Прикладная математика и механика. Том 40, 1976

УДК 539.4 : 534.1

ВИБРАЦИЯ ДВУХ КРУГЛЫХ ШТАМПОВ НА СЛОИСТОЙ СРЕДЕ

В. А. Бабешко

(Ростов-на-Дону)

Рассматривается задача о гармонических колебаниях на поверхности упругой слоистой среды двух круглых штампов радиусов a_1 и a_2. Расстояние между центрами штампов $b > a_1 + a_2$. Предполагается, что в области контакта трение отсутствует.

С помощью метода, развитого в работе [1], исходная система приводится к системе уравнений Фредгольма второго рода, для решения которых предложены приближенные приемы. На основе полученных результатов можно строить прикладную теорию вибрации двух штампов, учитывающую в отличие от всех известных прикладных теорий также и дисперсионные свойства среды.

Методом, изложенным в работе, несложно исследовать случай вибрации системы n штампов, однако ради краткости здесь ограничимся случаем двух штампов.

1. Обозначив через Ω_1 и Ω_2 соответственно области, занимаемые штампами радиусов a_1 и a_2, интегральные уравнения задачи представим в форме

$$\iint_{\Omega_1} k(r, \rho, \varphi, \psi)\, q_1(\rho, \psi)\, \rho d\rho\, d\psi + \iint_{\Omega_2} k(r, \rho, \varphi, \psi)\, q_2(\rho, \psi)\, \rho d\rho\, d\psi = f_k(r, \varphi) \tag{1.1}$$

$$r, \varphi \in \Omega_k, \quad k = 1, 2$$

$$k(r, \rho, \varphi, \psi) = \int_\Gamma K(u) J_0(uR)\, u du, \quad R = \sqrt{r^2 + \rho^2 - 2r\rho\cos(\varphi - \psi)}$$

Здесь $\operatorname{Re} q_k e^{-i\omega t}$ — контактные напряжения под штампами, вибрирующими по закону $\cos \omega t$, $\operatorname{Re} f_k e^{-i\omega t}$ — смещения точек подошв штампов, причем $k = 1$ ($k = 2$) в случае штампа радиуса a_1 (радиуса a_2).

Если среда представляет собой систему слоев, лежащих на упругом полупространстве, то функция $K(u)$ — четная аналитическая в комплексной плоскости, имеющая однократные вещественные полюсы, положительные из которых будем обозначать через ζ_k ($k = 1, 2, \ldots, n$), и точки ветвления $\pm A_1$ и $\pm A_2$. Точки ветвления соединены с бесконечно удаленной точкой разрезами, лежащими в первом и третьем квадрантах. Условия излучения волн в среде приводят к требованию расположения контура Γ в четвертом квадранте с началом в нуле и концом в точке $\infty - i0$. Отметим, что функция $K(u)$ зависит от всех геометрических и механических характеристик слоев и полупространства, а также от частоты колебания штампов ω.

Справедлива

Теорема 1 (единственности). Пусть функция $K(u)$ вещественна на отрезке, содержащем полюсы ζ_k, вычеты из которых одного знака; пусть мнимая часть функции $K(u)$ на некотором отрезке вещественной оси имеет тот же знак и не меняет его на противоположный. Тогда уравнения (1.1) в классе L_p $(p > 1)$ не могут иметь более одного решения.

Метод доказательства теоремы представляет собой несущественную модификацию изложенного в [2] и здесь ради краткости не приводится.

2. Разложим правые части f_k и неизвестные функции q_k в ряды Фурье вида

$$f_k(r, \varphi) = \sum_{l=-\infty}^{\infty} f_{kl}(r) e^{il\varphi} \tag{2.1}$$

$$q_k(\rho, \psi) = \sum_{p=-\infty}^{\infty} q_{kp}(\rho) e^{ip\psi}$$

В результате, применив формулы сложения цилиндрических функций, уравнения (1.1) представим в форме системы вида

$$\int_0^{a_1}\int_\Gamma K(u)\, u\, J_p(ur) J_p(u\rho) q_{1p}(\rho)\rho du\, d\rho + \int_0^{a_2}\int_\Gamma K(u)\, u \sum_{s=-\infty}^{\infty} (-1)^{s+p} \times \tag{2.2}$$
$$\times J_p(ur) J_{s-p}(ub) J_s(u\beta)\, du\, d\beta = f_{1p}(r), \quad 0 \leqslant r \leqslant a_1, \quad p = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$$

