УДК 62—50

ОБ ОДНОМ ПРИМЕРЕ НЕРЕГУЛЯРНОЙ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЙ ИГРЫ

А. Г. Ченцов

(Свердловск)

Методом, предложенным в работе [1], для конкретного примера исследуется структура позиционного поглощения и его связь с программными конструкциями. Работа примыкает к исследованиям [2–5].

1. Пусть конфликтно-управляемая система описывается линейным уравнением

$$dx/dt = A(t)x + B(t)u + C(t)v \tag{1.1}$$
$$x \in R^n, \quad u \in P, \quad v \in Q$$

(P и Q — выпуклые компакты в R^p и R^q соответственно). Рассматривается задача управления на конечном промежутке времени $[t_0, \vartheta_0]$, $t_0 < \vartheta_0$. Первый игрок распоряжается управлением $u \in P$ и стремится к минимизации значения $f_0(x[\vartheta_0])$ непрерывной на R^n функции f_0 на траекториях системы (1.1). Второй игрок распоряжается управлением $v \in Q$ и преследует противоположную цель. Обозначим

$$c_0(t_*, x_*) = \min_{\{U\}} \max_{X(\cdot,\, t_*,\, x_*,\, U)} f_0(x[\vartheta_0]) = \max_{\{V\}} \min_{X(\cdot,\, t_*,\, x_*,\, V)} f_0(x[\vartheta_0]) \tag{1.2}$$

значение цены игры на минимакс-максимин $f_0(x[\vartheta_0])$ (см. [2], стр. 71). Здесь $\{U\}$, $\{V\}$ — множества стратегий первого и второго игроков; $X(\cdot, t_*, x_*, U)$, $X(\cdot, t_*, x_*, V)$ — множества всех движений из позиции (t_*, x_*), порожденных стратегиями U и V соответственно и определяемых как равномерные пределы ломаных Эйлера [2]. Известен [1] следующий способ определения функции $c_0(t, x)$. На пространстве $C(\Lambda_n)$, $\Lambda_n = [t_0, \vartheta_0] \times R^n$ вводятся оператор Γ и функция ε°, определяемые соотношениями

$$\varepsilon^\circ(t_*, x_*) = \max_{\{v(\cdot),\, [t_*,\, \vartheta_0]\}} \min_{G(\vartheta_0,\, t_*,\, x_*,\, v(\cdot))} f_0(x)$$

$$(\Gamma(g))(t_*, x_*) = \max_{[t_*,\, \vartheta_0]} \max_{\{v(\cdot),\, [t_*,\, \vartheta_0]\}} \min_{G(t,\, t_*,\, x_*,\, v(\cdot))} g(t, x)$$

$(t_*, x_*) \in \Lambda_n$, $g \in C(\Lambda_n)$). Здесь $\{v(\cdot), [t_*, \vartheta_0]\}$ — множество всех измеримых функций $[t_*, \vartheta_0] \to Q$; $G(t, t_*, x_*, v(\cdot))$ — множество всех точек

$$\varphi(t, t_*, x_*, u(\cdot), (v\cdot)) = X(t, t_*)x_* + \int_{[t_*,\, t]} X(t, \xi)[B(\xi)u(\xi) + C(\xi)v(\xi)]\,d\xi$$

($X(t, \xi)$ — фундаментальная матрица решений системы (1.1)), когда $u(\cdot)$ пробегает множество $\{u(\cdot), [t_*, \vartheta_0]\}$ всех измеримых функций $[t_*, \vartheta_0] \to P$. При этом функция c_0 — монотонный предел последовательности $\varepsilon^{(k)}$, $k \in N_0 = \{0, 1, \ldots\}$, определяемой условием $\varepsilon^{(k)} = \Gamma^k(\varepsilon^\circ)$, где Γ^k — соответствующая степень Γ: $c_0(t, x) = \lim_k \uparrow \varepsilon^{(k)}(t, x)$, $(t, x) \in \Lambda_n$.

Известны случаи, когда для определения c_0 требуется конечное число итераций, т. е. $c_0 = \varepsilon^{(k)}$ для некоторого $k \in N_0$. Содержанием данной работы является анализ конкретного примера системы (1.1), в котором для каждого k существует позиция, где $c_0(t, x) = \varepsilon^{(k)}(t, x)$, и, вместе с тем, существуют такие позиции, что $c_0(t, x) \neq \varepsilon^{(k)}(t, x)$ при всех k.

