С учетом (2.6), (2.7), лемм 2 и 3 можно показать, что справедлива

Теорема. Множества E_k, $k \in N_0$, и E_∞ определяются условиями

$$E_k = \{(t, x) : (t, x) \in \Lambda_1, \ |x| \geqslant a_k (1 - t)\}$$
$$E_\infty = S = \{(t, x) : (t, x) \in [0, 1) \times R^1 \ |x| \leqslant 1 - t\}$$

Автор благодарит Н. Н. Красовского за постоянное внимание к работе и ценные советы.

Поступила 3 XI 1975

ЛИТЕРАТУРА

1. *Ченцов А. Г.* О структуре одной игровой задачи сближения. Докл. АН СССР, 1975, т. 224, вып. 6.
2. *Красовский Н. Н., Субботин А. И.* Позиционные дифференциальные игры. М., «Наука», 1974.
3. *Красовский Н. Н., Субботин А. И.* О структуре игровых задач динамики. ПММ, 1971, т. 35, вып. 1.
4. *Понтрягин Л. С.* О линейных дифференциальных играх. I. Докл. АН СССР, 1967, т. 174, вып. 6.
5. *Пшеничный Б. Н.* Структура дифференциальных игр. Докл. АН СССР, 1969, т. 184, вып. 2.

УДК 531.36

УСТОЙЧИВОСТЬ ПО ПЕРВОМУ ПРИБЛИЖЕНИЮ СТОХАСТИЧЕСКИХ СИСТЕМ С ПОСЛЕДЕЙСТВИЕМ

Л. Е. Шайхет

(Донецк)

Для стохастического дифференциального уравнения с последействием доказываются теорема о существовании функционалов Ляпунова и теорема об устойчивости по первому приближению.

Предложение [1] о замене функций Ляпунова функционалами при исследовании на устойчивость обыкновенных дифференциальных уравнений с запаздыванием получило широкое распространение как в случае детерминированных, так и в случае стохастических систем, линейных и нелинейных (см., например, [2–11]). Для стохастических систем результаты в области устойчивости по первому приближению были получены в работах [12–18] и др. Для дифференциальных уравнений с последействием впервые были введены функционалы Ляпунова, доказаны теоремы обращения и получены условия устойчивости по первому приближению в работах [1, 19, 20].

Ниже рассматривается стохастическое дифференциальное уравнение с последействием, случайные возмущения в котором представляют собой произвольный процесс с независимыми приращениями.

Пусть $\{\Omega, \sigma, \mathbf{P}\}$ — основное вероятностное пространство, $\{f_t, t \geqslant 0\}$ — монотонно неубывающее семейство σ-алгебр $f_t \subset \sigma$; θ_t — семейство операторов, заданных соотношением $\theta_t\xi(s) = \xi(t + s)$, где $s \leqslant 0$, $t \geqslant 0$, $\xi(t)$ — n-мерный случайный процесс, определенный на $(-\infty, \infty)$, f_t-измеримый при $t > 0$ и f_0-измеримый при $t \leqslant 0$; $w(t) = (w_1(t), \ldots, w_N(t))$ — N-мерный винеровский процесс, $\nu^\circ(t, A)$ — центрированная пуассоновская мера с параметром $t\Pi(A)$, процесс $w(t)$ и мера $\nu^\circ(t, A)$ независимы между собой и f_t-измеримы при $t \geqslant 0$.

