

АСИМПТОТИЧЕСКОЕ ОПИСАНИЕ ПРОЦЕССА ФОРМИРОВАНИЯ НЕЛИНЕЙНОГО ИСКАЖЕНИЯ ОДНОМЕРНЫХ ИМПУЛЬСОВ В СЛОИСТОЙ СРЕДЕ

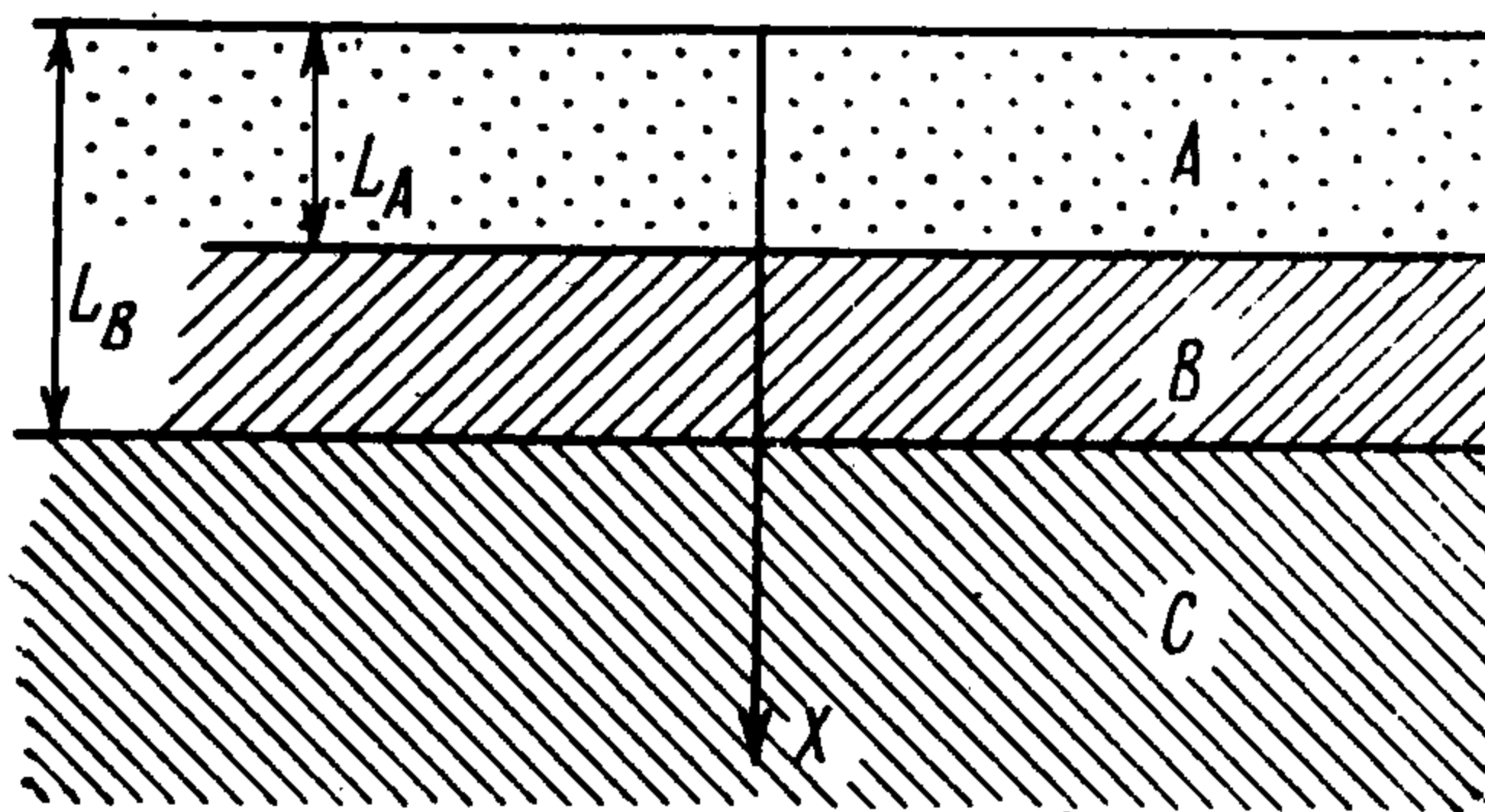
У. К. Нигул

(Таллин)

Рассматриваются и анализируются нелинейные эффекты при распространении, отражении и преломлении одномерных импульсов в среде, состоящей из двух слоев, лежащих на полупространстве. Свойства слоев и полупространства различны и нелинейны, причем напряжения представляются в виде разложения по степеням деформации. Начальный импульс конечной продолжительности задается как краевое условие на поверхности внешнего слоя либо для деформации, либо для скоростей перемещений и решается вопрос о волновой картине при стремящейся к нулю амплитуде начального импульса, т. е. для случая малых нелинейных эффектов.

Задача решается методом последовательного интегрирования линейных неоднородных волновых уравнений, согласно которому нулевым приближением служит решение линейной задачи, а последующие приближения строятся путем аппроксимации нелинейных членов при помощи предыдущего приближения.

Построенные формулы первого асимптотического приближения позволяют решить обратную задачу акустодиагностики свойств среды по параметрам отраженных импульсов. Из них следует, что при замере параметров, характеризующих прошедшие в первый слой отраженные импульсы с точностью основных компонентов нелинейного [искажения, информация о свойствах слоев и полупространства расширяется по сравнению с пренебрежением влиянием нелинейных эффектов (несмотря на то, что количество констант, определяющих свойства среды, увеличивается).