$$\int_0^{a_2}\int_\Gamma K(u)\, u\, J_\tau(ur) J_\tau(u\rho) q_{2\tau}(\rho)\rho du\, d\rho + \int_0^{a_1}\int_\Gamma K(u)\, u \sum_{m=-\infty}^{\infty} (-1)^{m+\tau} \times \tag{2.3}$$
$$\times J_\tau(ur) J_{\tau-m}(ub) J_m(u\alpha) q_{1m}(\alpha)\alpha du\, d\alpha = f_{2\tau}(r), \quad 0 \leqslant r \leqslant a_2$$
$$\tau = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$$

Введем функции $\varkappa_n(u, a_k, s)$, определенные условиями регулярности в нижней полуплоскости, отсутствием там нулей и поведением

$$\begin{aligned} &i\sqrt{a}\varkappa_1(u, a, s) H_s^{(2)}(ua) \to 1 \\ &\sqrt{a}\varkappa_2(u, a, s) J_s(ua) \to 1 \end{aligned} \qquad \operatorname{Im} u \to -\infty \tag{2.4}$$

Лемма. Решения $q_{\kappa p}(r)$ системы (2.1) имеют представления вида

$$q_{kp}(r) = \int_0^\infty J_p(\eta r) K^{-1}(\eta) F_{kp}(\eta)\eta d\eta + \int_{\Gamma_1} J_p(ur) K^{-1}(u) Z(k, p, u)\, du \tag{2.5}$$

Здесь $Z(k, p, u)$ — регулярные и убывающие в нижней полуплоскости функции.

Кроме того, принято представление

$$f_{kp}(r) = \int_0^\infty F_{kp}(\eta)\eta J_p(\eta r)\, d\eta \tag{2.6}$$

Функция $F_{kp}(\eta)$ подобрана таким образом, что она обращается в нуль в вещественных нулях функции $K(\eta)$.

Покажем, что такое представление всегда легко строится.

Обозначим через z_m, $m = 1, 2, \ldots, n$ — вещественные нули функции $K(\eta)$. Построим следующее продолжение $f_{kp}^*(r)$ функции $f_{kp}(r)$

$$
\begin{aligned}
&f_{kp}^*(r) = f_{kp}(r), \quad 0 < r < a \quad a \equiv a_k\\
&f_{kp}^*(r) = c_{kpm} r^{-p}, \quad am \leqslant r \leqslant a(m+1)\\
&f_{kp}^*(r) \equiv 0, \quad r > an
\end{aligned}
$$

Преобразование Бесселя функции f_{kp}^* и будет одним из значений $F_{kp}(\eta)$, если постоянные c_{kpm} подобраны из условий $F_{kp}(z_m) = 0$.

Отсюда ясно, что может быть построено бесчисленное множество представлений (2.6); для получения быстро убывающих функций $F_{kp}(\eta)$ необходимо строить продолжение $f_{kp}^*(r)$ с непрерывными производными нужного порядка.

Вывод формул (2.5) основан на продолжении правых частей уравнений (2.2) в область $r > a_1$ и $r > a_2$ соответственно, с последующим решением системы, рассматриваемой на полуоси, с помощью преобразования Бесселя.

Внесем теперь (2.5) в систему (2.2) и произведем интегрирование. Тогда для определения неизвестных Z_{ksu} приходим, использовав известные формулы сложения функций Бесселя, к системе вида

$$
\begin{aligned}
(2.7)\qquad &\int_{\Gamma_1} \frac{Q(\alpha, u, a_1, p)}{(\alpha^2 - u^2)K(u)} Z(1, p, u)\,du =\\
&= \int_{\Gamma_1} \sum_{s=-\infty}^{\infty} (-1)^{s+p} \frac{E(\alpha, u, a_2, p, s)}{(\alpha^2 - u^2)K(u)} Z(2, s, u)\,du + D(\alpha, a_1)\\
&\int_{\Gamma_1} \frac{Q(\alpha, u, a_2, p)}{(\alpha^2 - u^2)K(u)} Z(2, s, u)\,du =\\
&= \int_{\Gamma_1} \sum_{s=-\infty}^{\infty} (-1)^{s+p} \frac{E(\alpha, u, a_1, p, s)}{(\alpha^2 - u^2)K(u)} Z(1, s, u)\,du +\\
&+ D(\alpha, a_2), \quad p = 0, \pm 1, \pm 2
\end{aligned}
$$