Рассматривается система

$$dx/dt = u + v, \quad u \in P = [-1, +1], \quad v \in Q = [-2, +2] \tag{1.3}$$
$$f_0(x) = \min_M |x - m| = d(x, M)$$
$$M = (-\infty, -1] \cup [1, \infty), \quad t_0 = 0, \ \vartheta_0 = 1$$

Обозначим для всякого $k \in N_0$ символом E_k множество всех позиций $(t, x) \in \Lambda_1$, $\Lambda_1 = [0, 1] \times R^1$, для которых $c_0(t, x) = \varepsilon^{(k)}(t, x)$, E_∞ — множество всех позиций $(t, x) \in \Lambda_1$, для которых $c_0(t, x) \neq \varepsilon^{(k)}(t, x)$ при всех $k \in N_0$. Исследуется структура множеств E_k, E_∞: устанавливается, что множество $E_{k+1} \setminus E_k$ непусто при всяком $k \in N_0$, E_∞ непусто, и выясняется характер перехода от E_0 к E_∞.

2. Определим функцию ε^0 для системы (1.3). Обозначим

$$M_1 = (-\infty, -1], \; M_2 = [1, \infty)$$

$$d(K_1, K_2) = \inf_{K_1} \inf_{K_2} |x - y|$$

$$(K_1 \subset R^1, \; K_2 \subset R^1, \; K_1 \neq \varnothing, \; K_2 \neq \varnothing)$$

Тогда

$$d(x, M_1) = \max(0, x + 1), \; d(x, M_2) = \max(0, 1 - x)$$

$$d(G(1, t_*, x_*, v(\cdot)), M) = \\ = \min d(G(1, t_*, x_*, v(\cdot)), M_i), \; i = 1,2$$

$$(x \in R^1, \; v(\cdot) \in \{v(\cdot), [t_*, 1]\}, \; (t_*, x_*) \in \Lambda_1)$$

Можно показать, что для каждого $v(\cdot) \in \{v(\cdot), [t_*, 1]\}$

$$d(G(1, t_*, x_*, v(\cdot)), M) = \max\Big(0, t_* - \Big|x_* + \int\limits_{[t_*, 1]} v(\xi) d\xi\Big|\Big) \tag{2.1}$$

С учетом (2.1) выводится, что для любой позиции

$$\varepsilon^\circ(t_*, x_*) = \max\langle 0, t_* - \max[0, |x_*| - 2(1 - t_*)]\rangle \tag{2.2}$$

Пусть L_0 — множество всех позиций $(t, x) \in \Lambda_1$, для которых $\varepsilon^\circ(t, x) > 0$. Из выражения (2.2) вытекает, что

$$L_0 = \{(t, x) : (t, x) \in (0, 1] \times R^1, \; |x| < 2 - t\} \tag{2.3}$$

Для определения $c_0(t_*, x_*)$, $(t_*, x_*) \in \Lambda_1$ введем число $b_* = \max(0, |x_*| - (1 - t_*))$ и множество $S_* = \{(t, x) : (t, x) \in \Lambda_1, \; |x| \leqslant b_* + (1 - t)\}$. Можно проверить, что S_* v-стабильно [2], откуда следует, что стратегия V_* второго игрока, экстремальная к S_*, гарантирует на всяком движении $x[\cdot] \in X(\cdot, t_*, x_*, V_*)$ выполнение неравенства $d(x[1], M) \geqslant \max(0, 1 - b_*)$, из которого с учетом (1.2) вытекает неравенство $c_0(t_*, x_*) \geqslant \min\langle 1, \max[0, 2 - (t_* + |x_*|)]\rangle$. Обратное неравенство следует из того, что при формировании ломаных Эйлера, порожденных произвольной стратегией V, второй игрок может столкнуться с реализацией $u(\cdot) \in \{u(\cdot), [t_*, 1]\}$, для которой $u(t) = \operatorname{sign}(x_*)$ при всех $t \in [t_*, 1]$. Следовательно

$$c_0(t_*, x_*) = \min\langle 1, \max[0, 2 - (t_* + |x_*|)]\rangle \tag{2.4}$$

Из (2.2), (2.4) вытекает, что

$$E_0 = \{(t, x): (t, x) \in \Lambda_1, \; |x| \geqslant 2(1 - t)\} \tag{2.5}$$

По индукции проверяется, что для каждого $k \in N_0$ для всех $(t, x) \in \Lambda_1$ $\varepsilon^{(k)}(t, x) = \varepsilon^{(k)}(t, -x)$. Кроме того, справедлива