Фиг. 1

1. Постановка задачи. Рассмотрим одномерные волновые процессы, зависящие от времени t и лагранжевой координаты X . Пусть точка означает производную по t , а штрих — производную по X . Пусть конечные интервалы $0 \leq X \leq L_A$, $L_A \leq X \leq L_B$ и полубесконечный интервал $X \geq L_B$ заполнены соответственно различными средами A , B и C (см. фиг. 1). В этих интервалах продольные перемещения обозначим через $U_A(X, t)$, $U_B(X, t)$ и $U_C(X, t)$, продольные напряжения — через $\sigma_{11A}(X, t)$, $\sigma_{11B}(X, t)$ и $\sigma_{11C}(X, t)$, плотности в начальном состоянии — через ρ_A , ρ_B и ρ_C . Будем описывать волновой процесс в средах A , B и C

соответственно следующими уравнениями:

$$(1.1) \quad [\sigma_{11j}(X, t)]' = \rho_j U_j''(X, t), \quad j = A, B, C$$

$$(1.2) \quad \sigma_{11j}(X, t) = Q_j(U_j'), \quad j = A, B, C$$

$$Q_j(U_j') = P_0 + \beta_j [U_j' + 1/2 k_j (U_j')^2 + 1/3 l_j (U_j')^3 + \dots]$$

где $P_0, \rho_j, \beta_j, k_j, l_j$ — постоянные коэффициенты.

Введем определения

$$(1.3) \quad q_j(U_j') = \frac{1}{\beta_j} \frac{dQ_j(U_j')}{dU_j'}, \quad c_j = \left[\frac{\beta_j}{\rho_j} \right]^{1/2}, \quad j = A, B, C$$

Тогда на основе (1.2) и (1.3) получим из (1.1) уравнения

$$(1.4) \quad c_j^{-2} U_j''(X, t) - q_j(U_j') U_j''(X, t) = 0, \quad j = A, B, C$$

$$(1.5) \quad q_j(U_j') = 1 + k_j U_j' + l_j (U_j')^2 + \dots$$

Примем следующие условия:

1). Заданы нулевые начальные условия

$$(1.6) \quad U_j(X, 0) = 0, \quad U_j'(X, 0) = 0, \quad j = A, B, C$$

2). На границе $X = 0$ задано одно из двух краевых условий

$$(1.7) \quad U_A'(0, t) = \varepsilon \psi(t) [H(t) - H(t - t_0)] \quad (\text{задача 1})$$

$$(1.8) \quad U_A(0, t) = -\varepsilon \psi(t) [H(t) - H(t - t_0)] c_A \quad (\text{задача 2})$$

Здесь $H(t)$ — функция Хевисайда, t_0 и ε — постоянные, удовлетворяющие условиям

$$0 \leq t_0 < c_A^{-1} L_A \quad c_B^{-1} (L_B - L_A); \quad |\varepsilon| \leq 1$$

а $\psi(t)$ — произвольная непрерывная функция, удовлетворяющая условиям

$$\psi(0) = \psi(t_0) = 0, \quad \psi'(0) = \psi'(t_0) \neq 0$$

$$\max |\psi(t)| = 1, \quad 0 < t < t_0$$

и имеющая в промежутке $0 \leq t \leq t_0$ непрерывные производные всех необходимых в дальнейшем порядков.

3). На границах раздела $X = L_A$ и $X = L_B$ требуется совместность перемещений и продольных напряжений прилегающих сред, что с учетом (1.2) дает условия контакта

$$(1.9) \quad U_A(L_A, t) = U_B(L_A, t)$$

$$\beta_A \{U_A'(L_A, t) + 1/2 k_A [U_A'(L_A, t)]^2 + \dots\} =$$

$$= \beta_B \{U_B'(L_A, t) + 1/2 k_B [U_B'(L_A, t)]^2 + \dots\}$$

$$(1.10) \quad U_B(L_B, t) = U_C(L_B, t)$$

$$\beta_B \{U_B'(L_B, t) + 1/2 k_B [U_B'(L_B, t)]^2 + \dots\} =$$

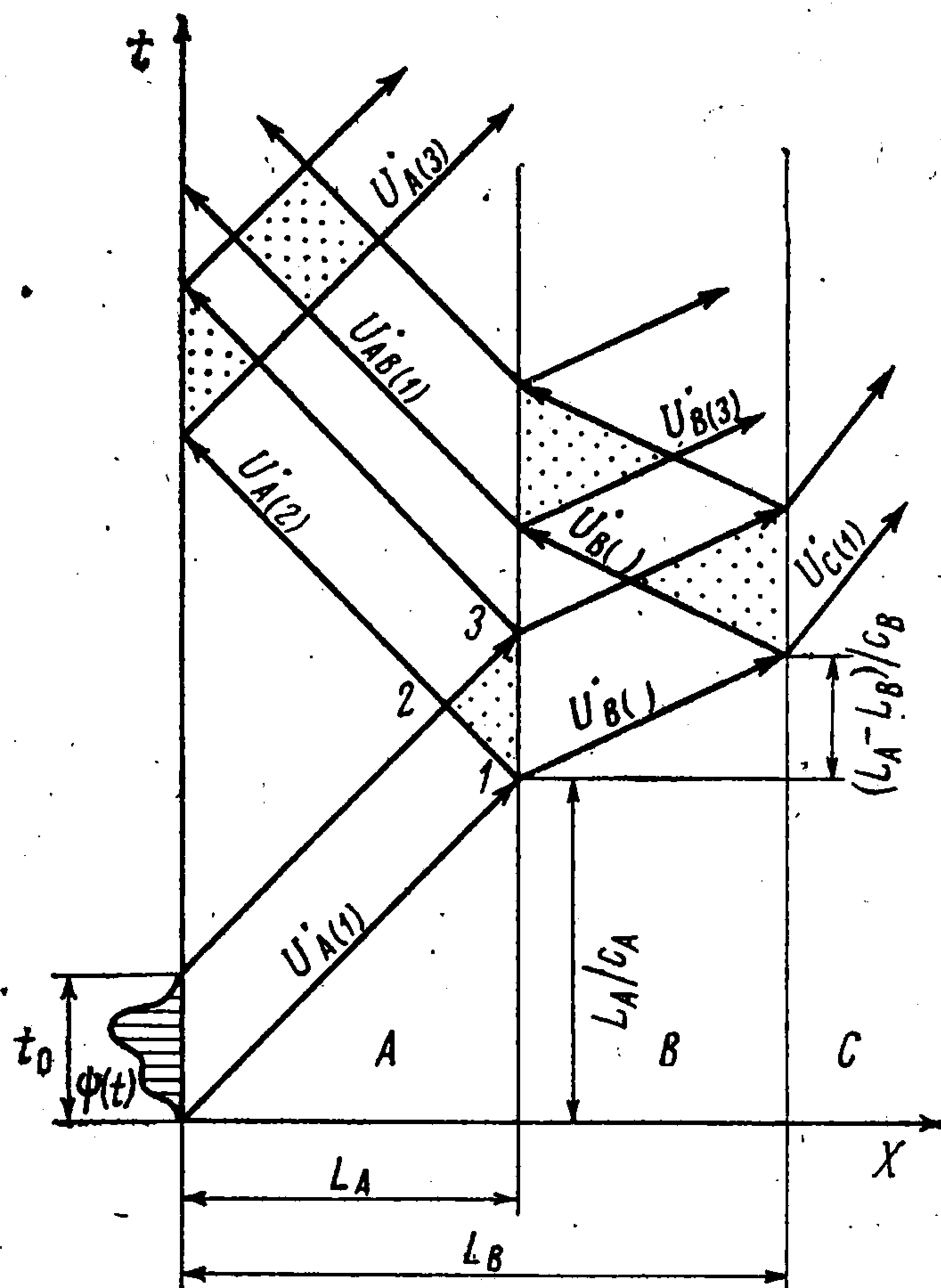
$$= \beta_C \{U_C'(L_B, t) + 1/2 k_C [U_C'(L_B, t)]^2 + \dots\}$$

