Прикладная математика и механика. Том 40, 1976

УДК 539.3

ПРИМЕНЕНИЕ МЕТОДА РАСЧЛЕНЕНИЯ НАПРЯЖЕННОГО СОСТОЯНИЯ К РАСЧЕТУ ТЕРМОУПРУГИХ ОБОЛОЧЕК

Н. Н. Рогачева

(Москва)

С помощью асимптотического подхода [1] на термоупругие оболочки распространен метод расчленения напряженного состояния. Для ненагретых оболочек, подверженных воздействию внешних сил, он подробно рассмотрен в [2] и заключается в представлении полного напряженного состояния оболочки в виде суммы таких более простых напряженных состояний, для каждого из которых можно указать свои максимально простые методы их построения.

Для оболочек с постоянной по толщине температурой расчленение напряженного состояния было выполнено в [3]. В работе [4] при расчете круговой цилиндрической оболочки по моментной теории было замечено, что в общем решении содержатся интегралы, распространенные по всей срединной поверхности, описывающие основное напряженное состояние и интегралы, затухающие при удалении от краев и представляющие краевые эффекты. В ряде работ, например в [5], для простых примеров расчета круговых цилиндрических оболочек расчленение выполнено на основе наглядных физических представлений.

Ниже описан общий подход к расчету жестких термоупругих оболочек методом расчленения.

1. Под жесткими оболочками условимся подразумевать оболочки с такими закреплениями краев, которые устраняют деформации чистого изгиба (при таких закреплениях в ненагретой оболочке при выполнении всех прочих условий применимости безмоментной теории вдали от краев господствует безмоментное напряженное состояние).

В дальнейшем будем предполагать, что температура по толщине оболочки меняется произвольным образом.

Используемые обозначения и уравнения взяты из [2].

Будем исходить из общих уравнений теории оболочек, составленных в предположении, что срединная поверхность отнесена к ортогональной несопряженной системе координат α_1, α_2.

Уравнения равновесия имеют вид (считаем, что поверхностная нагрузка отсутствует, а напряженно-деформированное состояние вызвано температурным полем)

$$
\begin{aligned}
(1.1)\qquad & \frac{1}{A_i}\frac{1}{R}\frac{\partial T_{i*}}{\partial \xi_i}+\frac{1}{A_j}\frac{1}{R}\frac{\partial S_{ij*}}{\partial \xi_j}+h_*^{s}k_j(T_{i*}-T_{j*})+\\
& +h_*^{s}k_i(S_{ij*}+S_{ji*})-h_*^{2s}\frac{N_{i*}}{R_i'}+h_*^{2s}\frac{N_{j*}}{R_{12}}=0
\end{aligned}
$$

$$\frac{T_{1*}}{R_1'}+\frac{T_{2*}}{R_2'}-\frac{S_{12*}+S_{21*}}{R_{12}}+\frac{1}{A_i}\frac{1}{R}\frac{\partial N_{i*}}{\partial \xi_i}+$$
$$+\frac{1}{A_j}\frac{1}{R}\frac{\partial N_{j*}}{\partial \xi_j}+h_*^s k_j N_{i*}+h_*^s k_i N_{j*}=0$$

$$\frac{1}{A_i}\frac{1}{R}\frac{\partial G_{i*}}{\partial \xi_i}-\frac{h_*^{2-4s}}{A_j}\frac{1}{R}\frac{\partial H_{ij*}}{\partial \xi_j}+h_*^s k_j(G_{i*}-G_{j*})- \tag{1.2}$$
$$-h_*^{2-3s}k_j(H_{ij*}+H_{ji*})-N_{i*}=0$$

Соотношения упругости

$$T_{i*}=\frac{2Eh}{(1-\nu^2)}\frac{1}{R}(\varepsilon_{i*}+\nu\varepsilon_{j*})-t_{0*},\quad S_*=S_{ij*}=S_{ji*}=\frac{Eh}{(1+\nu)}\frac{1}{R}\omega_* \tag{1.3}$$

$$G_{i*}=-h_*^{2-4s}\frac{2Eh}{3(1-\nu^2)}(\varkappa_{i*}+\nu\varkappa_{j*})+t_* \tag{1.4}$$
$$H_*=H_{ij*}=H_{ji*}=\frac{2Eh}{3(1+\nu)}\tau_*$$