Лемма 1. Для всякого $k \in N_0$ для каждой позиции $(t, x) \in L_k$, $L_k = \{(\tau, y) : (\tau, y) \in \Lambda_1, \; \varepsilon^{(k)}(\tau, y) > 0\}$ и любого числа $b \in [0, 1]$

$$\varepsilon^{(k)}(t, bx + (1 - b)(-x)) \geqslant \varepsilon^{(k)}(t, x)$$

Пусть $(a_k)_{k \in N_0}$ — последовательность, для которой $a_0 = 2$ и

$$a_{k+1} = 2a_k / (1 + a_k) \tag{2.6}$$

при всех $k \in N_0$. Можно проверить, что последовательность определена корректно ($a_k + 1 \neq 0$, $k \in N_0$) и обладает следующими свойствами:

1°. Для каждого $k \in N_0$ $a_k > 1$; 2°. Для каждого $k \in N_0$ $a_{k+1} < a_k$; 3°. Существует предел: $\lim_k a_k = 1$.

Обозначим

$$S = \{(t, x) : (t, x) \in [0, 1) \times R^1, |x| \leqslant 1 - t\} \tag{2.7}$$

Лемма 2. Для любых $(t_*, x_*) \in S$ и $k \in N_0$ $\varepsilon^{(k)}(t_*, x_*) \neq c_0(t_*, x_*)$.

Для доказательства в силу (2.4) достаточно показать, что при всех $(t_*, x_*) \in S$, $k \in N_0$, $\varepsilon^{(k)}(t_*, x_*) < 1$. При $k = 0$ это — следствие (2.2), дальнейшее доказательство проводится по индукции. Из леммы 2 вытекает, что $S \subset E_\infty$.

Лемма 3. Для каждого $k \in N_0$ множество E_k определяется условием

$$E_k = \{(t, x) : (t, x) \in \Lambda_1, |x| \geqslant a_k (1 - t)\}$$

Схема доказательства. При $k = 0$ утверждение следует из (2.5). Пусть

$$E_l = \{(t, x) : (t, x) \in \Lambda_1, |x| \geqslant a_l (1 - t)\} \tag{2.8}$$

при всех $l \in \{0, \ldots, m\}$, где $m \in N_0$. Тогда с учетом леммы 2

$$E_m \subset E_{m+1} \subset S^c = \Lambda_1 \setminus S \tag{2.9}$$

Пусть $(t_*, x_*) \in S^c \setminus E_m$ и для каждого $t \in [t_*, 1]$

$$x_0(t) = x_* - \operatorname{sign}(x_*)(t - t_*)$$

$$x^0(t) = x_* - 3 \operatorname{sign}(x_*)(t - t_*)$$

$$t^\circ = \frac{a_m - (t_* + |x_*|)}{a_m - 1}, \quad \bar{t} = t_* + \frac{|x_*|}{2}$$

Можно показать, что $t^0 \in (t_*, 1)$, $\bar{t} \in [t_*, 1]$.

Рассмотрим следующие случаи:

1°. $|x_*| \geqslant a_{m+1}(1 - t_*)$, 2°. $|x_*| < a_{m+1}(1 - t_*)$, $x_* < 0$.

1°. Можно проверить с учетом (2.8), что $\bar{t} \geqslant t^\circ$, $(\bar{t}, x_0(\bar{t})) \in E_m$, $x^\circ(\bar{t}) = -x_0(\bar{t})$, $|x_0(\bar{t})| = |x_*|/2$ и для программного управления $v_0(\cdot)$ второго игрока, удовлетворяющего равенству $v_0(t) = -2 \operatorname{sign}(x_*)$, справедливо соотношение $G(\bar{t}, t_*, x_*, v_0(\cdot)) = [-|x_0(\bar{t})|_*, |x_0(\bar{t})|]$. При этом $c_0(t, x_0(t)) = c_0(t_*, x_*) = 2 - (t_* + |x_*|)$, $t \in [t_*, 1]$, откуда в силу леммы 1

$$\min_{G(\bar{t}, t_*, x_*, v_0(\cdot))} \varepsilon^{(m)}(t, y) \geqslant c_0(t_*, x_*) \tag{2.10}$$

Из (2.10) вытекает, что $(t_*, x_*) \in E_{m+1}$.

