_1}{\partial\boldsymbol{\omega}_1}\cdot\Delta\boldsymbol{\omega}_1\right)\left[1 + \frac{m_2}{\varepsilon k T_2}(\mathbf{c}_1\cdot\Delta\mathbf{c}_1 + \varkappa_1\boldsymbol{\omega}_1\cdot\Delta\boldsymbol{\omega}_1\right] + \\ & + f_1\frac{m_2}{2\varepsilon k T_2}[(2\mathbf{c}_1 + \Delta\mathbf{c}_1)\cdot\Delta\mathbf{c}_1 + \varkappa_1(2\boldsymbol{\omega}_1 + \Delta\boldsymbol{\omega}_1)\cdot\Delta\boldsymbol{\omega}_1] + \\ & + \frac{1}{2}f_1\left(\frac{m_2}{kT_2}\right)^2\left[\left(\frac{\mathbf{c}_1\cdot\Delta\mathbf{c}_1}{\varepsilon}\right)^2 + \varkappa_1^2\left(\frac{\boldsymbol{\omega}_1\cdot\Delta\boldsymbol{\omega}_1}{\varepsilon}\right)^2 + 2\frac{\varkappa_1}{\varepsilon^2}\mathbf{c}_1\cdot\Delta\mathbf{c}_1\boldsymbol{\omega}_1\cdot\Delta\boldsymbol{\omega}_1\right] + \\ & + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{i=3}\sum_{j=1}^{j=3}\left(\Delta c_{1i}\Delta c_{1j}\frac{\partial^2 f_1}{\partial c_{1i}\partial c_{1j}} + \Delta\omega_{1i}\Delta\omega_{1j}\frac{\partial^2 f_1}{\partial\omega_{1i}\partial\omega_{1j}} + \right. \\ & \left. + 2\Delta c_{1i}\Delta\omega_{1j}\frac{\partial^2 f_1}{\partial c_{1i}\partial\omega_{1j}}\right)\Bigg\} \end{aligned} \tag{1.9}$$

2. В [3] рассматривается модель Бриана вращающейся молекулы, в которой поверхность сферы считается абсолютно-шероховатой. В [2] введена новая модель вращающейся молекулы на основе предположения, что ее поверхность является абсолютно гибкой. Для обеих этих моделей имеют место законы: 1) сохранения суммы кинетических энергий соударяющихся вращающихся частичек, 2) сохранения элемента объема 12-мерного пространства скоростей при столкновении частичек и 3) взаимного преобразования частей кинетических энергий от вращательных движений частичек в некоторые части кинетических энергий от их поступательных движений. Различие этих моделей заключается в том, что в модели Бриана ударные импульсы при столкновении представляются одним их главным вектором, а в новой модели ударные импульсы, распределенные по некоторой малой площадке вблизи начальной точки соприкасания частичек, приведены к главному вектору и к их главному моменту. Из двух условий абсолютной гибкости поверхностей соударяющихся частичек одно условие совпадает с условием абсолютной упругошероховатости в модели Бриана, а второе условие сводится к равенству разностей угловых скоростей этих частичек до и после столкновения, но с обратным знаком. Для модели вращающихся молекул с абсолютно гибкими поверхностями формулы связи тепловых скоростей $\mathbf{c}_1'$ и $\boldsymbol{\omega}_1'$ перед обратным столкновением с тепловыми скоростями $\mathbf{c}_1$ и $\boldsymbol{\omega}_1$ перед прямым столкновением представляются в виде

$$
\begin{aligned}
&\mathbf{c}_1' - \mathbf{c}_1 = \Delta\mathbf{c}_1 = \frac{2\varepsilon}{(1+\varepsilon)(\varkappa_1+\varepsilon\varkappa_2)+\varepsilon(a_1+a_2)^2} \times \\
&\times \Big\{(\varkappa_1+\varepsilon\varkappa_2)(\mathbf{c}_2-\mathbf{c}_1) + (a_1+a_2)(\varepsilon\varkappa_2\boldsymbol{\omega}_2+\varkappa_1\boldsymbol{\omega}_1)\times\mathbf{k} + \frac{\varepsilon}{1+\varepsilon}(a_1+a_2)^2 \times \\
&\times [(\mathbf{c}_2-\mathbf{c}_1)\cdot\mathbf{k}]\,\mathbf{k}\Big\} \qquad (2.1)\\
&\boldsymbol{\omega}_1' - \boldsymbol{\omega}_1 = \Delta\boldsymbol{\omega}_1 = -\frac{2\varepsilon(a_1+a_2)}{(1+\varepsilon)(\varkappa_1+\varepsilon\varkappa_2)+\varepsilon(a_1+a_2)^2} \times \\
&\times \Big\{\mathbf{k}\times(\mathbf{c}_2-\mathbf{c}_1) - \frac{\varkappa_2(1+\varepsilon)}{a_1+a_2}(\boldsymbol{\omega}_2-\boldsymbol{\omega}_1) + (a_1+a_2)\,\boldsymbol{\omega}_1 - \\
&- \frac{a_1+a_2}{\varkappa_1+\varepsilon\varkappa_2}\,\mathbf{k}\,[\mathbf{k}\cdot(\varepsilon\varkappa_2\boldsymbol{\omega}_2+\varkappa_1\boldsymbol{\omega}_1)]\Big\}
\end{aligned}
$$