Формулы деформации — смещения

$$\varepsilon_{i*}=\frac{1}{A_i}\frac{\partial u_{i*}}{\partial \xi_i}+h_*^s k_i R u_{j*}-\frac{R}{R_i'}w_* \tag{1.5}$$
$$\omega_{i*}=\frac{1}{A_i}\frac{\partial u_{j*}}{\partial \xi_i}-h_*^s k_i R u_{i*}+\frac{R}{R_{12}}w_*,\quad \omega_*=\omega_{1*}+\omega_{2*}$$

$$\gamma_{i*}=-\frac{1}{A_i}\frac{\partial w_*}{\partial \xi_i}-h_*^{2s}\frac{R}{R_i'}u_{i*}-h_*^{2s}\frac{R}{R_{12}}u_{j*} \tag{1.6}$$
$$\varkappa_{i*}=-\frac{1}{A_i}\frac{\partial \gamma_{i*}}{\partial \xi_i}-h_*^s k_i R\gamma_{j*}$$
$$\tau_*=-\frac{1}{A_1}\frac{\partial \gamma_{2*}}{\partial \xi_1}+h_*^s k_1 R\gamma_{1*}-h_*^{2s}\frac{R}{R_{12}}\varepsilon_{2*}$$
$$\left(k_i=\frac{1}{A_iA_j}\frac{\partial A_i}{\partial \alpha_j}\right)$$

Для удобства дальнейшего изложения в (1.1) — (1.6) поставлены звездочки справа от искомых величин и введены некоторые новые обозначения: ξ_i, R, h_*. Пока же их надо заменить на α_i, 1, 1 соответственно, а звездочки опустить.

В соотношения упругости, как обычно, вместо температуры T введены ее интегральные характеристики (γ — нормальная к срединной поверхности координата)

$$t_0=\frac{E\alpha_t}{1-\nu}\int_{-h}^{+h}T\,d\gamma,\quad t=\frac{E\alpha_t}{1-\nu}\int_{-h}^{+h}T\gamma\,d\gamma \tag{1.7}$$

Формула перехода от усилий и моментов к напряжениям при произвольном законе изменения температуры по толщине имеет вид (см., например, [4, 6])

$$\tau_i=\frac{T_i}{2h}-\gamma\frac{3G_i}{2h^3}+\frac{t_0}{2h}-\gamma\frac{3t}{2h^3}-\frac{E\alpha_t}{1-\nu}T \tag{1.8}$$

В случае линейной по толщине температуры в (1.8) остаются лишь первые два слагаемых в правой части.

Здесь и далее каждое равенство, содержащее индексы i и j, следует рассматривать как двойное: одно из них получается при $i = 1$, $j = 2$, а другое — при $i = 2$, $j = 1$.

2. Пользуясь линейностью задачи, будем раздельно рассматривать напряженные состояния, соответствующие в обозначениях (1.7) температурным воздействиям t_0 и t. Случай ($t_0 \neq 0$, $t = 0$) исследован в [3], где показано, что в жестких оболочках с постоянной по толщине температурой имеет место безмоментное напряженное состояние.

Остановимся на расчете оболочек с температурным полем ($t_0 = 0$, $t \neq 0$).

Асимптотика искомых величин напряженно-деформированного состояния термоупругой оболочки имеет следующий вид:

$$
(2.1)\qquad \begin{gathered}
t = h_*^{\circ} t_*, \quad 2Ehu_i = h_*^{-s} 2Ehu_{i*}, \quad 2Ehw = h^{-2s}\, 2Ehw_* \\
(T_i,\ S_{ij}) = h_*^{-2s}\,(T_{i*},\ S_{ij*}), \quad N_i = h_*^{-s} N_{i*} \\
G_i = h_*^{\circ}\, G_{i*}, \quad H_{ij} = h_*^{2-4s} H_{ij*}
\end{gathered}
$$

В формулах (2.1) величины t_*, $2Ehu_{i*}$, . . ., H_{ij*} одного порядка, h_* — относительная полутолщина оболочки, s — показатель изменяемости основного напряженного состояния.

