10. *Шайхет Л. Е.* Исследование на устойчивость стохастических систем с запаздыванием методом функционалов Ляпунова. Проблемы передачи информации. 1975, т. 11, вып. 4.
11. *Шайхет Л. Е.* Асимптотическая p-устойчивость стохастических систем с дискретным запаздыванием. В сб.: Поведение систем в случайных средах. Киев, Тр. Ин-та кибернетики АН УССР, 1975.
12. *Кац И. Я., Красовский Н. Н.* Об устойчивости систем со случайными параметрами. ПММ, 1960, т. 24, вып. 5.
13. *Гихман И. И.* Дифференциальные уравнения со случайными функциями. В сб.: Зимняя школа по теории вероятностей и математической статистике. Киев, Изд-во АН УССР, 1964.
14. *Гихман И. И.* Об устойчивости решений стохастических дифференциальных уравнений. В сб.: Предельные теоремы и статистические выводы. Ташкент, «Фан», 1966, стр. 14—45.
15. *Хасьминский Р. З.* Об устойчивости по первому приближению для тохастических систем. ПММ, 1967, т. 31, вып. 6.
16. *Хасьминский Р. З.* Устойчивость систем дифференциальных уравнений при случайных возмущениях их параметров. М., «Наука», 1969.
17. *Кац И. Я.* Об устойчивости по первому приближению систем со случайными параметрами. Матем. зап. Уральск. ун-та, 1962, т. 3, № 2.
18. *Кац И. Я.* Об устойчивости по первому приближению систем со случайным запаздыванием. ПММ, 1967, т. 31, вып. 3.
19. *Красовский Н. Н.* Обращение теорем второго метода Ляпунова и вопросы устойчивости движения по первому приближению. ПММ, 1956, т. 20, вып. 2.
20. *Красовский Н. Н.* Некоторые задачи теории устойчивости движения. М., Физматгиз, 1959.
21. *Гихман И. И., Скороход А. В.* Стохастические дифференциальные уравнения. Киев, «Наукова думка», 1968.
22. *Гихман И. И., Скороход А. В.* Теория случайных процессов, т. 3. М., «Наука», 1975.

УДК 532.529

ОБ АВТОМОДЕЛЬНОМ РЕШЕНИИ УРАВНЕНИЙ НАВЬЕ — СТОКСА С ОБЪЕМНЫМИ ИСТОЧНИКАМИ И СТОКАМИ МАССЫ

С. И. Аладьев, Л. И. Зайчик

(Москва)

В отличие от работ [1,2], где исследовалось движение жидкости с поверхностными источниками и стоками массы (вдувом и отсосом), рассматривается течение при наличии подвижных равномерно распределенных объемных источников и стоков в плоском и круглом каналах. Показано, что вдали от входа может быть получено автомодельное решение системы уравнений движения. Результаты применимы, например, к двухфазным (пар — жидкость) потокам с конденсацией или испарением при малых объемных концентрациях дискретной фазы и отсутствием скольжения фаз.

1. Стационарное осесимметричное течение жидкости в трубах с объемными источниками или стоками массы, движущимися со скоростью среды, описывается системой уравнений

$$
(1.1)\qquad u_x\frac{\partial u_x}{\partial x}+u_r\frac{\partial u_x}{\partial r}=-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x}+\frac{\nu}{r^\alpha}\left[\frac{\partial}{\partial x}\left(r^\alpha\frac{\partial u_x}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial r}\left(r^\alpha\frac{\partial u_x}{\partial r}\right)\right]
$$

$$
u_x\frac{\partial u_r}{\partial x}+u_r\frac{\partial u_r}{\partial r}=-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial r}+\frac{\nu}{r^\alpha}\left[\frac{\partial}{\partial x}\left(r^\alpha\frac{\partial u_r}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial r}\left(r^\alpha\frac{\partial u_r}{\partial r}\right)-\left(\frac{u_r}{r}\right)^\alpha\right]
$$

$$
\frac{\partial}{\partial x}(r^\alpha u_x)+\frac{\partial}{\partial r}(r^\alpha u_r)=-r^\alpha\frac{\varkappa}{\rho}
$$

Здесь u_x, u_r—компоненты вектора скорости в продольном и радиальном направлениях, $\varkappa$ — мощность объемных источников или стоков ($\varkappa > 0$ — стоки, $\varkappa < 0$ — источники), $\alpha = 0$ для плоского канала, $\alpha = 1$ для круглой трубы.