Здесь

$$
\begin{aligned}
&Q(\alpha, u, a, p) = a\alpha H_{p+1}^{(2)}(\alpha a) J_p(ua) - auH_p^{(2)}(\alpha a) J_{p+1}(ua)\\
&E(\alpha, u, a, p, s) = [-a\alpha J_{s+1}(\alpha a) J_s(ua) + auJ_s(\alpha a) J_{s+1}(ua)] H_{s-p}^{(2)}(\alpha b)\\
&D(\alpha, a_k) = a_k \int_0^\infty \frac{\alpha H_{p+1}^{(2)}(\alpha a_k) J_p(\eta a_k) - \eta H_p^{(2)}(\alpha a_k) J_{p+1}(\eta a_k)}{(\eta^2 - \alpha^2) K(\eta)} \times\\
&\times F_{kp}(\eta)\,\eta\,d\eta
\end{aligned}
$$

Контур Γ_1 расположен вблизи нижней границы области S, в которой регулярна функция $K(u)$. Определив из системы (2.7) неизвестные $Z(k, p, u)$, найдем решение задачи.

3. Для приведения системы (2.7) к уравнениям второго рода изучим свойства решения уравнения вида

$$
(3.1)\qquad \frac{1}{4\pi^2} \int_{\Gamma_2} \int_{\Gamma_1} \frac{K_+(\alpha) X(u)\,du d\alpha}{(\alpha - z)(u - \alpha) K_+(u)} = -Y(z)
$$

Здесь контур Γ_2 расположен в области регулярности функции $K(u)$ выше контура Γ_1; z расположено выше контура Γ_2. Функция $X(z)$ регулярна в области S и убывает там степенным образом. Свойства функции $K(u)$ обеспечивают для $K_+(u)$, получающейся в результате факторизации $K(u)$ относительно контура Γ_1,[3] как нетрудно убедиться, поведение в области регулярности, описываемое оценкой

$$cu^{-1/2}[1 + o(1)] \quad |u| \to \infty$$

$K_+(u)$ регулярна выше контура Γ_1.

Функция $Y(z)$ регулярна в области S и верхней полуплоскости, убывает там степенным образом и допускает аналитическое продолжение в нижнюю полуплоскость.

Продолжив левую часть (3.1) аналитически в нижнюю полуплоскость, имеем

$$\frac{1}{4\pi^2}\int\limits_{\Gamma_3}\int\limits_{\Gamma_1}\frac{K_+(\alpha)X(u)\,du\,d\alpha}{(\alpha - z)(u-\alpha)K_+(u)} + \frac{i}{2\pi}K_+(z)\int\limits_{\Gamma_1}\frac{X(u)\,du}{(u-z)K_+(u)} = -Y \tag{3.2}$$

Здесь контуры Γ_1, Γ_2 расположены в области S; Γ_3 выше Γ_1, причем z находится между ними. Выписанный первый интеграл, очевидно, равен нулю; это следует из того, что интеграл по α равен нулю, так как подынтегральная функция регулярна выше контура Γ_3.

Продолжая функцию, представленную вторым интегралом, в нижнюю полуплоскость и вводя обозначение (z ниже контура Γ_3)

$$\int\limits_{\Gamma_3}\frac{X(u)\,du}{(u-z)K_+(u)} = \frac{i}{2\pi}R_-(z)$$

имеем

$$X(z) = Y(z) + K_+(z)R_-(z) \tag{3.3}$$

Соотношение (3.3) дает общее представление решения уравнения (3.1). С помощью этого результата совершим преобразование системы (2.7). Произведем относительно контура Γ_1 факторизацию

$$K[\mu_k(u)] = K_{k+}(u)K_{k-}(u); \quad \mu_k = \sqrt{u^2 + p^2a_k^{-2}} \tag{3.4}$$

Здесь радикал определен на римановой плоскости с разрезом, соединяющим точки $\pm ip/a$, условием положительности при $u > 0$. Очевидно, при $p/a \to 0$ факторизация функции $K[\mu_k(u)]$ вырождается в факторизацию функции $K(u)$. Разрез не оказывает влияния при проведении факторизации в силу регулярности и четности функции $K(u)$ на контуре Γ_1.