4). Для задачи 1 и задачи 2, в которых воздействие задано соответственно в форме (1.7) и (1.8), требуется построить асимптотическое при $\varepsilon \rightarrow 0$ решение, определяющее малое отклонение нелинейного решения от линейного решения, которое определяется путем использования разложений

функций $Q_j (U_j')$ ($j = A, B$ и C) с точностью квадратичных членов включительно.

Искомые решения уравнений (1.4), удовлетворяющие сформулированным условиям, представляют собой совокупность импульсов (см. фиг. 2). Импульс $U_{A(1)}$ генерируется краевым воздействием при $X = 0$, импульсы $U_{A(2)}$ и $U_{B(1)}$ возникают в результате отражения-преломления $U_{A(1)}$ у границы раздела $X = L_A$ сред A и B , импульсы $U_{B(2)}$ и $U_{C(1)}$ — в результате отражения-преломления $U_{B(1)}$ у границы раздела $X = L_B$ сред B и C и т. д. Ограничимся рассмотрением импульсов, изображенных на фиг. 2.

Строим решения задачи 1 и задачи 2 методом последовательного интегрирования линейных неоднородных волновых уравнений [1-3]. Суть этого метода заключается в следующем: нулевые приближения $U_{A(1)0}$, $U_{A(2)0}$, $U_{B(1)0}$, ... рассматриваемых импульсов $U_{A(1)}$, $U_{A(2)}$, $U_{B(1)}$, ... строятся как решение соответствующей линейной задачи, а следующие приближения $U_{A(1)j}$, $U_{A(2)j}$, $U_{B(1)j}$, ... ($j = 1, 2, 3, \dots$) этих же импульсов — путем аппроксимации нелинейных членов в уравнениях (1.4), а также во втором условии контакта (1.9) и (1.10) при помощи предыдущего приближения. Конкретные выкладки ниже представлены для первого приближения. Для их выведения понадобится нулевое приближение, которое для обеих задач оказывается одинаковым и путем элементарных рассуждений может быть построено в следующем виде:



Фиг. 2

$$(1.11) \quad U_{j(i)0}(X, t) = (-1)^i \varepsilon_{ij} [H(t_{ij}) - H(t_{ij} - t_0)] \int_0^{t_{ij}} \psi(z) dz + \\ + (-1)^i \varepsilon_{ij} H(t_{ij} - t_0) \int_0^{t_0} \psi(z) dz; \quad j = A, B, C; \quad i = 1, 2, 3$$

$$(1.12) \quad U_{AB(1)0}(X, t) = \varepsilon_{1AB} [H(t_{1AB}) - H(t_{1AB} - t_0)] \int_0^{t_{1AB}} \psi(z) dz + \\ + \varepsilon_{1AB} H(t_{1AB} - t_0) \int_0^{t_0} \psi(z) dz$$

В этих формулах, относящихся к импульсам, указанным на фиг. 2, приняты обозначения

$$(1.13) \quad \begin{aligned} \varepsilon_{1A} &= \varepsilon c_A, & \varepsilon_{2A} &= \varepsilon c_A J_A, & \varepsilon_{1B} &= \varepsilon c_A (1 - J_A) \\ \varepsilon_{2B} &= \varepsilon c_A (1 - J_A) J_B, & \varepsilon_{3B} &= -\varepsilon c_A (1 - J_A) J_A J_B \\ \varepsilon_{1C} &= \varepsilon c_A (1 - J_A) (1 - J_B), & \varepsilon_{1AB} &= \varepsilon c_A (1 - J_A^2) J_B \end{aligned}$$

$$(1.14) \quad J_A = \frac{\alpha_A - 1}{\alpha_A + 1}, \quad J_B = \frac{\alpha_B - 1}{\alpha_B + 1}$$

$$\alpha_A = \left[\frac{\beta_B \rho_B}{\beta_A \rho_A} \right]^{1/2}, \quad \alpha_B = \left[\frac{\beta_C \rho_C}{\beta_B \rho_B} \right]^{1/2}$$

$$(1.15) \quad \begin{aligned} t_{1A} &= t - c_A^{-1} X, & t_{2A} &= t - 2c_A^{-1} L_A + c_A^{-1} X \\ t_{1B} &= t - c_A^{-1} L_A - c_B^{-1} (X - L_A) \\ t_{2B} &= t - c_A^{-1} L_A - 2c_B^{-1} (L_B - L_A) + c_B^{-1} (X - L_A) \\ t_{3B} &= t - c_A^{-1} L_A - 2c_B^{-1} (L_B - L_A) - c_B^{-1} (X - L_A) \\ t_{1C} &= t - c_A^{-1} L_A - c_B^{-1} (L_B - L_A) - c_C^{-1} (X - L_B) \\ t_{1AB} &= t - c_A^{-1} L_A - 2c_B^{-1} (L_B - L_A) - c_A^{-1} (L_A - X) \end{aligned}$$

В предельном случае отсутствия среды B , когда ρ_B и β_B обращаются в нуль, имеем $\alpha_A = 0$ и, следовательно, $J_A = -1$, а при предельном переходе к случаю абсолютно жесткой среды B имеем $\alpha_A \rightarrow \infty$ и $J_A = 1$. Аналогично можно выяснить предельные значения J_B . Отметим, что нелинейные эффекты при отражении импульса от свободной и жесткой границы рассмотрены в [2-7].