Рассмотрим случай $\varkappa = \mathrm{const}$. Автомодельное решение системы (1.1) вдали от входа в трубу будем искать в виде, тождественно удовлетворяющем уравнению неразрывности

$$u_x = U\left(1 - \frac{N}{2}X\right)f'(\lambda), \quad u_r = \frac{R\varkappa(f(\lambda) - \lambda)}{2\rho\lambda^{\alpha/2}} \tag{1.2}$$

$$X = 2\nu x/UR^2, \qquad \lambda = 2^{\alpha-1}R^{1+\alpha}, \ N = \varkappa R^2/\rho\nu$$

Здесь R — радиус круглой трубы или ширина плоского канала, U — среднемассовая скорость на входе, N — параметр, характеризующий интенсивность объемных источников или стоков.

Подставляя (1.2) во второе уравнение (1.1), получим, что $\partial p/\partial r$ не зависит от x. Тогда первое уравнение (1.1) сводится к обыкновенному дифференциальному уравнению

$$(\lambda^\alpha f'')' + \frac{N}{4}[f'^2 - (f-\lambda)f''] = \frac{k}{2}, \quad k = \frac{1}{1 - NX/2}\frac{\partial(p/\rho U^2)}{\partial X} \tag{1.3}$$

Граничные условия для рассматриваемой задачи имеют вид

$$\lim_{\lambda\to 0} f\lambda^{-\alpha/2} = 0, \ \lim_{\lambda\to 0} f''\lambda^{\alpha/2} = 0, \ f(1) = 1, \ f'(1) = 0 \tag{1.4}$$

Первое и третье условия означают равенство нулю радиальной составляющей скорости на оси и стенке канала, второе и четвертое — соответственно симметрию и равенство нулю на стенке осевой составляющей скорости.

Рассмотрим решение краевой задачи (1.3), (1.4) при малых и больших значениях параметра N.

2. При $|N| \ll 1$ вид зависимости $f(\lambda)$ может быть найден методом возмущений. Раскладывая f и k в ряд по степеням ε

$$f = f_0 + \varepsilon f_1 + O(\varepsilon^2), \quad \frac{k}{2} = k_0 + \varepsilon k_1 + O(\varepsilon^2) \quad \left(\varepsilon = \frac{N}{4}\right) \tag{2.1}$$

и подставляя соотношения (2.1) в (1.3), (1.4), придем к системе уравнений относительно f_0 и f_1 с граничными условиями

$$(\lambda^\alpha f_0'')' = k_0, \quad (\lambda^\alpha f_1'')' = k_1 - f_0'^2 - \lambda f_0'' + f_0 f_0'' \tag{2.2}$$

$$\lim_{\lambda\to 0} f_i\lambda^{-\alpha/2} = 0, \quad \lim_{\lambda\to 0} f_i''\lambda^{\alpha/2} = 0, \ f_i(1) = 1 - i, \ f_i'(1) = 0, \ i = 0, 1$$

Решая задачу (2.2), получим

$$f = \frac{3}{2}\lambda - \frac{\lambda^3}{2} + \frac{N}{4}\left(\frac{3}{70}\lambda - \frac{5}{56}\lambda^3 + \frac{\lambda^5}{20} - \frac{\lambda^7}{280}\right), \quad \alpha = 0 \tag{2.3}$$

$$f = 2\lambda - \lambda^2 + \frac{N}{4}\left(\frac{7}{18}\lambda - \frac{5}{6}\lambda^2 + \frac{\lambda^3}{2} - \frac{\lambda^4}{18}\right), \quad \alpha = 1$$