2°. В этом случае $\bar{t} < t^\circ$. Предположим, что $c_0(t_*, x_*) = \varepsilon^{(m+1)}(t_*, x_*)$. Тогда для любых $t^* \in [t_*, 1]$ и $v^*(\cdot) \in \{v(\cdot), [t_*, 1]\}$ из условия

$$\min_{G(t^*, t_*, x_*, v^*(\cdot))} \varepsilon^{(m)}(t^*, x) = \varepsilon^{(m+1)}(t_*, x_*) \tag{2.11}$$

следует, что $t^* \geqslant t^\circ$, $v^*(t) = 2$ почти всюду на $[t_*, t^*]$, $x^\circ(t^*) \in G(t^*, t_*, x_*, v^*(\cdot))$. Но в этом случае $x^\circ(t^*) > -x_0(t^*)$, $c_0(t^*, x^\circ(t^*)) < c_0(t_*, x_*)$ и (см. (2.11)) вопреки предположению $\varepsilon^{(m+1)}(t_*, x_*) < c_0(t_*, x_*)$.

Таким образом (см. (2.9)) доказано, что

$$E_{m+1} = \{(t, x) : (t, x) \in \Lambda_1, |x| \geqslant a_{m+1}(1 - t)\}$$

С учетом (2.6), (2.7), лемм 2 и 3 можно показать, что справедлива

Теорема. Множества E_k, $k \in N_0$, и E_∞ определяются условиями

$$E_k = \{(t, x) : (t, x) \in \Lambda_1, |x| \geqslant a_k (1 - t)\}$$
$$E_\infty = S = \{(t, x): (t, x) \in [0, 1) \times R^1 \, |x| \leqslant 1 - t\}$$

Автор благодарит Н. Н. Красовского за постоянное внимание к работе и ценные советы.

Поступила 3 XI 1975

ЛИТЕРАТУРА

1. *Ченцов А. Г.* О структуре одной игровой задачи сближения. Докл. АН СССР, 1975, т. 224, вып. 6.
2. *Красовский Н. Н., Субботин А. И.* Позиционные дифференциальные игры. М., «Наука», 1974.
3. *Красовский Н. Н., Субботин А. И.* О структуре игровых задач динамики. ПММ, 1971, т. 35, вып. 1.
4. *Понтрягин Л. С.* О линейных дифференциальных играх. I. Докл. АН СССР, 1967, т. 174, вып. 6.
5. *Пшеничный Б. Н.* Структура дифференциальных игр. Докл. АН СССР, 1969, т. 184, вып. 2.

УДК 531.36

УСТОЙЧИВОСТЬ ПО ПЕРВОМУ ПРИБЛИЖЕНИЮ СТОХАСТИЧЕСКИХ СИСТЕМ С ПОСЛЕДЕЙСТВИЕМ

Л. Е. Шайхет

(Донецк)

Для стохастического дифференциального уравнения с последействием доказываются теорема о существовании функционалов Ляпунова и теорема об устойчивости по первому приближению.

Предложение [1] о замене функций Ляпунова функционалами при исследовании на устойчивость обыкновенных дифференциальных уравнений с запаздыванием получило широкое распространение как в случае детерминированных, так и в случае стохастических систем, линейных и нелинейных (см., например, [2–11]). Для стохастических систем результаты в области устойчивости по первому приближению были получены в работах [12–18] и др. Для дифференциальных уравнений с последействием впервые были введены функционалы Ляпунова, доказаны теоремы обращения и получены условия устойчивости по первому приближению в работах [1, 19, 20].

Ниже рассматривается стохастическое дифференциальное уравнение с последействием, случайные возмущения в котором представляют собой произвольный процесс с независимыми приращениями.

Пусть $\{\Omega, \sigma, \mathbf{P}\}$ — основное вероятностное пространство, $\{f_t, t \geqslant 0\}$ — монотонно неубывающее семейство σ-алгебр $f_t \subset \sigma$; θ_t — семейство операторов, заданных соотношением $\theta_t\xi(s) = \xi(t+s)$, где $s \leqslant 0$, $t \geqslant 0$, $\xi(t)$ — n-мерный случайный процесс, определенный на $(-\infty, \infty)$, f_t-измеримый при $t > 0$ и f_0-измеримый при $t \leqslant 0$; $w(t) = (w_1(t), \ldots, w_N(t))$ — N-мерный винеровский процесс, $\nu^\circ(t, A)$ — центрированная пуассоновская мера с параметром $t\Pi(A)$, процесс $w(t)$ и мера $\nu^\circ(t, A)$ независимы между собой и f_t-измеримы при $t \geqslant 0$.

Рассмотрим стохастическое дифференциальное уравнение

$$d\xi(t) = a(t, \theta_t\xi)\,dt + \sum_{r=1}^{N} b_r(t, \theta_t\xi)\,dw_r(t) + \int c(u; t, \theta_t\xi)\,\nu^\circ(dt, du) \tag{1}$$
$$\theta_0\varepsilon = \varphi_0$$