Так как в дальнейшем вычисления всей правой части уравнения (1.2) будут проводиться с учетом слагаемых, имеющих порядок малости не выше ε в первой степени, а в выражении (1.9) встречаются множители $\partial f_1 / \partial \mathbf{c}_1$ и $\partial f_1 / \partial \boldsymbol{\omega}_1$, имеющие порядок $1/\sqrt{\varepsilon}$, то в правых частях равенств (2.1) потребуется сохранить слагаемые, имеющие порядок малости $\varepsilon^{3/2}$. В таком случае вместо точных формул (2.1) могут быть использованы приближенные формулы в виде

$$
\begin{aligned}
&\Delta\mathbf{c}_1 = 2\varepsilon(\mathbf{c}_2-\mathbf{c}_1+\sigma\boldsymbol{\omega}_1\times\mathbf{k}) \qquad (2.2)\\
&\Delta\boldsymbol{\omega}_1 = -\frac{2\varepsilon}{\varkappa_1}[\sigma\mathbf{k}\times(\mathbf{c}_2-\mathbf{c}_1) - \varkappa_2\boldsymbol{\omega}_2 + (\varkappa_2+\sigma^2)\,\boldsymbol{\omega}_1 - \sigma^2\mathbf{k}\,(\boldsymbol{\omega}_1\cdot\mathbf{k})]
\end{aligned}
$$

3. Интегрирование в правой части уравнения (1.2) по элементарному телесному углу $d\mathbf{k}$ должно проводиться в пределах полусферы, центр которой совпадает с центром фиксированной броуновской частички в ее прямом столкновении с частичкой второго газа, а ось симметрии этой полусферы перпендикулярна направлению вектора относительной скорости $\mathbf{c}_2 - \mathbf{c}_1$, набегающей на броуновскую частичку частички второго газа. При соответственном выборе углов имеем

$$d\mathbf{k} = \sin\alpha\, d\alpha\, d\varphi \qquad (3.1)$$

Пределами интегрирования по углу α, образованному вектором $\mathbf{k}$ с направлением разности векторов $\mathbf{c}_1 - \mathbf{c}_2$, будут 0 и $\pi/2$, а по углу φ — 0 и 2π. В частности, имеем

$$\int\limits_{(\mathbf{k})} (\mathbf{c}_1-\mathbf{c}_2)\cdot\mathbf{k}\,d\mathbf{k} = \pi\,|c_1-c_2| \qquad (3.2)$$

Модуль относительной скорости $|c_1 - c_2|$ в (3.2) можно разложить по биному Ньютона в виде

$$|c_1-c_2| = c_2 - \frac{\mathbf{c}_1\cdot\mathbf{c}_2}{c_2} + \frac{c_1^2}{2c_2} - \frac{(\mathbf{c}_1\cdot\mathbf{c}_2)^2}{2c_2^3} + \cdots \qquad (3.3)$$

При использовании равенств (2.2) и (3.2) в правой части уравнения (1.2) появятся слагаемые, имеющие порядок малости выше ε в первой степени. По этой причине перед интегрированием по телесному углу $d\mathbf{k}$ целесообразно провести разложения отдельных слагаемых подынтегрального выражения в уравнении (1.2) с сохранением лишь слагаемых порядка ε в первой степени. Для вычисления проекций $\Delta\omega_{1i}$ на неподвижные оси x_1, x_2 и x_3 необходимо воспользоваться таблицей ([4], стр. 190) направляющих косинусов осей ξ_1, ξ_2 и ξ_3, связанных с фиксированной броуновской частичкой, и вычислить проекции единичного вектора $\mathbf{k}$ на неподвижные оси. С помощью этих вычислений получим

$$k_1 = \sin\alpha\cos\varphi\cos\psi - \sin\alpha\sin\varphi\sin\psi\cos\theta + \cos\alpha\sin\theta\sin\psi \tag{3.4}$$

$$\int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi/2} k_1^2 \cos\alpha\sin\alpha d\alpha = \frac{\pi}{4}(1+\sin^2\theta\sin^2\psi) \tag{3.5}$$