2. Асимптотическое приближение импульса $U_{A(1)}$. Для вычисления импульса $U_{A(1)}(X, t)$ и его первых и вторых производных в задаче 1 и задаче 2 до момента времени $t = c_A^{-1} L_A$, когда начинается отражение этого импульса от границы раздела $X = L_A$, в работе [8] построены точные формулы, а также их асимптотические при $\varepsilon \rightarrow 0$ представления двух видов. Показано [3, 8], что асимптотическое разложение точного решения вдоль характеристик линейного волнового уравнения дает эти же формулы, которые с точностью до первого и второго приближения были автором ранее получены в [2, 7] методом последовательного интегрирования линейных неоднородных волновых уравнений. Поэтому ограничимся лишь воспроизведением формулы первого приближения

$$(2.1) \quad \begin{aligned} U_{A(1)1}(X, t) &= -\varepsilon_{1A} [H(t_{1A}) - H(t_{1A} - t_0)] \left\{ \int_0^{t_{1A}} \psi(z) dz + \frac{1}{8} \varepsilon_{1A} \times \right. \\ &\times (1 + T_1) k_{AcA}^{-1} \int_0^{t_{1A}} \psi^2(z) dz + \frac{1}{4} \varepsilon_{1A} k_{AcA}^{-2} X \psi^2(t_{1A}) + \varepsilon^2(0) \left. \right\} - \\ &- \varepsilon_{1A} H(t_{1A} - t_0) \left\{ \int_0^{t_0} \psi(z) dz \right\} + \frac{1}{8} \varepsilon_{1A} (1 + T_1) k_{AcA}^{-1} \times \\ &\times \int_0^{t_0} \psi^2(z) dz + \varepsilon^2(0) \left. \right\} \end{aligned}$$

Здесь и далее $T_1 = 1$ в случае задачи 1 и $T_1 = -1$ в случае задачи 2.

3. Асимптотическое приближение импульсов $U_{A(2)}$ и $U_{B(1)}$. В области взаимодействия падающего импульса $U_{A(1)}$ и отраженного импульса $U_{A(2)}$ (см. треугольник 1—2—3 на фиг. 2) сумма $U_{A(1)} + U_{A(2)}$ должна удовлетворять уравнению (1.4) $j = A$, а импульс $U_{A(1)}$ уже построен как решение этого уравнения. Поэтому для построения $U_{A(2)}$ имеем уравнение

$$(3.1) \quad c_A^{-2} U_{A(2)}''(X, t) - U_{A(2)}''(X, t) = [k_A U_{A(2)}' + l_A (U_{A(2)}')^2 + \dots] U_{A(2)}'' + [k_A U_{A(2)}' + 2l_A U_{A(1)}' U_{A(2)}' + l_A (U_{A(2)}')^2 + \dots] U_{A(1)}'' + [k_A U_{A(1)}' + l_A (U_{A(1)}')^2 + 2l_A U_{A(1)}' U_{A(2)}' + \dots] U_{A(2)}''$$

Применение метода последовательного интегрирования линейных неоднородных волновых уравнений в случае уравнения (3.1) приводит к последовательному интегрированию уравнений

$$(3.2) \quad c_A^{-2} U_{A(2)r}''(X, t) - U_{A(2)r}''(X, t) = G_{A(2)r}(X, t), \quad r = 1, 2, 3, \dots$$

Здесь

$$G_{A(2)r}(X, t) = [k_A U_{A(2)r-1}' + l_A (U_{A(2)r-1}')^2 + \dots] U_{A(2)r-1}'' + [k_A U_{A(2)r-1}' + 2l_A U_{A(1)r-1}' U_{A(2)r-1}' + l_A (U_{A(2)r-1}')^2 + \dots] \times \\ \times U_{A(1)r-1}'' + [k_A U_{A(1)r-1}' + l_A (U_{A(1)r-1}')^2 + \\ + 2l_A U_{A(1)r-1}' U_{A(2)r-1}' + \dots] U_{A(2)r-1}''$$

Для последовательного приближения импульса $U_{B(1)}$ получим из уравнения (1.4) $j = B$ следующие линейные неоднородные волновые уравнения:

$$(3.3) \quad c_B^{-2} U_{B(1)r}''(X, t) - U_{B(1)r}''(X, t) = G_{B(1)r}(X, t), \quad r = 1, 2, 3, \dots$$

Здесь

$$G_{B(1)r}(X, t) = [k_B U_{B(1)r-1}' + l_B (U_{B(1)r-1}')^2 + \dots] U_{B(1)r-1}''$$

Интегрирование уравнений (3.2) и (3.3) в каждом приближении $r = 1, 2, 3, \dots$ должно быть проведено с учетом следующих условий: импульс $U_{A(2)}$ распространяется в направлении убывания X , а импульс $U_{B(1)}$ — в направлении роста λ ; выполнены начальные условия (1.6) и контактные условия (1.9).

Провести вычисления целесообразно в два этапа. На первом этапе вместо контактных условий (1.9) при интегрировании уравнений (3.2) и (3.3) используются соответственно условия

$$(3.4) \quad U_{A(2)r}'(L_A, t) = \varepsilon_{2A} \psi_{2A}(t_{2A}) [H(t_{2A}) - H(t_{2A} - t_0)]$$

$$(3.5) \quad U_{B(1)r}'(L_A, t) = -\varepsilon_{1B} \psi_{1B}(t_{1B}) [H(t_{1B}) - H(t_{1B} - t_0)]$$

где $\psi_{2A}(t_{2A})$ и $\psi_{1B}(t_{1B})$ — пока не заданные непрерывные функции.