Рассмотрим стохастическое дифференциальное уравнение

$$d\xi(t) = a(t, \theta_t\xi)\,dt + \sum_{r=1}^{N} b_r(t, \theta_t\xi)\,dw_r(t) + \int c(u; t, \theta_t\xi)\,\nu^\circ(dt, du) \tag{1}$$
$$\theta_0\varepsilon = \varphi_0$$

в котором $a(t, \varphi)$, $b_r(t, \varphi)$, $c(u; t, \varphi)$ — векторные функционалы со значениями в R^n, определенные при $t \geqslant 0$, $u \in R^n$, $\varphi \subset H_0$, H_0 — множество функций $\varphi(s)$ $(s \leqslant 0)$ со значениями в R^n, имеющих с вероятностью единица пределы слева и непрерывных справа при $s < 0$ и слева при $s = 0$, таких, что (d — знак дифференцирования по последнему аргументу)

$$\text{(2)}\qquad \sup_{s\leqslant 0} \mathrm{M}\,|\varphi(s)|^2 < \infty, \quad a(t, 0) \equiv b_r(t, 0) \equiv c(u; t, 0) \equiv 0$$

$$|a(t, \varphi)|^2 \leqslant \int_0^\infty |\varphi(-\tau)|^2 dr_0(t, \tau)$$

$$|b_r(t, \varphi)|^2 \leqslant \int_0^\infty |\varphi(-\tau)|^2 dr_{1r}(t, \tau)$$

$$|c(u; t, \varphi)|^2 \leqslant \int_0^\infty |\varphi(-\tau)|^2 dr_2(u; t, \tau)$$

$$r_1(t, \tau) = \sum_{r=1}^N r_{1r}(t, \tau), \quad r_2(t, \tau) = \int r_2(u; t, \tau)\,\Pi(du)$$

$$\sup_{t\geqslant 0} \int_0^\infty dr_i(t, \tau) < \infty \quad (i = 0, 1, 2)$$

Уравнения такого типа изучались в ряде работ (например [21, 22]), получены условия существования и единственности их решения, которые будем считать выполненными.

Неотрицательный функционал $V(t, \varphi)$ на $[0, \infty) \times H_0$, такой, что $V(t, 0) \equiv 0$ и $\lim_{t\to\infty} \mathrm{M}V(t, \theta_t\xi) = 0$, если $\lim_{t\to\infty} \mathrm{M}\,|\xi(t)|^p = 0$ $(p > 0)$ назовем F_p-функционалом.

Неубывающую по τ функцию $r(s, \tau)$ $(s \geqslant 0, \tau \geqslant 0)$ назовем равномерно интегрируемой, если

$$\sup \int_0^\infty \int_{t-\tau}^t dr(s+\tau, \tau)\,ds < \infty$$

и для любого $\varepsilon > 0$ найдется такое T, что

$$\sup \int_T^\infty \int_{t-\tau}^t dr(s+\tau, \tau)\,ds < \varepsilon$$

Здесь и всюду ниже sup берется по всем $t \geqslant 0$.

Замечание. С помощью формулы Ито [22] и условий (2) можно показать [10], что функция $\mathrm{M}\,|\xi(t)|^2$ удовлетворяет условию Липшица. А так как интегрируемая на $[0, \infty)$ функция, удовлетворяющая условию Липшица, стремится к нулю на бесконечности, то из условия

$$\text{(3)}\qquad \int_0^\infty \mathrm{M}\,|\xi(t)|^2 dt < \infty$$

следует $\lim_{t\to\infty} \mathrm{M}\,|\xi(t)|^2 = 0$.

Теорема 1. Пусть выполнены условия (2) и (3) причем функции $r_i(t, \tau)$ $(i = 0, 1, 2)$ равномерно интегрируемы. Тогда существует F_2-функционал $V(t, \varphi)$, такой, что

$$\mathrm{M}V(t, \theta_t\xi) \geqslant k_1 \mathrm{M}\,|\xi(t)|^2$$

$$\mathrm{M}V(t, \theta_t\xi) - \mathrm{M}V(0, \varphi_0) \leqslant -k_2 \int_0^t \mathrm{M}\,|\xi(s)|^2 ds$$