где θ — угол между ξ_3 и x_3, ψ — угол между ξ_1 и x_1, ось ξ_1 — линия узлов. Элементы объема пространств $\mathbf{c}_2$ и $\boldsymbol{\omega}_2$ представляются в сферических координатах, например

$$d\mathbf{c}_2 = c_2{}^2 \sin\theta_2 \, dc_2 d\theta_2 d\psi_2 \tag{3.6}$$

Формулы перехода от углов θ и ψ к углам θ_2 и ψ_2 имеют вид

$$\begin{gathered}
\cos\theta = -\cos\theta_2\left(1+\frac{\mathbf{c}_1\cdot\mathbf{c}_2}{c_2}\right)+\frac{c_{13}}{c_2}+O(\varepsilon)\\
\sin\theta\sin\psi = -\sin\theta_2\cos\psi_2\left(1+\frac{\mathbf{c}_1\cdot\mathbf{c}_2}{c_2}\right)+\frac{c_{11}}{c_2}+O(\varepsilon)\\
\sin\theta\cos\psi = \sin\theta_2\sin\psi_2\left(1+\frac{\mathbf{c}_1\cdot\mathbf{c}_2}{c_2}\right)-\frac{c_{12}}{c_2}+O(\varepsilon)
\end{gathered} \tag{3.7}$$

4. После подстановки (1.9) в правую часть уравнения (1.2) и использования равенств (2.2) и соответственных разложений отдельных слагаемых подынтегрального выражения (1.2), которые рассматривались в п. 3, и выполнения многочисленных квадратур можно получить следующее уравнение Фоккера — Планка:

$$\frac{\partial f_1}{\partial t} = \beta_1 f_1 + \beta_2\mathbf{c}_1\cdot\frac{\partial f_1}{\partial \mathbf{c}_1} + \beta_3\boldsymbol{\omega}_1\cdot\frac{\partial f_1}{\partial \boldsymbol{\omega}_1} + \beta_4\Delta_{c_1}f_1 + \beta_5\Delta_{\omega_1}f_1 \tag{4.1}$$

где Δ_{c_1} и Δ_{ω_1} — операторы Лапласа в пространствах векторов $\mathbf{c}_1$ и $\boldsymbol{\omega}_1$, а коэффициенты представляются в виде

$$\begin{aligned}
\beta_1 &= 4\varepsilon\left(4+3\frac{\varkappa_2}{\varkappa_1}+2\frac{\sigma^2}{\varkappa_1}\right)n_2\sigma^2\sqrt{\frac{2\pi kT_2}{m_2}}\\
\beta_2 &= \frac{16}{3}\varepsilon n_2\sigma^2\sqrt{\frac{2\pi kT_2}{m_2}}\\
\beta_3 &= 2\varepsilon\left(2\frac{\varkappa_2}{\varkappa_1}+\frac{4}{3}\frac{\sigma^2}{\varkappa_1}\right)n_2\sigma^2\sqrt{\frac{2\pi kT_2}{m_2}}\\
\beta_4 &= \frac{16}{3}\sqrt{2\pi}\,\varepsilon^2\left(\frac{kT_2}{m_2}\right)^{3/2}n_2\sigma^2\\
\beta_5 &= 4\sqrt{2\pi}\,\varepsilon^2\left(\frac{\varkappa_2}{\varkappa_1{}^2}+\frac{2}{3}\frac{\sigma^2}{\varkappa_1{}^2}\right)n_2\sigma^2\left(\frac{kT_2}{m_2}\right)^{3/2}
\end{aligned} \tag{4.2}$$

Из равенств (4.2) получаем соотношения

$$\beta_1 = 3(\beta_2+\beta_3), \quad \beta_4 = \frac{kT_2}{m_2}\varepsilon\beta_2, \quad \beta_5 = \frac{kT_2}{m_2\varkappa_1}\varepsilon\beta_3$$