Умножим первое и второе соотношения (2.7) соответственно на

$$\frac{\alpha K_{k+}[\lambda_k(\alpha)]\varkappa_1[\lambda_k(\alpha), a_k, p]}{\lambda_k(\alpha)[\lambda_k(\alpha) - \lambda_k(z)]}\left(\lambda_k(\alpha) = \sqrt{\alpha^2 - p^2a_k^{-2}}\right), \quad k = 1, 2$$

Здесь радикал определен на римановой плоскости с разрезом, лежащим в верхней полуплоскости, соединяющим точки $u = \pm p/a_k$, условием $\lambda > 0$ при $u \to \infty$.

Введем замену неизвестного, положив

$$Z(k, p, u) = \varkappa_2[\lambda_k(u), a_k, p]X[k, p, \lambda_k(u)]u\lambda_k^{-1}(u)K_{k-}[\lambda_k(u)]$$

Проинтегрировав теперь соотношения (2.7) по контуру Γ_2, лежащему выше Γ_1 в плоскости регулярности $K(u)$, приходим к соотношениям, первое из которых принимает вид

$$\frac{1}{4\pi^2}\int\limits_{\Gamma_2}\int\limits_{\Gamma_1}\frac{Q(\alpha,u,a_1,p)K_{1+}[\lambda_1(\alpha)]\varkappa_1[\lambda_1(\alpha),a_1,p]\varkappa_2[\lambda_1(u),a_1,p]}{[\lambda_1(\alpha)-\lambda_1(z)](\alpha^2-u^2)K_{1+}[\lambda_1(u)]\lambda_1(u)\lambda_1(\alpha)}\times \tag{3.5}$$

$$\times X[1,p,\lambda_1(u)]\alpha u\,du\,d\alpha=\frac{1}{4\pi^2}\int\limits_{\Gamma_2}\int\limits_{\Gamma_1}\sum_{s=-\infty}^{\infty}(-1)^{s+p}\times$$

$$\times\frac{E(\alpha,u,a_2,p,s)\varkappa_1[\lambda_1(\alpha),a_1,p]\varkappa_2[\lambda_2(\alpha),a_2,s]K_{1+}[\lambda_1(\alpha)]}{[\lambda_1(\alpha)-\lambda_1(z)](a_2-u^2)K_{2+}[\lambda_2(u)]\lambda_1(\lambda)\lambda_2(u)}\times$$

$$\times X[2,s,\lambda_2(u)]\alpha u\,du\,d\alpha+$$

$$+\frac{1}{4\pi^2}\int\limits_{\Gamma_2}\frac{D(\alpha,a_1)K_{1+}[\lambda_1(\alpha)]\varkappa_1[\lambda_1(\alpha),a_1,p]}{[\lambda_1(\alpha)-\lambda_1(z)]\lambda_1(\alpha)}\alpha d\alpha$$

Здесь точка z расположена выше контура Γ_2, а контур Γ_2 — выше Γ_1. Аналогичный вид принимает второе соотношение, опущенное ради краткости.

Используя равномерные асимптотические оценки функций Бесселя при больших комплексных аргументах и индексах в нижней полуплоскости, получим левый член соотношения в форме

$$\frac{1}{4\pi^2}\int\limits_{\Gamma_2}\int\limits_{\Gamma_1}\frac{K_{1+}[\lambda_1(\alpha)]u\alpha X[1,p,\lambda_1(u)]\,du\,d\alpha}{[\lambda_1(\alpha)-\lambda_1(z)][\lambda_1(u)-\lambda_1(\alpha)]K_{1+}[\lambda_1(u)]\lambda_1(u)\lambda_1(\alpha)} \tag{3.6}$$

Перейдя на новую комплексную плоскость с помощью замены $\lambda = \lambda_1(u)$, получим уже изученный оператор (3.1).

Контуры Γ_1, Γ_2 при этой замене в плоскости λ отобразятся в некоторые другие — γ_1, γ_2, также лежащие в нижней полуплоскости и сохраняющие свое поведение на бесконечности.