Доказательство. Условиям теоремы 1 удовлетворяет функционал

$$V(t, \theta_t\xi) = |\xi(t)|^2 + r\int_0^\infty |\xi(t+s)|^2 ds + \int_0^\infty \int_{t-\tau}^t |\xi(s)|^2 \left(\sum_{i=0}^2 dr_i(s+\tau, \tau)\right) ds$$

$$r > 2\sqrt{r_0} + r_1 + r_2$$

$$r_i = \sup \int_0^\infty dr_i(t+\tau, \tau) \quad (i = 0, 1, 2)$$

так как к нему применим интегро-дифференциальный оператор Ито L [22], причём

$$LV(t, \theta_t\xi) \leqslant -(r - 2\sqrt{r_0} - r_1 - r_2)|\xi(t)|^2$$

То, что он является F_2-функционалом, следует из (3) и равномерной интегрируемости функций $r_i(t, \tau)$ $(i = 0, 1, 2)$.

Теорема 2. Пусть существует положительно определенный (т. е. $V(t, \varphi) \geqslant k|\varphi(0)|^\alpha$, $k > 0$, $\alpha > 0$) F_2-функционал $V(t, \varphi)$, такой, что

$$\mathrm{M}V(0, \varphi_0) < \infty$$

$$\mathrm{M}\{V(t, \theta_t\xi)/f_s\} - V(s, \theta_s\xi) \leqslant -k\int_s^t \mathrm{M}\{|\xi(\tau)|^2/f_s\}d\tau \quad k > 0,\ t \geqslant s \geqslant 0$$

где $\xi(s)$ — решение, а φ_0 — начальное условие уравнения (1). Тогда

$$\mathrm{P}\{\lim_{t\to\infty}\xi(t) = 0\} = 1 \tag{4}$$

Доказательство. Видно, что $V(t, \theta_t\xi)$ — неотрицательный супермартингал, следовательно, с вероятностью единица существует [16] $\lim V(t, \theta_t\xi)$, причем $\mathrm{M}\lim V(t, \theta_t\xi) = \lim \mathrm{M}V(t, \theta_t\xi)$ $(t \to \infty)$. Функция $\mathrm{M}|\xi(t)|^2$ интегрируема на $[0, \infty)$ и (см. замечание) удовлетворяет условию Липшица, следовательно, $\lim \mathrm{M}|\xi(t)|^2 = 0$, а так как $V(t, \varphi)$ — F_2-функционал, то и $\lim \mathrm{M}V(t, \theta_t\xi) = 0$. Учитывая предыдущее, имеем $\mathrm{P}\{\lim V(t, \theta_t\xi) = 0\} = 1$. Из положительной определенности $V(t, \varphi)$ следует (4).

Следствие. Пусть выполнены условия теоремы 1. Тогда решение уравнения (1) удовлетворяет условию (4).

Для доказательства достаточно заметить, что условия теоремы 1 обеспечивают существование функционала, удовлетворяющего условиям теоремы 2.

Покажем, что решение уравнения (1) удовлетворяет условию (4) даже в том случае, когда условия теоремы 1 выполняются не для уравнения (1), а для его первого приближения, т. е. для линейного уравнения, коэффициенты которого достаточно близки к коэффициентам уравнения (1).

Рассмотрим уравнение

$$d\xi(t) = \int_0^\infty dA(t, \tau)\xi(t-\tau)dt + \sum_{r=1}^N \int_0^\infty dB_r(t, \tau)\xi(t-\tau)dw_r(t) + \tag{5}$$

$$+ \iint_0^\infty dC(u; t, \tau)\xi(t-\tau)\nu^\circ(dt, du)$$

коэффициенты которого удовлетворяют условиям ($\|\cdot\|$ — операторная норма матрицы)

$$\text{(6)}\qquad \sup\int\limits_0^\infty \|dA(t,\tau)\|<\infty,\quad \sup\sum_{r=1}^N\left(\int\limits_0^\infty \|dB_r(t,\tau)\|\right)^2<\infty$$