Асимптотика (2.1) выбрана с помощью рассуждений, аналогичных проделанным в [1]. В ней степени h_* подобраны таким образом, чтобы были непротиворечивыми краевые задачи, которые для принятой асимптотики получаются при $h_* \to 0$.

Вместо α_i введем новые переменные ξ_i, выбрав их таким образом, чтобы дифференцирование по ним не приводило к существенному увеличению искомых функций

$$
(2.2)\qquad \alpha_i = h_*^{s} R\xi_i
$$

Подставим (2.1), (2.2) в уравнения теории оболочек. В результате получим систему уравнений (1.1) — (1.6).

Отбрасывая в уравнениях (1.2), (1.4) члены с малыми множителями h_*^{2-4s} и h_*^{2-3s} и возвращаясь к прежним обозначениям, получим

$$
(2.3)\qquad G_i = t, \quad N_i = \frac{1}{A_i}\frac{\partial G_i}{\partial \alpha_i} = \frac{1}{A_i}\frac{\partial t}{\partial \alpha_i}
$$

Формулы (2.3) вместе с уравнениями равновесия (1.1), соотношениями упругости (1.3) и формулами тангенциальные деформации — смещения (1.5) образуют полную систему уравнений. Так как изгибающие моменты и перерезывающие усилия известны, то определение смещений и тангенциальных усилий сводится к интегрированию системы уравнений, формально совпадающей с безмоментной.

В процессе построения этой теории отбрасывались члены $O(h_*^{2-4s})$ и $O(h_*^{2-3s})$, поэтому погрешность ε полученной системы оценивается так:

$$
(2.4)\qquad \varepsilon = O(h_*^{2-4s})
$$

Заметим, что можно оценить роль величин t_0 и t в напряженно-деформированном состоянии жесткой оболочки. Асимптотический анализ уравнений термоупругости показывает, что если величина t_0 соизмерима с единицей, а t — с h_*^c, то при $c = 2s$ напряженно-деформированные состояния, вызываемые отдельно температурными воздействиями t_0 и t, соизмеримы по смещениям, а при $c = 2-2s$ — по напряжениям. Если же $c > 2-2s$, то с точностью до величин $O\,(h_*^{2-4s} + h_*^{c-2+2s})$ при расчете оболочки величиной t можно пренебречь.

3. Как говорилось выше, при $t_0 \neq 0$, $t = 0$ в жестких термоупругих оболочках возникает безмоментное напряженное состояние. В этом случае вопрос о разделении граничных условий на условия для безмоментных уравнений и условия для простого краевого эффекта решается так же, как в нетемпературной задаче: тангенциальные условия выполняются за счет произволов безмоментной системы уравнений, а появившиеся в нетангенциальных условиях невязки снимаются с помощью простого краевого эффекта. В результате появляются вторичные невязки в тангенциальных условиях, которые оказываются малыми. На примерах свободного и шарнирно опертого краев можно убедиться, что малость вторичных невязок обеспечивается тем, что в безмоментном напряженном состоянии моменты и перерезывающие усилия значительно меньше тангенциальных усилий.

Пусть $t_0 = 0$, $t \neq 0$. Тогда, как показано в п. 2, чтобы определить искомые величины термоупругой задачи, надо проинтегрировать систему уравнений (1.1), (1.3), (1.5), (2.3), формально совпадающую с безмоментной.

Граничные условия и в этом случае надо подбирать так, чтобы были малы вторичные невязки, появившиеся в результате расчета методом расчленения. При этом возникает трудность, связанная с тем, что при $t_0 = 0$, $t \neq 0$ изгибающие моменты и перерезывающие усилия соизмеримы с тангенциальными усилиями. Аналогичная ситуации, имеющая место в ненагретой оболочке со всеми свободными краями, рассмотрена в монографии [2] (стр. 469). Воспользуемся примененным в [2] способом для вывода тех граничных условий, которые должны учитываться при определении основного напряженного состояния и простого краевого эффекта в жесткой термоупругой оболочке при $t_0 = 0$, $t \neq 0$.