В плоскости комплексного переменного λ прибавим и отнимем в левой части соотношения (3.5) выражение, стоящее слева в (3.1), рассматриваемое в плоскости λ. Тогда, используя представление (3.3) и внося его в (3.5), получим уравнение вида

$$y(1,p,z)=\frac{1}{4\pi^2}\int\limits_{\gamma_2}\int\limits_{\gamma_1}\frac{K_{1+}(\alpha)C(\alpha,u,a_1,p)y(1,p,u)}{(\alpha-z)(\alpha^2-u^2)K_{1+}(u)}du\,d\alpha+ \tag{3.7}$$

$$+\frac{1}{4\pi^2}\int\limits_{\gamma_2}\int\limits_{\gamma_1}\sum_{s=-\infty}^{\infty}(-1)^{s+p}\frac{K_{1+}(\alpha)D(\alpha,u,a_1,a_2,p,s)y(2,s,u)}{(\alpha-z)(\alpha^2-u^2)K_{2+}(u)}\times$$

$$\times du\,d\alpha+F(1,z,p)$$

Вторая группа уравнений принимает вид

$$y(2,p,z)=\frac{1}{4\pi^2}\int\limits_{\gamma_2}\int\limits_{\gamma_2}\frac{K_{2+}(\alpha)C(\alpha,u,a_2,p)y(2,p,u)}{(\alpha-z)(\alpha^2-u^2)K_{2+}(u)}du\,d\alpha+ \tag{3.8}$$

$$+\frac{1}{4\pi^2}\int\limits_{\gamma_2}\int\limits_{\gamma_1}\sum_{s=-\infty}^{\infty}\frac{K_{2+}(\alpha)D(\alpha,u,a_2,a_1,p,s)y(1,s,u)}{(\alpha-z)(\alpha^2-u^2)K_{1+}(u)}du\,d\alpha+F(2,z,p)$$

Здесь

$$C(\alpha, u, a_1, p) = -\varkappa_1(\alpha, a_1, p)\varkappa_2(u, a_1, p)Q[\mu_1(\alpha), \mu_1(u), a_1, p] + (\alpha + u) \tag{3.9}$$

$$D(\alpha, u, a_1, a_2, p, s) = -\varkappa_1(\alpha, a_1, p)\varkappa_2(u, a_2, s)E[\mu_1(\alpha), \mu_2(u), a_2, p, s]\, H_{s-p}^{(2)}[\mu_1(\alpha), b],$$

$$F(k, z, p) = \frac{1}{4\pi^2}\int\limits_{\gamma_2} \frac{D[\mu_k(\alpha), a_k]\, K_{k+}(\alpha)\varkappa_1(\alpha, a_k, p)}{\alpha - z}\, d\alpha$$

Сведем уравнения (3.7) — (3.9) к уравнениям второго рода с вполне непрерывными операторами в пространстве функций, непрерывных с весом u^λ $(0 < \lambda < 1)$ на контуре Γ_1 и обращающихся на бесконечность в нуль.

Предварительно изучим асимптотическое поведение подынтегральной функции при больших $|u|$, $|\alpha|$, p, s на контурах в нижней полуплоскости. Используя равномерные асимптотические разложения функций Бесселя, положив

$$\varkappa_1(u, a, p) = \frac{\sqrt{a}}{2\pi\sqrt{p^2 - u^2a^2}\, K_p(iua)} \tag{3.10}$$

$$\varkappa_2(u, a, p) = \frac{2}{\pi} i\sqrt{a}\, K_p(iua)$$

имеем

$$C(\alpha, u, a_1, p) = c + O(\alpha^{-1}, u^{-1}, p^{-1})$$

Воспользуемся соотношением

$$\int\limits_{\Gamma_2}\int\limits_{\Gamma_1} \frac{\Phi(\alpha, u)\, du\, d\alpha}{(\alpha - z)(\alpha^2 - u^2)} = 2\pi^2 \frac{\Phi(z, z)}{z} + 2\pi i \int\limits_{\Gamma_3} \frac{\Phi(z, u)\, du}{z^2 - u^2} + \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma_4}\int\limits_{\Gamma_3} \frac{\Phi(\alpha, u)\, du\, d\alpha}{(\alpha - z)(\alpha^2 - u^2)} \tag{3.11}$$

Здесь контур Γ_k лежит выше Γ_{k-1}. Точка z расположена между контурами Γ_2 и Γ_3. Все контуры лежат в области S. Функция $\Phi(\alpha, u)$ регулярна в этой области по обеим переменным и убывает на контурах по каждому переменному как $|u|^{-1-\varepsilon}$, $\varepsilon > 0$.

