вой скорости в ядре потока стремится к однородному, а вблизи стенок образуется тонкий пограничный слой с постоянной толщиной порядка $1/\sqrt{N}$.

Отметим, что область существования автомодельных решений полубесконечна и ограничена сечением, в котором расход становится равным нулю, что в случае источников соответствует значениям $X > 2/N$, а стоков — $X < 2/N$.

Поступила 4 I 1975

ЛИТЕРАТУРА

1. *Berman A. S.* Laminar flow in channels with porous walls. J. Appl. Phys., 1953, vol. 24, No. 9.
2. *Terrill R. M., Thomas P. W.* On laminar flow through a uniformly porous pipe. Appl. Scient. Res., 1969, vol. 21, No. 1.

УДК 532.546

К ЗАДАЧЕ РАССОЛЕНИЯ ГРУНТА, СОДЕРЖАЩЕГО ЛЕГКОРАСТВОРИМЫЕ СОЛИ

В. И. Пеньковский

(Новосибирск)

Дается общее решение задачи рассоления почвы, содержащей быстрорастворимые соли при неоднородном их начальном распределении, в предположении мгновенного перехода солей из твердой фазы в раствор. На поверхности почвы ставится условие третьего рода, отражающее непрерывность потока массы солей.

В работе [1] иным путем построено решение для частного случая однородного засоления и рассмотрен вопрос единственности решения задачи. Процесс диффузии солей при промывке почвы исследовался также в работе [2].

Математическая формулировка задачи имеет вид

$$
\begin{aligned}
&Dc_{\xi\xi} - vc_\xi = mc_\tau, \quad 0 < \xi < \xi_0(\tau) \\
&-Dc_\xi + vc = vc_n, \quad \xi = 0 \\
&Dc \ = \varphi(\xi)\, d\xi_0(\tau)/d\tau, \quad \xi = \xi_0(\tau)
\end{aligned} \tag{1}
$$

Здесь коэффициент диффузии D, скорость фильтрации v, пористость m и концентрация c_n промывной воды предполагаются постоянными; $\xi_0(\tau) = v\tau/m$ фронт продвижения воды, ξ — координата, отсчитываемая от поверхности почвы, τ — время, $c(\xi, \tau)$ — концентрация движущегося раствора, $\varphi(\xi)$ — произвольно заданная функция начального объемного засоления почвы, которую подчиним обычным условиям, накладываемым на оригинал преобразования Лапласа.

Введением безразмерных переменных x, t и функции $u(x, t)$ задача (1) приводится к виду

$$u_{xx} = u_t, \quad 0 < x < t, \quad u_x - u/2 = 0, \quad x = 0 \tag{2}$$

$$u_x + u/2 = f(t)\exp(-t/4), \quad x = t \tag{3}$$

$$x = \frac{v\xi}{D}, \quad t = \frac{v^2\tau}{mD}, \quad f(t) = \frac{1}{m}\varphi\left(\frac{Dt}{v}\right)$$

$$u(x, t) = [c(x, t) - c_n]\exp\left(\frac{t}{4} - \frac{x}{2}\right)$$

Уравнение теплопроводности (2) имеет однопараметрическое семейство решений

$$W(x, t; \alpha) = \exp(-\alpha^2 t)\,[A(\alpha)\sin\alpha x + B(\alpha)\cos\alpha x]$$

При $B = 2\alpha A(\alpha)$ функция $W(x, t; \alpha)$ удовлетворяет первому из условий (3). Искомое решение $u(x, t)$ задачи (2), (3) представим в виде

$$u(x, t) = \int_0^\infty A(\alpha)(\sin\alpha x + 2\alpha\cos\alpha x)\exp(-\alpha^2 t)\,d\alpha \tag{4}$$

Удовлетворяя граничному условию при $x = t$, для определения функции $A(\alpha)$ получим интегральное уравнение

$$\int_0^\infty A(\alpha)\left[\left(\frac{1}{4} - \alpha^2\right)\sin\alpha t + \alpha\cos\alpha t\right]\exp\left[\left(\frac{1}{4} - \alpha^2\right)t\right]d\alpha = \frac{1}{2}f(t) \tag{5}$$

Пусть функция $A(\alpha) \in L(0, \infty)$ и $A(0) = 0$. Тогда, интегрируя обе части уравнения (5) по t от 0 до t и изменяя слева порядок интегрирования (что законно в силу равномерной по t сходимости), приведем его к следующему виду:

$$\int_0^\infty A(\alpha)\sin\alpha t\exp\left[\left(\frac{1}{4} - \alpha^2\right)t\right]d\alpha = \frac{1}{2}F(t) \tag{6}$$

$$\left(F(t) = \int_0^t f(z)\,dz\right)$$

Обозначим

$$L_p(h) \equiv \int_0^\infty e^{-ps}h(s)\,ds = H(p), \quad L_s^{-1}(H) \equiv \frac{1}{2\pi i}\int_{d-i\infty}^{d+i\infty} e^{ps}H(p)\,dp = h(s)$$

прямое и обратное преобразование Лапласа соответственно.