В дальнейшем понадобится асимптотика величин простого краевого эффекта. Выпишем ее, пользуясь работой [7] и считая, что край задается уравнением $\alpha_1 = \alpha_{10}$

$$
(3.1)\qquad 2Ehw = h_*^{0}\, 2Ehw_*, \quad 2Ehu_i = h_*^{1/2}\, 2Ehu_{i*}
$$

$$
S_{ij} = h_*^{1/2-s} S_{ij*}, \quad 2Eh\gamma_1 = h_*^{-1/2} 2Eh\gamma_{1*}, \quad T_1 = h_*^{1/2} T_{1*}
$$

$$
T_2 = h_*^{0} T_{2*}, \quad H_{ij} = h_*^{3/2-s} H_{ij*}, \quad N_1 = h_*^{1/2} N_{1*}, \quad G_i = h_*^{1}\, G_{i*}
$$

В формулах (3.1) степени малого параметра h_* подобраны таким образом, чтобы величины $2Ehw_*$, $2Ehu_{i*}, \ldots$, G_{i*} были одного порядка.

Обозначим через M любую из искомых величин напряженного состояния. Следуя [7], зададим все искомые величины в виде суммы трех слагаемых

$$
(3.2)\qquad M = M^{(p)} + h_*^{b} M^{(h)} + h_*^{a} M^{(e)}
$$

в которой $M^{(p)}$ — частное решение безмоментных уравнений, $M^{(h)}$ — решение однородных безмоментных уравнений, $M^{(e)}$ — решение уравнений простого краевого эффекта. Величины $M^{(h)}$ и $M^{(e)}$ находятся из однородных уравнений, поэтому перед ними стоят масштабные множители ${h_*}^a$ и ${h_*}^b$, которые будут подбираться в зависимости от граничных условий. Числа a и b характеризуют интенсивность напряженных состояний, соответствующих однородному решению безмоментных уравнений и уравнений простого краевого эффекта.

Пусть оболочка имеет свободный край $\alpha_1 = \alpha_{10}$ (предполагается, что есть еще закрепленный край, который делает оболочку жесткой). Граничные условия в этом случае следующие:

$$T_1 = 0, \quad S_{12} = 0, \; G_1 = 0, \; N_1 = 0$$

В рамках принятой точности поправками от крутящих моментов при наложении граничных условий можно пренебречь.

Учитывая (3.1), (3.2), (2.1), (2.3), представим граничные условия в виде

$$h_*^{-2s}\,(T_{1*}^{(p)} + {h_*}^b T_{1*}^{(h)}) + h_*^{a+1/2} T_{1*}^{(e)} = 0 \tag{3.3}$$

$$h_*^{-2s}\,(S_{12*}^{(p)} + {h_*}^b S_{12*}^{(h)}) + h_*^{a+1/2-s} S_{12*}^{(e)} = 0$$

$${h_*}^0 t_* + h_*^{a+1} G_{1*}^{(e)} = 0, \quad h_*^{-s}\,\frac{1}{A_1}\,\frac{1}{R}\,\frac{\partial t_*}{\partial \xi_1} + h_*^{a+1/2} N_{1*}^{(e)} = 0$$

Здесь и далее s — показатель изменяемости основного напряженного состояния. Как показано в [1], значения s должны удовлетворять неравенству $0 \leqslant s < 1/2$.

Выберем a и b так, чтобы получить непротиворечивые краевые задачи для основного напряженного состояния и краевого эффекта. Положим $a = -1$. Оставляя в двух последних формулах (4.3) только главные члены получим следующие условия для краевого эффекта в самом грубом приближении:

$$G_1^{(e)} = -t, \quad N_1^{(e)} = 0 \tag{3.4}$$

Условия для основного напряженного состояния задаются первыми двумя формулами (3.3). Выразим через t входящие в них величины $T_1^{(e)}$ и $S_{12}^{(e)}$. С этой целью воспользуемся формулами для величин простого краевого эффекта, выведенными в [7], где построен итерационный процесс, позволяющий определять величины краевого эффекта с любой точностью. Следуя [7], представим каждую из величин краевого эффекта в виде разложений

$$P_*^{(e)} = \sum_{i=0}^{\infty} h_*^{i(1/2-s)} P_{,\,i}^{(e)} \tag{3.5}$$

Число i после запятой означает номер приближения.