На втором этапе вычисляются функции $\psi_{2A}(t_{2A})$ и $\psi_{1B}(t_{1B})$, при которых выполняются условия (1.9).

Указанный прием позволяет на первом этапе вычислений отдельно рассматривать задачу интегрирования уравнений (3.2) и задачу интегри-

рования уравнений (3.3). Ссылаясь на работу [3], где эти задачи решены при помощи преобразования Лапласа, опустим для краткости промежуточные выкладки и представим с точностью первого приближения их решения

$$(3.6) \quad U_{A(2)1}(X, t) = \varepsilon_{2A} [H(t_{2A}) - H(t_{2A} - t_0)] \left\{ \int_0^{t_{2A}} \psi_{2A}(z) dz + \right. \\ + \frac{1}{4} \varepsilon_{2A} k_{AC}^{-2} (L_A - X) \psi^2(t_{2A}) - \frac{1}{4} \varepsilon_{1A} k_{AC}^{-1} H(t_{1A}) \times \\ \times \left[\psi(t_{1A}) \int_0^{t_{2A}} \psi(z) dz - \psi(t_{2A}) \int_0^{t_{1A}} \psi(z) dz \right] + \frac{1}{4} \varepsilon_{1A} k_{AC}^{-1} H(t_{1A} - t_0) \times \\ \times \left[\psi(t_{1A}) \int_0^{t_{2A}} \psi(z) dz - \psi(t_{2A}) \int_{t_0}^{t_{1A}} \psi(z) dz \right] + \varepsilon^2(0) \left. \right\} + \\ + \varepsilon_{2A} H(t_{2A} - t_0) \left\{ \int_0^{t_0} \psi_{2A}(z) dz + \varepsilon^2(0) \right\}$$

$$(3.7) \quad U_{B(1)1}(X, t) = -\varepsilon_{1B} [H(t_{1B}) - H(t_{1B} - t_0)] \left\{ \int_0^{t_{1B}} \psi_{1B}(z) dz + \right. \\ + \frac{1}{4} \varepsilon_{1B} k_{BC}^{-2} (X - L_A) \psi_{1B}^2(t_{1B}) + \varepsilon^2(0) \left. \right\} - \varepsilon_{1B} H(t_{1B} - t_0) \times \\ \times \left\{ \int_0^{t_0} \psi_{1B}(z) dz + \varepsilon^2(0) \right\}$$

Приступим к реализации второго этапа расчета. Учитывая, что при $X = L_A$ имеем

$$U_A(L_A, t) = U_{A(1)}(L_A, t) + U_{A(2)}(L_A, t) \\ U_B(L_A, t) = U_{B(1)}(L_A, t)$$

и используя формулы (2.1), (3.6), (3.7), можно из условий контакта (1.9) вывести следующие представления функции ψ_{2A} и ψ_{1B} :

$$(3.8) \quad \psi_{2A}(t_{2A}) = \psi(t_{2A}) + \frac{1}{4} \varepsilon k_A \left\{ \frac{1}{2} [1 + T_1 + J_A^{-1}(1 - J_A)(1 + J_A)^2 K_A] \times \right. \\ \times \psi^2(t_{2A}) - (1 - J_A) \psi'(t_{2A}) \int_0^{t_{2A}} \psi(z) dz + c_A^{-1} L_A \frac{\partial}{\partial t} \psi^2(t_{2A}) \left. \right\}$$

$$(3.9) \quad \psi_{1B}(t_{1B}) = \psi(t_{1B}) + \frac{1}{8} \varepsilon k_A [1 + T_1 - (1 + J_A)^2 K_A] \psi^2(t_{1B}) + \\ + \frac{1}{4} \varepsilon k_A J_A \psi'(t_{1B}) \int_0^{t_{1B}} \psi(z) dz + \frac{1}{4} \varepsilon k_{AC}^{-1} L_A \frac{\partial}{\partial t} \psi^2(t_{1B})$$

Здесь и далее использовано определение

$$(3.10) \quad K_A = \frac{k_B \beta_A}{k_A \beta_B} - 1$$

Подстановка (3.8) в (3.6) и (3.9) в (3.7) дает окончательные формулы для вычисления первых приближений $U_{A(2)1}$ и $U_{B(1)1}$ импульсов $U_{A(2)}$ и

Узв). Путем дифференцирования этих формул несложно вывести формулы первого приближения для производных от $U_{A(2)1}$ и $U_{B(1)1}$. Представим формулы для вычисления $\dot{U}_{A(2)1}$ и $\dot{U}_{B(1)1}$.

$$(3.11) \quad \dot{U}_{A(2)1}(X, t) = [H(t_{2A}) - H(t_{2A} - t_0)] [\dot{V}_{A(2)0}(X, t) + \dot{V}_{A(2)1}(X, t)] + [H(t_{2A}) - H(t_{2A} - t_0)] [H(t_{1A}) - H(t_{1A} - t_0)] \dot{V}_{A(12)1}(X, t)$$

$$(3.12) \quad \dot{U}_{B(1)1}(X, t) = [H(t_{1B}) - H(t_{1B} - t_0)] [\dot{V}_{B(1)0}(X, t) + \dot{V}_{B(1)1}(X, t)]$$