Применяя к обеим частям уравнения (6) операцию L_{p^2} и изменяя порядок интегрирования, что законно в силу предположенных свойств функции $A(\alpha)$, получим

$$\int_0^\infty A(\alpha)\frac{\alpha\,d\alpha}{\alpha^2 + (p^2 + \alpha^2 - {}^1/_4)^2} = \frac{1}{2}L_{p^2}(F) \tag{7}$$

Нетрудно заметить, что

$$\frac{\alpha p}{\alpha^2 + (p^2 + \alpha^2 - {}^1/_4)^2} = \frac{\alpha p}{(p^2 + \alpha^2 + {}^1/_4)^2 - p^2} = \\ = \frac{1}{2}\left[\frac{\alpha}{(p - {}^1/_2)^2 + \alpha^2} - \frac{\alpha}{(p + {}^1/_2)^2 + \alpha^2}\right]$$

и поэтому, умножая обе части уравнения (7) на p и применяя операцию L_s^{-1}, найдем

$$\frac{1}{2}L_s^{-1}[pL_{p^2}(F)] = \operatorname{sh}\frac{s}{2}\int_0^\infty A(\alpha)\sin\alpha s\,d\alpha$$

Таким образом, функция

$$\psi(s) = \frac{1}{2}\operatorname{sh}^{-1}\frac{s}{2}L_s^{-1}[pL_{p^2}(F)] = \frac{1}{2}\operatorname{sh}^{-1}\frac{s}{2}L_s^{-1}[p^{-1}L_{p^2}(f)]$$

является синус-преобразованием функции $A(\alpha)$. Последняя восстанавливается формулой обращения [3]

$$A(\alpha)=\frac{2}{\pi}\int_0^\infty \psi(s)\sin s\alpha\,ds \tag{8}$$

и удовлетворяет сделанным выше предположениям.

Для преобразования представления (4) к виду, удобному для вычислений, воспользуемся известной формулой (см. [4], стр. 494)

$$\begin{gathered}\int_0^\infty \exp(-\alpha^2 t)\sin s\alpha \sin x\alpha\,d\alpha=\frac{\pi}{2}G(x,s;t)\\ G(x,s;t)=\frac{1}{2\sqrt{\pi t}}\left\{\exp\left[-\frac{(s-x)^2}{4t}\right]-\exp\left[-\frac{(s+x)^2}{4t}\right]\right\}\end{gathered} \tag{9}$$

Подставляя (8) в (4), изменяя порядок интегрирования и учитывая формулу (9), получим

$$\begin{aligned}u(x,t)&=\int_0^\infty \psi(s)\left[G(x,s;t)+\frac{\partial G}{\partial x}(x,s;t)\right]ds=\\ &=\frac{1}{2\sqrt{\pi t}}\int_0^\infty \psi(s)\left\{\left(\frac{s-x}{t}+1\right)\exp\left[-\frac{(s-x)^2}{4t}\right]+\right.\\ &\left.+\left(\frac{s+x}{t}-1\right)\exp\left[-\frac{(s+x)^2}{4t}\right]\right\}ds\end{aligned} \tag{10}$$

Можно проверить непосредственной подстановкой, что функция $u(x, t)$, представленная формулой (10), удовлетворяет всем условиям задачи (2), (3).

Рассмотрим пример. Чаще всего при засолении кристаллы легкорастворимых солей скапливаются вблизи дневной поверхности почвы, поэтому в качестве примера возьмем $f=\exp(-\mu^2 t)$, где $\mu=\mathrm{const}$. Имеем последовательно

$$L_{p^2}(f)=(p^2+\mu^2)^{-1},\quad p^{-1}L_{p^2}(f)=[p(p^2+\mu^2)]^{-1}$$

$$L_s^{-1}[p^{-1}L_{p^2}(f)]=\frac{1-\cos\mu s}{\mu^2},\quad \psi(s)=\frac{1-\cos\mu s}{2\mu^2\,\mathrm{sh}(s/2)}$$

Поступила 27 X 1975

ЛИТЕРАТУРА

1. *Капранов Ю. И.* О некоторых точных решениях в задачах рассоления грунтов. Изв. АН СССР, МЖГ, 1972, № 1.
2. *Пеньковский В. И.* К вопросу о математическом моделировании процесса рассоления грунтов. ПМТФ, 1975, № 5.
3. *Диткин В. А., Прудников А. П.* Интегральные преобразования и операционное исчисление. М., Физматгиз, 1961.
4. *Градштейн И. С., Рыжик И. М.* Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. М., Физматгиз, 1962.