$$\sup\int\left(\int\limits_0^\infty \|dC(u;t,\tau)\|\right)^2\Pi(du)<\infty$$

причем функции $p_i(t,\tau)$ $(i=0, 1, 2)$, где

$$dp_0(t,\tau)=\|dA(t,\tau)\|\int\limits_0^\infty \|dA(t,s)\|$$

$$dp_{1r}(t,\tau)=\|dB_r(t,\tau)\|\int\limits_0^\infty \|dB_r(t,s)\|$$

$$dp_2(u;t,\tau)=\|dC(u;t,\tau)\|\int\limits_0^\infty \|dC(u;t,s)\|$$

$$dp_1(t,\tau)=\sum_{r=1}^N dp_{1r}(t,\tau),\quad dp_2(t,\tau)=\int dp_2(u;t,\tau)\,\Pi(du)$$

равномерно интегрируемы.

Пусть для уравнения (5) выполняется условие (3). Тогда функционал

$$V_0(t,\theta_t\xi)=|\xi(t)|^2+p\int\limits_0^\infty |\xi(t+s)|^2ds+\int\limits_0^\infty\int\limits_{t-\tau}^t |\xi(s)|^2\left(\sum_{i=0}^2 dp_i(s+\tau,\tau)\right)ds$$

$$p>2\sqrt{p_0}+p_1+p_2$$

$$p_i=\sup\int\limits_0^\infty dp_i(t+\tau,\tau)<\infty\quad (i=0, 1, 2)$$

является F_2-функционалом, причем $L_0V_0(t,\theta_t\xi)\leqslant -k|\xi(t)|^2$ $(k>0)$, где L_0 — оператор Ито, соответствующий уравнению (5).

Пусть коэффициенты уравнений (1) и (5) связаны условиями

$$\text{(7)}\qquad |a(t,\varphi)-\int\limits_0^\infty dA(t,\tau)\varphi(-\tau)|\leqslant\gamma\int\limits_0^\infty|\varphi(-\tau)|\,dq_0(t,\tau)$$

$$\left|b_r(t,\varphi)-\int\limits_0^\infty dB_r(t,\tau)\varphi(-\tau)\right|\leqslant\gamma\int\limits_0^\infty|\varphi(-\tau)|\,dq_{1r}(t,\tau)$$

$$\left|c(u;t,\varphi)-\int\limits_0^\infty dC(u;t,\tau)\varphi(-\tau)\right|\leqslant\gamma\int\limits_0^\infty|\varphi(-\tau)|\,dq_2(u;t,\tau)$$

$$dq_1(t,\tau)=\sum_{r=1}^N dq_{1r}(t,\tau),\quad dq_2(t,\tau)=\int dq_2(u;t,\tau)\,\Pi(du)$$

$$q_0=\sup\int\limits_0^\infty dq_0(t,\tau),\quad q_{1r}=\sup\int\limits_0^\infty dq_{1r}(t,\tau),\quad q_2(u)=\sup\int\limits_0^\infty dq_2(u;t,\tau)$$

причем функции $q_i(t,\tau)$ $(i=0, 1, 2)$ равномерно интегрируемы.

Рассмотрим функционал

$$V_1(t,\theta_t\xi)=V_0(t,\theta_t\xi)+\gamma\int\limits_0^\infty\int\limits_{t-\tau}^t|\xi(s)|^2dm(s+\tau,\tau)\,ds$$

$$dm(t,\tau)=dq_0(t,\tau)+\frac{1}{2}(dq_1(t,\tau)+dq_2(t,\tau))+\sum_{r=1}^{N}q_{1r}(dr_{1r}(t,\tau)+dp_{1r}(t,\tau))+$$