Здесь

$$(3.13) \quad \dot{V}_{A(2)0}(X, t) = c_A \varepsilon J_A \psi(t_{2A})$$

$$\dot{V}_{A(2)1}(X, t) = c_A \varepsilon^2 k_A \left\{ \frac{1}{8} [(1 - J_A)(1 + J_A)^2 K_A + J_A(1 + T_1)] \times \right. \\ \left. \times \psi^2(t_{2A}) + \frac{1}{4} J_A \psi'(t_{2A}) \left[\int_0^{t_0} \psi(z) dz - (1 - J_A) \int_0^{t_{2A}} \psi(z) dz \right] + \right. \\ \left. + \frac{1}{4} c_A^{-1} [J_A^2(L_A - X) + J_A L_A] \frac{\partial}{\partial t} \psi^2(t_{2A}) \right\}$$

$$\dot{V}_{A(12)1}(X, t) = c_A \varepsilon^2 k_A J_A \left\{ -\frac{1}{4} \psi'(t_{1A}) \int_0^{t_{2A}} \psi(z) dz + \right. \\ \left. + \frac{1}{4} \psi'(t_{2A}) \int_{t_0}^{t_{1A}} \psi(z) dz \right\}$$

$$(3.14) \quad \dot{V}_{B(1)0}(X, t) = -c_A \varepsilon (1 - J_A) \psi(t_{1B})$$

$$\dot{V}_{B(1)1}(X, t) = -c_A \varepsilon^2 k_A \left\{ \frac{1}{8} [1 + T_1 - (1 + J_A) K_A]^2 \psi^2(t_{1B}) + \right. \\ \left. + \frac{1}{4} J_A \psi'(t_{1B}) \int_0^{t_{1B}} \psi(z) dz + \right. \\ \left. + \frac{1}{4} [c_A^{-1} L_A + (1 + J_A)(K_A + 1) c_B^{-1} (X - L_A)] \frac{\partial}{\partial t} \psi^2(t_{1B}) \right\}$$

Отметим, что в формуле (3.11) функция $\dot{V}_{A(2)0}$ определяет нулевое (линейное) приближение $\dot{U}_{A(2)}$, функция $\dot{V}_{A(2)1}$ — нелинейную составляющую $\dot{U}_{A(2)}$ вне области взаимодействия импульсов $U_{A(1)}$ и $U_{A(2)}$ и функция $\dot{V}_{A(12)1}$ — нелинейную составляющую $\dot{U}_{A(2)}$, которая отлична от нуля только в области взаимодействия импульсов $U_{A(1)}$ и $U_{A(2)}$ (см. фиг. 2) и вместе с функцией $\dot{V}_{A(2)1}$ определяет нелинейное искажение $\dot{U}_{A(2)}$ в этой области.

Аналогично в формуле (3.12) функция $\dot{V}_{B(1)0}$ определяет нулевое (линейное) приближение $\dot{U}_{B(1)}$, а функция $\dot{V}_{B(1)1}$ — нелинейную составляющую $\dot{U}_{B(1)}$.

Обратим еще внимание на то, что представленное первое приближение рассматриваемых импульсов основывается на вычислении функций $G_{A(2)1}$ и $G_{B(1)1}$ при помощи нулевого приближения (1.11) этих импульсов. Для нахождения второго приближения импульсов $U_{A(2)}$ и $U_{B(1)}$ следует вычислить функции $G_{A(2)2}$ и $G_{B(1)2}$ при помощи первого приближения этих импульсов, построенного в п. 3.

4. Асимптотическое приближение импульсов $U_{B(2)}$ и $U_{C(1)}$. Поступая аналогично изложенному в п. 3, несложно вывести формулы первого приближения для импульсов $U_{B(2)}$, $U_{C(1)}$ и для их производных. Опуская громоздкие промежуточные выкладки, ограничимся представлением окончательной формулы для вычисления первого приближения $U_{B(2)1}$ величины $U_{B(2)}$

$$(4.1) \quad \begin{aligned} U_{B(2)1}^{\cdot}(X, t) = & [H(t_{2B}) - H(t_{2B} - t_0)] [V_{B(2)0}^{\cdot}(X, t) + \\ & + V_{B(2)1}^{\cdot}(X, t)] + [H(t_{2B}) - H(t_{2B} - t_0)] [H(t_{1B}) - \\ & - H(t_{1B} - t_0)] V_{B(12)1}^{\cdot}(X, t) \end{aligned}$$

Здесь

$$(4.2) \quad \begin{aligned} V_{B(2)0}^{\cdot}(X, t) = & c_A \varepsilon (1 - J_A) J_B \psi(t_{2B}) \\ V_{B(2)1}^{\cdot}(X, t) = & c_A \varepsilon^2 k_A (1 - J_A) J_B \left\{ \frac{1}{8} [1 + T_1 - (1 + J_A)^2 K_A + \right. \\ & + J_B^{-1} (1 - J_B) (1 + J_B)^2 (1 + J_A) (K_A + 1) K_B] \psi^2(t_{2B}) + \\ & + \frac{1}{4} (1 - J_A) (K_A + 1) \psi^{\cdot}(t_{2B}) \int_0^{t_0} \psi(z) dz + \\ & + \frac{1}{4} [J_A - (1 - J_B) (1 + J_A) (K_A + 1)] \psi^{\cdot}(t_{2B}) \int_0^{t_{2B}} \psi(z) dz + \\ & + \frac{1}{4} [c_A^{-1} L_A + (1 + J_A) (K_A + 1) c_B^{-1} (L_B - L_A) + \\ & + J_B (1 + J_A) (K_A + 1) c_{B1}^{-1} (L_B - X)] \frac{\partial}{\partial t} \psi^2(t_{2B}) \left. \right\} \\ V_{B(12)1}^{\cdot}(X, t) = & c_A \varepsilon^2 k_A (1 - J_A) (1 + J_A) J_B (K_A + 1) \left\{ -\frac{1}{4} \psi^{\cdot}(t_{1B}) \times \right. \\ & \times \int_0^{t_{2B}} \psi(z) dz + \frac{1}{4} \psi^{\cdot}(t_{2B}) \int_{t_0}^{t_{1B}} \psi(z) dz \left. \right\} \end{aligned}$$

Здесь аналогично (3.10) введено определение

$$(4.3) \quad K_B = \frac{k_C \beta_B}{k_B \beta_C} - 1$$

Отметим, что в формуле (4.1) $V_{B(2)0}^{\cdot}$ определяет нулевое (линейное) приближение $U_{B(2)}$, $V_{B(2)1}^{\cdot}$ — нелинейное искажение $U_{B(2)}$ вне области взаимодействия падающего импульса $U_{B(1)}$ и отраженного импульса $V_{B(2)}$ и $V_{B(12)1}^{\cdot}$ — ту часть нелинейного искажения $U_{B(2)}$, которая отлична от нуля только в области взаимодействия импульсов $U_{B(1)}$ и $U_{B(2)}$.