Принимая теперь в формуле (3.11) в качестве $\Phi(\alpha, u)$ подынтегральную функцию первого члена в правой части (3.7), замечаем, что внеинтегральный член пропорционален $y(1, p, z)$. Перенесем его в левую часть соотношения (3.7) и объединим с находящимся там неизвестным $y(1, p, z)$.

При аналогичном преобразовании второго члена (суммы) в (3.7) внеинтегральный член пропадает.

Разрешив преобразованное уравнение (3.7) относительно $y(1, p, z)$ и подставив его значение в непреобразованное уравнение (3.7), приходим к уравнению второго рода на контуре Γ_4.

Для дальнейшего изучения систем вводятся пространства функций и последовательностей с весом.

Пусть $C(\lambda)$ — пространство функций $f(z)$, непрерывных и обращающихся в нуль на бесконечности с весом z^λ, $c(\sigma)$ — пространство последовательностей, ограниченных и обращающихся в нуль на бесконечности с весом p^σ. Нормы в указанных пространствах даются соотношениями

$$\|f(z)\|_{C(\lambda)} = \max_{z\in\Gamma_4} |f(z) z^\lambda| \tag{3.12}$$

$$\|f\|_{C(\sigma)} = \sup_{|p|\leqslant\infty} |f_p p^\sigma|, \quad f = \{f_p\}$$

Простоты ради будем предполагать, что функции $f_k(r, \varphi)$ бесконечно дифференцируемы по каждому параметру в Ω_k. В этом случае, продолжив $f_k(r, \varphi)$ гладко вне Ω_k, можно получить представления (2.6), в которых $F_{kp}(\eta)$ убывает по p и η быстрее любой степени.

Рассматривая систему (3.6), (3.7) в пространстве

$$y(k, p, z) \in c(\sigma) \times C(\lambda) \quad (\sigma > m \geqslant 2, \ 0 < \lambda < 1, \ k = 1, 2) \tag{3.13}$$

(декартово произведение пространств $c(\sigma)$ по p и $C(\lambda)$ по z) и используя равномерные асимптотические оценки функций Бесселя [3], справедливые также и в комплексной плоскости на контуре Γ_4, можем доказать полную непрерывность оператора правой части преобразованных уравнений в этом пространстве. Внося теперь $y(k, p, z)$ из пространства (3.13) в (2.4), (2.5) и принимая во внимание (2.1), нетрудно видеть, что $q_k(\rho, \varphi)$ принадлежит $L_\alpha(\Omega_k), (\alpha > 1)$, т. е. классу единственности. Отсюда следует единственность и, следовательно, разрешимость системы. Точное решение системы уравнений (3.6), (3.7), сходящееся при всех значениях параметров, можно записать в форме «ряда Фредгольма» с помощью средств внешнего анализа [4].

4. Для построения приближенного решения задачи заметим, что бесконечные ряды в уравнениях (3.7), (3.8) быстро сходятся. Поэтому можно урезать их, оставляя N членов. Дальнейшее решение получившейся системы линейных интегральных уравнений с применением приближенной факторизации может быть сведено к решению бесконечной линейной алгебраической системы [1]. При этом матрица бесконечной системы имеет отличными от нуля лишь диагональные элементы и элементы столбцов. Матрицы, обратные к описанным, легко строятся [5].

Другой приближенный прием состоит в урезании рядов (2.1) условием

$$f_{kl}(r) \equiv q_{kn}(r) \equiv 0, \quad k = 1, 2 \tag{4.1}$$

$$l = \pm(L + 1), \ \pm(L + 2), \ \ldots, \quad n = \pm(N + 1), \ \pm(N + 2), \ \ldots$$

В результате количество уравнений и неизвестных в (3.7), (3.8) оказывается равным $4N + 2$.

Решение этой системы можно получить с помощью ряда Фредгольма либо построить его приближенное значение приемом работы [6].

5. Изложим дальнейшую схему решения задачи в случае вибрации на слоистой среде двух жестких плоских штампов радиусов и масс соответственно a_1, m_1 и a_2, m_2 под действием сил $P_1 e^{-i\omega t}$ и $P_2 e^{-i\omega t}$.