$$+\int q_2(u)(dr_2(u;t,\tau)+dp_2(u;t,\tau))\Pi(du)$$

$$m_0=\sup\int_0^\infty dm(t+\tau,\tau)$$

и оценим выражение

$$LV_1(t,\theta_t\xi)=L_0V_0(t,\theta_t\xi)+2\Big(a(t,\theta_t\xi)-\int_0^\infty dA(t,\tau)\xi(t-\tau),\ \xi(t)\Big)+$$

$$+\sum_{r=1}^{N}\Big(|b_r(t,\theta_t\xi)|^2-\Big|\int_0^\infty dB_r(t,\tau)\xi(t-\tau)\Big|^2\Big)+$$

$$+\int\Big(|c(u;t,\theta_t\xi)|^2-\Big|\int_0^\infty dC(u;t,\tau)\xi(t-\tau)\Big|^2\Big)\Pi(du)+$$

$$+\gamma|\xi(t)|^2\int_0^\infty dm(t+\tau,\tau)-\gamma\int_0^\infty|\xi(t-\tau)|^2dm(t,\tau)\leqslant-[k-\gamma(m_0+q_0)]|\xi(t)|^2$$

Следовательно, при достаточно малом γ найдётся такое $k_1>0$, что $LV_1(t,\theta_t\xi)\leqslant-k_1|\xi(t)|^2$. Кроме того, функционал $V_1(t,\varphi)$ является F_2-функционалом, так как $V_0(t,\varphi)$ есть F_2-функционал, а функция $m(t,\tau)$ равномерно интегрируема.

Таким образом, доказана

Теорема 3. Пусть коэффициенты уравнений (1) и (5) удовлетворяют условиям (2), (6), (7) (последнее при достаточно малом γ), причем все функции $p(t,\tau)$, $q(t,\tau)$, $r(t,\tau)$ равномерно интегрируемы, а решение уравнения (5) удовлетворяет условию (3). Тогда решение уравнения (1) удовлетворяет условию (4).

В заключение автор благодарит В. Б. Колмановского за внимание к работе.

Поступила 9 XII 1975

ЛИТЕРАТУРА

1. *Красовский Н. Н.* О применении второго метода А. М. Ляпунова для уравнений с запаздываниями времени. ПММ, 1956, т. 20, вып. 3.
2. *Разумихин Б. С.* Применение метода Ляпунова к задачам устойчивости систем с запаздыванием. Автоматика и телемеханика, 1960, № 6.
3. *Колмановский В. Б.* О применении метода Ляпунова к линейным системам с запаздыванием. ПММ, 1967, т. 31, вып. 5.
4. *Колмановский В. Б.* Об устойчивости стохастических систем с запаздыванием. Проблемы передачи информации, 1969, т. 5, вып. 4.
5. *Колмановский В. Б.* Об устойчивости некоторых стохастических дифференциальных уравнений с запаздывающим аргументом. В сб.: Теория вероятностей и математическая статистика, вып. 2. Киев, «Наукова думка», 1970, стр. 111—120.
6. *Колмановский В. Б.* Об устойчивости нелинейных систем с запаздыванием. Матем. заметки, 1970, т. 7, вып. 6.
7. *Колмановский В. Б., Хасьминский Р. З.* Об устойчивости линейных систем с запаздыванием. Изв. вузов. Сер. матем., 1966, № 4.
8. *Ионин Л. Л., Царьков Е. Ф., Ясинский В. К.* Об устойчивости решений стохастических дифференциально-разностных уравнений. В сб.: Исследования по теории дифференциальных и разностных уравнений. Рига, Изд-во Латвийск. ун-та, 1974.
9. *Махно С. Я., Шайхет Л. Е.* Об устойчивости стохастических систем с запаздыванием. В сб.: Поведение систем в случайных средах. Киев, Тр. Ин-та кибернетики АН УССР, 1973.