Чтобы определить $T_{1,0}^{(e)}$ и $S_{12,0}^{(e)}$ на краю, возьмем в [6] формулы нулевого приближения и удовлетворим граничным условиям (3.4), в результате найдем

$$T_{1,0}^{(e)} = S_{12,0}^{(e)} = 0 \tag{3.6}$$

Внесем разложение величин $T_1^{(e)}$, $S_{12}^{(e)}$ вида (3.5) в (3.3), учтем (3.6), положим $b = 0$, тогда, отбрасывая в формулах члены $O(h_*^{1/2-s})$, получим

$$T_{1*}^{(p)} + T_{1*}^{(h)} + T_{1,1}^{(e)} = 0, \quad S_{12*}^{(p)} + S_{12*}^{(h)} + S_{12,1}^{(e)} = 0 \tag{3.7}$$

$$N_{1,1}^{(e)} = -\frac{1}{A_1}\frac{\partial t_*}{\partial \xi_1}, \quad G_{1,1}^{(e)} = 0 \tag{3.8}$$

Краевые значения $T_{1,1}^{(e)}$ и $S_{12,1}^{(e)}$ можно найти, воспользовавшись формулами первого приближения [7] и принимая во внимание условия (3.8). Не останавливаясь на выкладках, выпишем окончательный результат — граничные условия для основного напряженного состояния

$$T_1^{(p)} + T_1^{(h)} = -A_1\left[\frac{1}{A_2}\frac{\partial}{\partial\alpha_2} + 2\left(-\frac{k_2R_2'}{R_{12}} + k_1\right)\right]\frac{1}{A_2}\frac{\partial}{\partial\alpha_2}\frac{R_2'}{A_1}t + \tag{3.9}$$
$$+\frac{1}{R_1'}(k_2^2R_2' + 1)t - k_2R_2'\frac{1}{A_1}\frac{\partial t}{\partial\alpha_1}$$
$$S_{12}^{(p)} + S_{12}^{(h)} = \left[\frac{1}{A_2}\frac{\partial}{\partial\alpha_2}R_2'k_2\left(1 - \frac{R_2'}{R_1'}\right) - k_1k_2R_2' - \frac{1}{R_{12}}\right]t -$$
$$-2\left(\frac{1}{A_2}\frac{\partial}{\partial\alpha_2}\frac{R_2'}{R_{12}} + k_2\right)\frac{A_1}{A_2}\frac{\partial}{\partial\alpha_2}\frac{R_2'}{A_1}t + \frac{1}{A_2}\frac{\partial}{\partial\alpha_2}R_2'\frac{1}{A_1}\frac{\partial}{\partial\alpha_1}$$
$$(\alpha_1 = \alpha_{10})$$

Рассмотрим шарнирно опертый край. Граничные условия на нем записываются в следующем виде:

$$T_1 = 0, \; u_2 = 0, \; G_1 = 0, \; w = 0 \quad (\alpha_1 = \alpha_{10})$$

или

$$h_*^{-2s}\,(T_{1*}^{(p)} + h_*{}^bT_{1*}^{(h)}) + h_*^{a+1/2}T_{1*}^{(e)} = 0$$
$$h_*^{-s}\,(2Ehu_{2*}^{(p)} + h_*{}^b\,2Ehu_{2*}^{(h)}) + h_*^{a+1/2}2Ehu_{2*}^{(e)} = 0$$
$$h_*{}^0t + h_*^{a+1}G_{1*}^{(e)} = 0$$
$$h_*^{-2s}\,(2Ehw_*^{(p)} + h_*{}^b2Ehw_*^{(h)}) + h_*{}^a2Ehw_*^{(e)} = 0$$