5. Асимптотическое приближение импульсов $U_{B(3)}$ и $U_{AB(1)}$. Поступая аналогично изложенному в п. 3, можно вывести и формулы первого асимптотического приближения для импульсов $U_{B(3)}$ и $U_{AB(1)}$ (см. фиг. 2). Для краткости ограничимся здесь представлением окончательной формулы для вычисления первого приближения $U_{AB(1)1}$ величины $U_{AB(1)}$

$$(5.1) \quad \begin{aligned} U_{AB(1)1}^{\cdot}(X, t) = & [H(t_{1AB}) - H(t_{1AB} - t_0)] \times \\ & \times [V_{AB(1)0}^{\cdot}(X, t) + V_{AB(1)1}^{\cdot}(X, t)] \\ V_{AB(1)0}^{\cdot}(X, t) = & c_A \varepsilon J_B (1 - J_A^2) \psi(t_{1AB}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
V_{AB(1)1}^{\cdot}(X, t) = & c_A \varepsilon^2 k_A J_B (1 - J_A^2) \left\{ \frac{1}{8} [1 + T_1 - (1 + J_A)^2 K_A + \right. \\
& + J_B^{-1} (1 - J_B) (1 + J_B)^2 (1 + J_A) (K_A + 1) K_B + J_B (1 + J_A) \times \\
& \times (1 - J_A)^2 K_A] \psi^2(t_{1AB}) + \frac{1}{4} (1 + J_A) (K_A + 1) \psi^{\cdot}(t_{1AB}) \int_0^{t_0} \psi(z) dz + \\
& + \frac{1}{4} [J_A - (1 - J_B) (1 + J_A) (K_A + 1) - J_B (1 + J_A) J_A (K_A + 1)] \times \\
& \times \psi^{\cdot}(t_{1AB}) \int_0^{t_{1AB}} \psi(z) dz + \frac{1}{4} [c_A^{-1} L_A + (1 + J_B) (1 + J_A) (K_A + 1) \times \\
& + c_B^{-1} (L_B - L_A) + J_B (1 - J_A^2) c_A^{-1} (L_A - X)] \frac{\partial}{\partial t} \psi^2(t_{1AB}) \left. \right\}
\end{aligned}$$

6. Извлечение информации из нелинейного искажения отраженных импульсов, поступающих в среду А. Будем иметь в виду идеализированную экспериментальную ситуацию, при которой выполняются следующие условия. Во-первых, математическая модель, сформулированная в п. 1, является адекватной. Во-вторых, благодаря соответствующему подбору функции $\psi(t)$, определяющей временную зависимость воздействия у границы $X = 0$, оказывается возможным отраженные импульсы в среде А декомпонировать в линейную и в нелинейные составляющие, изменяющиеся во времени различным образом, и определить амплитуды этих составляющих.

Покажем, какую информацию о свойствах сред А, В и С при выполнении указанных предположений оказывается возможным извлечь из нелинейного искажения отраженных импульсов, поступающих от границ раздела сред А и В и сред В и С в среду А.

Для конкретности предположим, что в точке $X = a$, $a = \text{const}$ среды А, находящейся вне областей взаимодействия импульса $U_{A(3)}$ с импульсами $U_{A(2)}$ и $U_{AB(1)}$ (см. фиг. 2), осуществляется регистрация и декомпонирование функций $U_{A(2)}(a, t) = \mathcal{E}_1(t)$, $U_{AB(1)}(a, t) = \mathcal{E}_2(t)$, для которых на основе (3.11), (3.13) и (5.1) имеем следующее асимптотическое представление первого приближения:

$$(6.1) \quad \mathcal{E}_j(t) = [H(t - r_j) - H(t - t_0 - r_j)] \left\{ R_{j0} \psi(t - r_j) + \sum_{n=1}^4 R_{jn} F(t - r_j) \right\}$$

Здесь

$$\begin{aligned}
(6.2) \quad r_1 &= c_A^{-1} (2L_A - a) \\
R_{10} &= c_B \varepsilon J_A, \quad R_{11} = \frac{1}{8} c_A \varepsilon^2 k_A [J_A (1 + T_1) + (1 - J_A) (1 + \\
& + J_A)^2 K_A], \quad R_{12} = \frac{1}{4} c_A \varepsilon^2 k_A J_A M \\
R_{13} &= -\frac{1}{4} c_A \varepsilon^2 k_A J_A (1 - J_A) \\
R_{14} &= \frac{1}{4} \varepsilon^2 k_A J_A [J_A (L_A - a) + L_A] \\
(6.3) \quad r_2 &= r_1 + 2c_B^{-1} (L_B - L_A) \\
R_{20} &= c_A \varepsilon (1 - J_A^2) J_B \\
R_{21} &= \frac{1}{8} c_A \varepsilon^2 k_A (1 - J_A^2) [J_B (1 + T_1) - J_B (1 + J_A)^2 K_A + \\
& + (1 - J_B) (1 + J_B)^2 (1 + J_A) (K_A + 1) K_B + J_B^2 (1 + J_A) (1 - \\
& - J_A)^2 K_A]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 R_{22} &= \frac{1}{4} c_A \varepsilon^2 k_A J_B (1 - J_A^2)(1 + J_A)(K_A + 1)M \\
 R_{23} &= \frac{1}{4} c_A \varepsilon^2 k_A J_B (1 - J_A^2)[J_A - (1 - J_B)(1 + J_A)(K_A + 1) - J_B (1 + J_A)J_A (K_A + 1)] \\
 R_{24} &= \frac{1}{4} c_A \varepsilon^2 k_A J_B (1 - J_A^2)[c_A^{-1}L_A + J_B (1 - J_A^2)c_A^{-1} (L_A - a) + (1 + J_B)(1 + J_A)(K_A + 1)c_B^{-1} (L_B - L_A)] \\
 (6.4) \quad F_1(t) &= \psi^2(t), \quad F_2(t) = \psi'(t)
 \end{aligned}$$

$$F_3(t) = \psi'(t) \int_0^t \psi(z) dz, \quad F_4(t) = \frac{\partial}{\partial t} \psi^2(t)$$

$$(6.5) \quad M = \int_0^{t_0} \psi(z) dz$$

Обратим внимание на то, что функции (6.4) и значение интеграла (6.5) определяются заданием функции $\psi(t)$, т. е. временной зависимости воздействия.