10. *Шайхет Л. Е.* Исследование на устойчивость стохастических систем с запаздыванием методом функционалов Ляпунова. Проблемы передачи информации. 1975, т. 11, вып. 4.
11. *Шайхет Л. Е.* Асимптотическая p-устойчивость стохастических систем с дискретным запаздыванием. В сб.: Поведение систем в случайных средах. Киев, Тр. Ин-та кибернетики АН УССР, 1975.
12. *Кац И. Я., Красовский Н. Н.* Об устойчивости систем со случайными параметрами. ПММ, 1960, т. 24, вып. 5.
13. *Гихман И. И.* Дифференциальные уравнения со случайными функциями. В сб.: Зимняя школа по теории вероятностей и математической статистике. Киев, Изд-во АН УССР, 1964.
14. *Гихман И. И.* Об устойчивости решений стохастических дифференциальных уравнений. В сб.: Предельные теоремы и статистические выводы. Ташкент, «Фан», 1966, стр. 14—45.
15. *Хасьминский Р. З.* Об устойчивости по первому приближению для тохастических систем. ПММ, 1967, т. 31, вып. 6.
16. *Хасьминский Р. З.* Устойчивость систем дифференциальных уравнений при случайных возмущениях их параметров. М., «Наука», 1969.
17. *Кац И. Я.* Об устойчивости по первому приближению систем со случайными параметрами. Матем. зап. Уральск. ун-та, 1962, т. 3, № 2.
18. *Кац И. Я.* Об устойчивости по первому приближению систем со случайным запаздыванием. ПММ, 1967, т. 31, вып. 3.
19. *Красовский Н. Н.* Обращение теорем второго метода Ляпунова и вопросы устойчивости движения по первому приближению. ПММ, 1956, т. 20, вып. 2.
20. *Красовский Н. Н.* Некоторые задачи теории устойчивости движения. М., Физматгиз, 1959.
21. *Гихман И. И., Скороход А. В.* Стохастические дифференциальные уравнения. Киев, «Наукова думка», 1968.
22. *Гихман И. И., Скороход А. В.* Теория случайных процессов, т. 3. М., «Наука», 1975.

УДК 532.529

ОБ АВТОМОДЕЛЬНОМ РЕШЕНИИ УРАВНЕНИЙ НАВЬЕ — СТОКСА С ОБЪЕМНЫМИ ИСТОЧНИКАМИ И СТОКАМИ МАССЫ

С. И. Аладьев, Л. И. Зайчик

(Москва)

В отличие от работ [1,2], где исследовалось движение жидкости с поверхностными источниками и стоками массы (вдувом и отсосом), рассматривается течение при наличии подвижных равномерно распределенных объемных источников и стоков в плоском и круглом каналах. Показано, что вдали от входа может быть получено автомодельное решение системы уравнений движения. Результаты применимы, например, к двухфазным (пар — жидкость) потокам с конденсацией или испарением при малых объемных концентрациях дискретной фазы и отсутствием скольжения фаз.

1. Стационарное осесимметричное течение жидкости в трубах с объемными источниками или стоками массы, движущимися со скоростью среды, описывается системой уравнений

$$u_x \frac{\partial u_x}{\partial x} + u_r \frac{\partial u_x}{\partial r} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\nu}{r^\alpha}\left[\frac{\partial}{\partial x}\left(r^\alpha \frac{\partial u_x}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial r}\left(r^\alpha \frac{\partial u_x}{\partial r}\right)\right] \tag{1.1}$$

$$u_x \frac{\partial u_r}{\partial x} + u_r \frac{\partial u_r}{\partial r} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial r} + \frac{\nu}{r^\alpha}\left[\frac{\partial}{\partial x}\left(r^\alpha \frac{\partial u_r}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial r}\left(r^\alpha \frac{\partial u_r}{\partial r}\right) - \left(\frac{u_r}{r}\right)^\alpha\right]$$

$$\frac{\partial}{\partial x}(r^\alpha u_x) + \frac{\partial}{\partial r}(r^\alpha u_r) = -r^\alpha \frac{\varkappa}{\rho}$$