Положим $a = -1$, $b = -1/2 + s$. Отбрасывая в граничных условиях малые члены, получим

$$T_{1*}^{(h)} = -h_*{}^sT_{1*}^{(e)}, \quad u_{2*}^{(h)} = -u_{2*}^{(e)} \tag{3.10}$$

$$G_1^{(e)} = -t, \quad w^{(e)} = 0 \tag{3.11}$$

Поступая так же, как в случае свободного края, выразим $T_{1*}^{(e)}$ и $u_{2*}^{(e)}$ через t. В результате граничные условия для основного напряженного состояния запишутся в виде

$$T_1^{(h)} = \mp\frac{\sqrt[4]{3(1-\nu^2)}}{\sqrt{2R_2'h}}k_2R_2't - \frac{A_1}{A_2}\frac{\partial}{\partial\alpha_2}\frac{1}{A_2}\frac{\partial}{\partial\alpha_2}\frac{R_2'}{A_1}t$$
$$u_2^{(h)} = \mp\frac{R_2'^2\sqrt[4]{3(1-\nu^2)}}{R_{12}\sqrt{2R_2'h}}$$

Здесь надо брать минус на краю, для которого выполняется неравенство $\alpha_1 \geqslant \alpha_{10}$, и плюс, если у края $\alpha_1 \leqslant \alpha_{10}$.

Замечание. Если на краю оболочки одновременно обращаются в нуль величины k_2 и $1/R_{12}$ (это будет, например, в цилиндрической оболочке на краю, совпадающем с направляющей), то асимптотика величины $T_1^{(e)}$ и $u_2^{(e)}$ изменится следующим образом:

$$T_1^{(e)} = h_*^{1-2s}T_{1*}^{(e)}, \quad u_2^{(e)} = h_*^{1-s}u_{2*}^{(e)}$$

Здесь b следует выбрать равным нулю. Тогда, выражая в условиях для основного напряженного состояния величины краевого эффекта через t, получим

$$T_1^{(p)} + T_1^{(h)} = -\frac{A_1}{A_2}\frac{\partial}{\partial\alpha_2}\frac{1}{A_2}\frac{\partial}{\partial\alpha_2}\frac{R_2'}{A_1}t - 2k_1\frac{A_1}{A_2}\frac{\partial}{\partial\alpha_2}\frac{R_2'}{A_1}t + \frac{1}{R_1'}t$$

$$u_2^{(p)} + u_2^{(h)} = \frac{1+\nu}{Eh}\frac{A_1}{A_2}\frac{\partial}{\partial\alpha_2}\frac{R_2'}{A_1}t - \frac{1}{2Eh}\frac{A_1^2}{A_2}\frac{\partial}{\partial\alpha_2}\frac{R_2'^2}{A_1^2}\left(\frac{1}{R_1'} + \frac{\nu}{R_2'}\right)t$$

Отметим, что в случае свободного и шарнирно опертого краев задача для простого краевого эффекта решается самостоятельно. После того как она решена, получаем граничные условия для основного напряженного состояния.

Положив $a = -2s$, $b = 0$, убедимся, что на жестко защемленном краю граничные условия расчленяются обычным образом

$$u_1^{(p)} + u_1^{(h)} = 0, \quad u_2^{(p)} + u_2^{(h)} = 0$$

$$w^{(e)} = -(w^{(p)} + w^{(h)}), \quad \gamma_1^{(e)} = 0, \quad (\alpha_1 = \alpha_{10})$$

Итак, расчленение достигнуто: получены уравнения основного напряженного состояния, найдены граничные условия для основного напряженного состояния и простого краевого эффекта.

При выводе граничных условий для основного напряженного состояния использовались формулы для величин простого краевого эффекта, выведенные с точностью $h_*^{1/2-s}$. При построении уравнений основного напряженного состояния термоупругих оболочек допущена погрешность (2.4). А так как полная погрешность определяется наибольшей из допущенных, то для общей погрешности построенной теории имеет место формула

(3.12) $$\varepsilon = O\left(h_*^{1/2-s}\right)$$

4. Чтобы определить напряжения в случае ($t_0 \neq 0$, $t = 0$), надо найти усилия и моменты, проинтегрировав безмоментные уравнения и уравнения простого краевого эффекта, а затем следует воспользоваться формулами (1.8). При $t_0 = 0$, $t \neq 0$, как показано ниже, главные напряжения на краю и вдали от края можно вычислить, не решая краевую задачу для безмоментного напряженного состояния.

Формулы для напряжений будем выводить с точностью (3.12).