Согласно предложениям, сформулированным в начале п. 6, будем рассматривать r_i, R_{ij} ($i = 1, 2; j = 0, 1, 2, 3, 4$) как постоянные, найденные путем обработки данных эксперимента.

Из формул (6.2) видно, что шесть постоянных r_1, R_{1j} ($j = 0, 1, 2, 3, 4$), являющихся коэффициентами первого приближения функции $\mathcal{E}_1(t)$, выражаются через пять параметров c_A, L_A, J_A, K_A, k_A слоистой среды. Вытекающая отсюда «переопределенность» обратной задачи вычисления c_A, L_A, J_A, K_A, k_A по r_1, R_{1j} ($j = 0, 1, 2, 3, 4, 5$) исчезает только в частном случае, когда функция $\psi(t)$ задана таким образом, что интеграл (6.5) равен нулю и, следовательно, $R_{12} = 0$. Однако и в других случаях ввиду малости постоянной R_{12} ее, по-видимому, нецелесообразно использовать для вычисления параметров слоистой среды.

Из формул (6.3) следует, что шесть постоянных r_2, R_{2j} ($j = 0, 1, 2, 3, 4, 5$), являющихся коэффициентами первого приближения функции $\mathcal{E}_2(t)$, выражаются через следующие девять параметров слоистой среды: $c_A, L_A, J_A, K_A, k_A, c_B, L_B, J_B, K_B$.

Пусть амплитуда ε и временная зависимость $\psi(t)$ воздействия известны. Тогда с учетом формул (1.3), (1.14), (3.10), (4.3) придем к следующему заключению: время прибытия (r_1, r_2) в точку $X = a$ импульсов $U_{A(2)}, U_{AB(1)}$ и амплитуды (R_{10}, R_{20}) их линейных составляющих позволяет определить численные значения четырех величин

$$\begin{aligned}
 \beta_{VRB} / \beta_{ARA}, \quad (L_A - a)(\rho_A / \beta_A)^{1/2} \\
 \beta_{SRC} / \beta_{VRB}, \quad (L_B - L_A)(\rho_B / \beta_B)^{1/2}
 \end{aligned}$$

а если использовать также амплитуды R_{ij} ($i = 1, 2; j = 1, 2, 3, 4$) первого приближения нелинейных составляющих этих же импульсов, то оказывается возможным вычислить следующие девять параметров слоистой среды:

$$\begin{aligned}
 \beta_{VRB} / \beta_{ARA}, \quad \beta_A / \rho_A, \quad L_A, \quad k_B \beta_A / k_A \beta_B \\
 \beta_{SRC} / \beta_{VRB}, \quad \beta_B / \rho_B, \quad L_B, \quad k_C \beta_B / k_B \beta_C
 \end{aligned}$$

Особое внимание заслуживает то обстоятельство, что нелинейная теория позволяет для каждого слоя отдельно вычислять толщину и скорость распространения волн.

Некоторые из результатов данной статьи автором ранее сообщены в [3,9,10]. С другой точки зрения проблема нелинейного искажения импульсов в слоистой среде исследована в [11,12].

Поступила 11 XI 1975

ЛИТЕРАТУРА

1. Низул У. К. Отклонение решения квазилинейного волнового уравнения от решения линейного уравнения в области непрерывных первых производных. ПММ, 1973, т. 37, вып. 3.
2. Низул У. К. Аналитическое выявление нелинейных эффектов при распространении и повторном отражении импульса с применением метода последовательного интегрирования линейных неоднородных волновых уравнений. Тр. симп. «Нелинейные и тепловые эффекты при переходных волновых процессах», т. 1. Горький — Таллин, Изд-во Горьковск. ун-та, 1973.
3. Низул У. К. Эхо-сигналы от упругих объектов, т. 1. Таллин, «Валгус», 1976.
4. Breazeale M. A., Lester W. W. Demonstration of the «Least stable waveform of finite amplitude waves». J. Acoust. Soc. America, 1961, vol. 33, No. 12, p. 1803.
5. Thompson D. O., Tennison M. A., Buck O. Reflections of harmonics generated by finite-amplitude waves. J. Acoust. Soc. America, 1968, vol. 44, No. 2, p. 435—436.
6. Зарембо Л. К., Сердобольская О. Ю., Чернобай И. П. Влияние фазовых сдвигов при отражении от границ на нелинейное взаимодействие продольных волн в твердых телах. Акуст. ж., 1972, т. 13, вып. 3.
7. Низул У. К. Асимптотический анализ отклонения нелинейного волнового решения от линейного при одномерных переходных процессах упругой деформации. Теоретична и приложна механика, 1974, т. 5, № 4.
8. Низул У. К. Точные решения квазилинейного волнового уравнения и область применимости метода последовательного интегрирования линейных неоднородных волновых уравнений. Изв. АН СССР. МТТ, 1975, № 3.
9. Низул У. К. Влияние нелинейных эффектов на одномерные эхо-сигналы от упругих объектов. Акуст. ж., 1975, т. 21, № 1.
10. Nizul U. Asymptotic analysis of the non-linear effects on finite echo-pulses from elastic half-space. Acustica, 1976, vol. 34, No. 3, p. 127—137.
11. Cekirge H. M., Varley E. Large amplitude waves in bounded media. I. Reflexion and transmission of large amplitude shockless pulses at an interface. Philos. Trans. Roy. Soc. London, A, Math. and Phys. Sci., 1973, vol. 273, No 1234, p. 261—313.
12. Kazakia J. Y., Varley E. Large amplitude waves in bounded media. II. The deformation of an impulsively loaded slab: the first reflection. III. The deformation of an impulsively loaded slab: the second reflection. Philos. Trans. Roy. Soc. London, A, 1974, vol. 277, No. 1267, p. 191—250.