Наличие объемных источников и стоков массы вызывает отклонение течения от пуазейлевского, которое описывается двумя первыми членами в уравнениях (2.3). По сравнению с ним профиль осевой скорости в случае стоков ($N > 0$) малой интенсивности оказывается более вытянутым, а в случае источников ($N < 0$) — наполненным. Безразмерный градиент давления k дается выражениями

$$k = -3 + {}^3/_7 N \quad \text{при } \alpha = 0, \quad k = -4 + {}^7/_6 N \quad \text{при } \alpha = 1 \tag{2.4}$$

Из них следует, что при $N > 0$ падение давления будет более слабым, а при $N < 0$ — напротив, более крутым. Таким образом, объемные источники массы увеличивают, а стоки уменьшают общее гидравлическое сопротивление каналов.

3. Для нахождения решения уравнения (1.3) при $N \gg 1$ (рассматривается случай интенсивных стоков) применяется метод сращивания асимптотических разложений. Внешнее разложение вдали от стенок канала будем искать в виде ряда

$$f = f_0 + \varepsilon f_1 + o(\varepsilon), \quad \frac{k}{2} = \frac{C_0}{\varepsilon^2} + \frac{C_1}{\varepsilon} + o\left(\frac{1}{\varepsilon}\right) \quad \left(\varepsilon = \frac{2}{\sqrt{N}}\right) \tag{3.1}$$

Заменяя f и k в (1.3) через (3.1) и приравнивая члены с одинаковыми степенями ε, получим

$$f_0'^2 - (f_0 - \lambda) f_0'' = C_0, \quad 2f_0' f_1' - f_1 f_0'' - (f_0 - \lambda) f_1'' = C_1 \tag{3.2}$$

Системе (3.2) с граничными условиями

$$f_i(0) = 0, \quad f_i'(0) = 0, \quad f_i(1) = 1 - i, \quad i = 0,1$$

удовлетворяют выражения

$$f = \lambda + {}^1/_2\, \varepsilon C_1 \lambda, \quad C_0 = 1 \tag{3.3}$$

Постоянная C_1 должна определяться из сращивания с внутренним разложением. Для построения последнего введем новые переменные, а величину k положим равной первому члену внешнего разложения. В результате уравнение (1.3) с точностью до ε перепишется в виде

$$\varphi''' + \xi\varphi' = \varphi\varphi'' - \varphi'^2 + 1 \tag{3.4}$$

$$\xi = \frac{1-\lambda}{\varepsilon}, \quad \varphi = \frac{1-f}{\varepsilon}, \quad k = \frac{2C_0}{\varepsilon^2} = \frac{2}{\varepsilon^2}$$

В данном приближении уравнения для плоского и круглого каналов совпадают. Граничные условия в новых переменных будут

$$\varphi = \varphi' = 0 \quad \text{при } \xi = 0 \tag{3.5}$$

Рассматривая правую часть в (3.4) как неоднородность, преобразуем дифференциальное уравнение с условиями (3.5), используя метод вариации произвольных постоянных, в интегральное

$$\varphi = -\int_0^\xi \Phi\, d\zeta - \xi \int_0^\xi d\zeta \Phi \exp\left(\frac{\zeta^2}{2}\right) \int_0^\zeta \exp\left(-\frac{\eta^2}{2}\right) d\eta + \tag{3.6}$$

$$+ \left[\int_0^\xi \Phi \exp\left(\frac{\zeta^2}{2}\right) d\zeta + B\right] \int_0^\xi d\zeta \int_0^\zeta \exp\left(-\frac{\eta^2}{2}\right) d\eta \quad (\Phi = \varphi\varphi'' - \varphi'^2 + 1)$$