Рассмотрим свободный край. С учетом (2.1), (3.1), (3.2), значений a и b для напряжения τ_2 на краю получим

$$\tau_2 = \frac{h_*^{-2s}\left(T_{2*}^{(p)} + T_{2*}^{(h)}\right) + h_*^{-1}T_{2*}^{(e)}}{2h} - \frac{3\gamma}{2h^3}G_{2*}^{(e)} - \frac{E\alpha_t}{1-\nu}T$$

Оставляя в последней формуле только главные члены и принимая во внимание (3.4), получим на краю

(4.1) $$\tau_2 = \frac{T_2^{(e)}}{2h} + \nu\frac{3\gamma}{2h^3}t - \frac{E\alpha_t}{1-\nu}T(h_*^{-2}) \qquad \left[\tau_2 = \frac{T_2^{(e)}}{2h} - E\alpha_t T\right] \; (h_*^{-2}).$$

Здесь и далее в квадратных скобках выписаны те формулы перехода, которые для линейного закона изменения температуры по толщине принимают более простой вид. В круглых скобках справа от формулы указан асимптотический порядок напряжений в предположении, что величина t соизмерима с единицей.

Аналогичные рассуждения показывают, что на шарнирно опертом краю напряжение τ_2 определяется по формуле (4.1), а для напряжения τ_{12} формулы перехода примут вид

$$\tau_{12} = \frac{S_{12}^{(h)} + S_{12}^{(e)}}{2h} + \frac{3\gamma}{2h^3} H_{12}^{(e)} \quad (h_*^{-3/2-s})$$

На жестко защемленном краю $\alpha_1 = \alpha_{10}$ напряжения определяются следующим образом:

$$\tau_1 = \tau_2 = -\frac{E\alpha_t}{1-\nu} T \quad (h_*^{-2})$$

$$\tau_{12} = \frac{S_{12}^{(p)} + S_{12}^{(h)}}{2h} \quad (h_*^{-1-2s})$$

Вдали от краев в жесткой оболочке получим

$$\tau_1 = \tau_2 = -\frac{E\alpha_t}{1-\nu} T \quad (h_*^{-2}), \qquad \tau_{12} = \frac{S_{12}^{(p)} + S_{12}^{(h)}}{2h}$$

Напряжения τ_{12} порядка h_*^{-1-2s}, если все края оболочки защемлены, и $O(h_*^{-3/2+s})$, если у оболочки имеется свободный или шарнирно опертый край.

Из полученных формул видно, что наибольшие напряжения (и у края, и вдали от края) определяются температурой и известными величинами простого краевого эффекта. Напряжения, в которые вошли усилия основного напряженного состояния, по крайней мере в $h_*^{-1/2+s}$ раз меньше наибольших напряжений.

Если удовлетвориться определением главных напряжений, нет необходимости решать краевую задачу. Однако для более точного вычисления напряжений решение краевой задачи необходимо. Оно необходимо и в случае, когда интерес представляют перемещения.

Автор благодарен А. Л. Гольденвейзеру за ценные советы и критические замечания.

Поступила 29 III 1976

ЛИТЕРАТУРА

1. *Гольденвейзер А. Л.* О двухмерных уравнениях общей линейной теории тонких упругих оболочек. В сб.: Проблемы гидродинамики и механики сплошной среды. М., «Наука», 1969.
2. *Гольденвейзер А. Л.* Теория упругих тонких оболочек. М., Гостехиздат, 1953.
3. *Гольденвейзер А. Л.* Температурные напряжения в тонких оболочках. Тр. ЦАГИ, 1947, № 618.
4. *Підстригач Я. С.*, *Ярема С. Я.* Температурні напруження в оболонках. Київ, Вид-во АН УРСР, 1961.
5. *Тимошенко С. П.*, *Войновский-Кригер С.* Пластинки и оболочки. М., «Наука», 1966.
6. *Рогачева Н. Н.* Уточненная теория термоупругих оболочек. Тр. X Всес. конференции по теории оболочек и пластин, т. 1. Кутаиси, 1975. Тбилиси, «Мецниереба», 1975.
7. *Антропова Н. Н.*, *Гольденвейзер А. Л.* Погрешности построения основного напряженного состояния и простого краевого эффекта в теории оболочек. Изв. АН СССР. МТТ, 1971, № 5.