при использовании которых уравнение (4.1) Фоккера — Планка для вращающихся частичек с абсолютно гибкими поверхностями принимает вид

$$\frac{\partial f_1}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial \mathbf{c}_1}\left(\beta_2 f_1\mathbf{c}_1 + \beta_2\frac{kT_2}{m_2}\varepsilon\frac{\partial f_1}{\partial \mathbf{c}_1}\right) + \frac{\partial}{\partial \boldsymbol{\omega}_1}\left(\beta_3 f_1\boldsymbol{\omega}_1 + \beta_3\frac{kT_2}{m_2\varkappa_1}\varepsilon\frac{\partial f_1}{\partial \boldsymbol{\omega}_1}\right) \tag{4.3}$$

При $\partial f_1 / \partial t = 0$ уравнению (4.3) удовлетворяет максвелловская функция распределения скоростей термодинамического состояния равновесия, вид которой совпадает с (1.3) при замене индекса два на единицу. Уравнение Фоккера — Планка позволяет строить функции термодинамического равновесия и находить вид функций распределения скоростей для состояния, близкого к термодинамическому равновесию, как это показано в [5].

Если сопоставить уравнение (4.3) с уравнением Фоккера — Планка для поступательно движущихся частичек ([1], стр. 63), то можно установить совпадение структуры слагаемых (4.3), относящихся к поступательной скорости, и при $\sigma = a$ коэффициент β_2 становится равным $2\beta_t$. Структура слагаемых с угловой скоростью вращения аналогична структуре слагаемых с поступательной скоростью, но коэффициент β_3 помимо величин, входящих в β_2, содержит еще моменты инерции броуновских частичек и частичек окружающей среды.

Поступила 26 II 1974

ЛИТЕРАТУРА

1. *Монтгомери Д.* Применение уравнения Больцмана к описанию броуновского движения. Механика. Сб. перев., 1973, № 1.
2. *Слезкин Н. А.* Теория удара вращающихся шаров с абсолютно гибкими поверхностями. Изв. АН СССР. МТТ, 1974, № 5.
3. *Чепмен С., Каулинг Т.* Математическая теория неоднородных газов. М., Изд-во иностр. лит., 1960.
4. *Леви-Чивита Т., Амальди У.* Курс теоретической механики, Т. 1, ч. 1, М.— Л., Объед. научно-технич. изд. НКТП СССР, 1935.
5. *Чандрасекар С.* Стохастические проблемы в физике и астрономии. М., Изд-во иностр. лит., 1947.

УДК 539.3 : 534.1

О ВЕКТОРЕ ПОТОКА ЭНЕРГИИ ДЛЯ ИЗГИБНЫХ КОЛЕБАНИЙ ПЛАСТИНЫ

Д. П. Коузов, В. Д. Лукьянов

(Ленинград)

В инвариантной форме получено выражение для вектора потока энергии изгибных колебаний пластины. В качестве приложения рассмотрен вывод выражений для перерезывающей силы, изгибающего и вращающего момента в произвольной ортогональной системе координат и вывод условия типа ортогональности для нормальных волн, распространяющихся в тонкой упругой полосе со свободными кромками.

При анализе колебаний в системах с распределенными параметрами в ряде случаев оказывается полезным рассмотрение вектора потока энергии. Выражения для вектора Умова — Пойтинга в электродинамике и для вектора потока энергии в акустике общеизвестны. Аналогичный вектор для изгибных колебаний пластины упоминался лишь в работах [1–3]. В [1] этот вектор использован при доказательстве теоремы единственности для двухкомпонентной акустической модели, состоящей из идеальной сжимаемой жидкости и находящихся с ней в контакте упругих пластин. Однако выражение потока энергии, найденное в [1] (оно позднее было приведено в [2, 3] со ссылкой на [1]), ошибочно. Ниже находится точное (в рамках применимости уравнения Кирхгофа) выражение для вектора потока энергия изгибных колебаний пластины и указываются некоторые приложения полученной формулы.

Выпишем выражение для плотности энергии w изгибных колебаний пластины [4]

$$(1)\qquad w=\frac{D}{2}\left\{\left(\frac{\partial^2\zeta}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\zeta}{\partial y^2}\right)^2+2(1-\sigma)\left[\left(\frac{\partial^2\zeta}{\partial x\,\partial y}\right)^2-\frac{\partial^2\zeta}{\partial x^2}\frac{\partial^2\zeta}{\partial y^2}\right]\right\}+\frac{\rho}{2}\left(\frac{\partial\zeta}{\partial t}\right)^2$$

Здесь $\zeta = \zeta(x, y, t)$ — изгибное смещение пластины, D — цилиндрическая жесткость, ρ — поверхностная плотность пластины, σ — модуль Пуассона.