Решение уравнения (3.6) может быть получено итерациями. Постоянная B, так же как и C_1, определяется из условия сращивания асимптотических разложений вдали от стенки и вблизи нее

$$\varphi(\xi \to \infty) = \xi - {}^1/_2 C_1$$

Для оценки постоянных ограничимся нулевым приближением. После подстановки $\varphi^\circ = \xi$ в (3.6) получим

$$B = \sqrt{2/\pi}, \quad C_1 = 2\sqrt{2/\pi}$$

Тогда безразмерный градиент давления k, определяемый выражением (1.3), оказывается равным

$$k = N/2 + 2\sqrt{2N/\pi}$$

т. е. интенсивные стоки ($N \gg 1$) приводят к росту давления по длине канала.

Полученное решение свидетельствует о том, что течение в трубах при интенсивных стоках приближается по своей структуре к течению в пограничном слое. Профиль осевой скорости в ядре потока стремится к однородному, а вблизи стенок образуется тонкий пограничный слой с постоянной толщиной порядка $1 / \sqrt{N}$.

Отметим, что область существования автомодельных решений полубесконечна и ограничена сечением, в котором расход становится равным нулю, что в случае источников соответствует значениям $X > 2 / N$, а стоков — $X < 2 / N$.

Поступила 4 I 1975

ЛИТЕРАТУРА

1. *Berman A. S.* Laminar flow in channels with porous walls. J. Appl. Phys., 1953, vol. 24, No. 9.
2. *Terrill R. M., Thomas P. W.* On laminar flow through a uniformly porous pipe. Appl. Scient. Res., 1969, vol. 21, No. 1.

УДК 532.546

К ЗАДАЧЕ РАССОЛЕНИЯ ГРУНТА, СОДЕРЖАЩЕГО ЛЕГКОРАСТВОРИМЫЕ СОЛИ

В. И. Пеньковский

(Новосибирск)

Дается общее решение задачи рассоления почвы, содержащей быстрорастворимые соли при неоднородном их начальном распределении, в предположении мгновенного перехода солей из твердой фазы в раствор. На поверхности почвы ставится условие третьего рода, отражающее непрерывность потока массы солей.

В работе [1] иным путем построено решение для частного случая однородного засоления и рассмотрен вопрос единственности решения задачи. Процесс диффузии солей при промывке почвы исследовался также в работе [2].

Математическая формулировка задачи имеет вид

$$
\begin{aligned}
&Dc_{\xi\xi} - vc_\xi = mc_\tau, \quad 0 < \xi < \xi_0(\tau) \\
&-Dc_\xi + vc = vc_n, \quad \xi = 0 \qquad\qquad (1) \\
&Dc = \varphi(\xi)\, d\xi_0(\tau) / d\tau, \quad \xi = \xi_0(\tau)
\end{aligned}
$$

Здесь коэффициент диффузии D, скорость фильтрации v, пористость m и концентрация c_n промывной воды предполагаются постоянными; $\xi_0(\tau) = v\tau / m$ фронт продвижения воды, ξ — координата, отсчитываемая от поверхности почвы, τ — время, $c(\xi, \tau)$ — концентрация движущегося раствора, $\varphi(\xi)$ — произвольно заданная функция начального объемного засоления почвы, которую подчиним обычным условиям, накладываемым на оригинал преобразования Лапласа.

Введением безразмерных переменных x, t и функции $u(x, t)$ задача (1) приводится к виду

$$u_{xx} = u_t, \quad 0 < x < t, \quad u_x - u / 2 = 0, \quad x = 0 \qquad (2)$$

$$u_x + u / 2 = f(t) \exp(-t / 4), \quad x = t \qquad (3)$$

$$x = \frac{v\xi}{D}, \quad t = \frac{v^2\tau}{mD}, \quad f(t) = \frac{1}{m}\varphi\left(\frac{Dt}{v}\right)$$

$$u(x, t) = [c(x, t) - c_n] \exp\left(\frac{t}{4} - \frac{x}{2}\right)$$