Будем интересоваться колебанием штампов относительно положения статического равновесия. Перемещения описанных штампов имеют в комплексной форме (без временного множителя) значения

(5.1) $$f_1(r,\varphi) = c_1 + c_3 re^{i\varphi} + c_4 re^{-i\varphi}, \quad f_2(r,\varphi) = c_2 + c_5 re^{i\varphi} + c_6 re^{-i\varphi}$$

Здесь постоянные c_1, c_2 характеризуют вертикальные смещения штампов, а c_k $(k = 3, \ldots, 6)$ линейно связаны с углами их поворотов относительно горизонтальных осей. Все перечисленные постоянные должны быть определены.

Используя условия (4.1) при $N = L = 1$, решив приближенно уравнения (3.7), (3.8), найдем

(5.2) $$q_n(r,\varphi) = \sum_{k=1}^{6} c_k q_{nk}(r,\varphi) \quad (n = 1, 2)$$

Пусть J_{k1} и J_{k2} — моменты инерции штампов относительно осей x и y, лежащих на недеформированной поверхности. Тогда уравнения движения штампов представим в форме

(5.3) $$m_k\omega^2 c_k = \sum_{s=1}^{6} P_{ks}c_s - P_k, \quad k = 1, 2$$

$$J_{kp}\omega^2 \sum_{m=1}^{2} \lambda_{pkm} c_{2k+m} = \sum_{s=1}^{6} M_{pks}c_s - M_{kp}, \quad k, p = 1, 2$$

Здесь стоящие слева суммы — углы поворота штампов относительно осей x и y $(p = 2)$, и, кроме того

$$P_{ks} = \iint_{\Omega_k} q_{ks}(r,\varphi)\, r\, dr\, d\varphi$$

$$M_{pks} = \iint_{\Omega_k} q_{ks}(r,\varphi) r^2 \cos\left[\varphi - (p-1)\frac{\pi}{2}\right] dr\, d\varphi$$

где M_{kp} — момент силы P_k относительно оси x $(p = 1)$ или y $(p = 2)$. Из системы уравнений (5.3) определяются все постоянные c_k.

Замечание 1. Исследование методом работы [1] оказывается эффективным с применением приближенной факторизации функции $K[\mu_k(u)]$. При наличии точек ветвления A_k степени $1/2$ на вещественной оси, причем K обращается в них в нуль (полупространство) или бесконечность, приближающая функция должна содержать множитель или делитель вида

$$\{(u^2 - A_k^2)[u^2 - (A_k + i\varepsilon)^2]\}^{1/4}, \quad 0 < \varepsilon \ll 1$$

Этот прием позволяет делать малым при малом ε интеграл по разрезу $-A_k$, $-A_k - i\varepsilon$, который естественно получается при деформации контуров Γ_k в нижнюю полуплоскость в уравнениях (3.7), (3.8). Если значение K в точках ветвления отлично от нуля и бесконечности, то такие точки ветвления рассматриваются как неособые.

Замечание 2. Изложенный метод развит для случая любого конечного числа штампов; здесь ради краткости приведен случай двух.

Точки ветвления у функции $K(u)$ возникают при наличии упругого полупространства, на котором покоятся упругие слои. Метод применим также и в случае абсолютно жесткого полупространства или при его отсутствии (пакет слоев).

В этом случае $K(u)$ — мероморфная функция.

Поступила 15 I 1975

ЛИТЕРАТУРА

1. *Бабешко В. А.* Новый эффективный метод решения динамических контактных задач. Докл. АН СССР, 1974, т. 217, № 4.
2. *Бабешко В. А.* О единственности решений интегральных уравнений динамических контактных задач. Докл. АН СССР, 1973, т. 210, № 6.
3. *Бейтмен Г., Эрдеи А.* Высшие трансцендентные функции. М., «Наука», 1967.
4. *Гротендик А.* Теория Фредгольма. Математика. Сб. перев, 1958, т. 2, № 5.
5. *Бабешко В. А.* Об одном эффективном методе решения некоторых интегральных уравнений теории упругости и математической физики. ПММ, 1967, т. 31, вып. 1.
6. *Бабешко В. А.* Об интегральном уравнении некоторых динамических контактных задач теории упругости и математической физики. ПММ, 1969, т. 33, вып. 1.