Прикладная математика и механика. Том 40, 1976

УДК 539.3

ОПРЕДЕЛЕНИЕ ФОРМ ДВУХСВЯЗНЫХ СЕЧЕНИЙ СТЕРЖНЕЙ МАКСИМАЛЬНОЙ КРУТИЛЬНОЙ ЖЕСТКОСТИ

Л. М. Куршин, П. Н. Оноприенко

(Новосибирск)

Рассматривается задача определения формы поперечного сечения призматического стержня с призматической продольной полостью (отверстием) заданной формы, работающего на кручение, из условия, чтобы при заданной площади поперечного сечения жесткость кручения была максимальной. Для определения искомого контура используется аппарат теории функций комплексной переменной. Приводятся примеры расчета очертаний сечений при отверстиях эллиптической, квадратной и прямоугольной формы.

Задача об определении формы сечения стержня наибольшей крутильной жесткости при заданной площади поперечного сечения рассматривалась как изопериметрическая вариационная задача о стационарном значении некоторого функционала в области с подвижной границей [1]. В качестве естественных условий стационарности функционала, кроме обычных уравнений для функции кручения, получено дополнительное условие: производная от функции кручения по нормали к контуру должна быть постоянна вдоль контура, подлежащего определению. То же дополнительное условие для функции кручения на границе области с экстремальной крутильной жесткостью было получено в работе [2]. Задача определения границы области, занимаемой поперечным сечением стержня, становится тем самым обратной краевой задачей [3], в которой определению подлежит форма замкнутой кривой, ограничивающей область, при избыточном для краевой задачи граничном условии. При разыскании формы внешнего контура сечения стержня с полостью заданного очертания или формы полости при заданной внешней границе области оказывается эффективным применение методов теории функций комплексной переменной.

1. Пусть сечение скручиваемого стержня занимает двухсвязную область Ω, ограниченную контуром $L = L_1 + L_2$, где L_1 — внутренний, а L_2 — наружный контуры, F_1 и F_2 — площади, охватываемые этими контурами, так, что площадь сечения $F = F_2 - F_1$.

При заданной площади сечения F требуется определить внешний контур L_2 так, чтобы крутильная жесткость стержня с цилиндрической полостью заданного очертания L_1 была максимальной. Задача состоит в разыскании контура L_2, ограничивающего область Ω, в которой определена функция $\varphi(x, y)$, удовлетворяющая в области уравнению Пуассона и граничным условиям задачи кручения

$$\Delta\varphi + 2 = 0, \quad \varphi = C_1' \text{ на } L_1, \quad \varphi = C_3' \text{ на } L_2$$

где C_1', C_3' — постоянные, одна из которых может быть задана произвольно. В дальнейшем считаем $C_3' = 0$. Условие Бредта о циркуляции напряжений имеет вид

$$2F_1 + \int_{L_1} \frac{d\varphi}{dn} dS = 0 \tag{1.1}$$

На искомом контуре L_2, кроме того, в соответствии с [1], должно выполняться дополнительное дифференциальное условие, избыточное для обычной задачи кручения

$$d\varphi / dn = C_2'$$

где C_2' — постоянная, подлежащая определению.

Введем регулярную в области Ω функцию $f(z)$ (комплексную функцию кручения [4,5]), так что

$$\operatorname{Re} f(z) = \varphi(x, y) + {}^1/_2 (x^2 + y^2), \quad z = x + iy$$

Задача сводится к разысканию внешней границы L_2 двухсвязной области Ω, внутри которой определена регулярная однозначная в силу (1.1) функция $f(z)$, удовлетворяющая условиям

$$f(t) + \overline{f(t)} = 2C_1' + t\bar{t}, \quad t \in L_1 \tag{1.2}$$

$$f(t) = \frac{1}{2}\left(t\bar{t} + \int_{t_0}^{t} \bar{t}dt - td\bar{t}\right) + iC_2'\int_{t_0}^{t} |dt|, \qquad \operatorname{Im} t_0 = 0,\ t, t_0 \in L_2$$

В дальнейшем полагаем, что область Ω сечения симметрична относительно осей координат.

Обратная краевая задача определения двухсвязной области Ω с известным внутренним L_1 и неизвестным внешним L_2 контурами сводится к разысканию некоторой отображающей функции. Пусть отображения внешностей единичных окружностей γ_1 и γ_2 в плоскостях ξ, ζ, соответственно на внешности контуров L_1 и L_2 в плоскости z осуществляются посредством функций

$$z = A\chi_1(\xi), \quad z = B\chi_2(\zeta) \tag{1.3}$$

$$\chi_1(\xi) = \xi \sum_{i=0}^{k} a_i \xi^{-2i}, \quad \chi_2(\zeta) = \zeta \sum_{i=0}^{k} b_i \zeta^{-2i}, \qquad a_0 = b_0 = 1$$

Здесь A, B — действительные постоянные, определяющие масштаб; в силу симметрии Ω коэффициенты a_i, b_i действительны, функции χ_1, χ_2 содержат нечетные степени ξ, ζ. При заданном внутреннем контуре L_1 коэффициенты a_i известны, а определению подлежит функция χ_2, т. е. величины b_i, характеризующие внешний контур L_2. Относительный размер сечения $\varkappa = A / B$ играет роль параметра.

На L_2 с учетом (1.3) получаем

$$|dt| = \frac{B}{i\tau}\left(a_0 + \sum_{i=1}^{k} a_i(\tau^{2i} + \tau^{-2i})\right)d\tau \tag{1.4}$$

$$\frac{1}{2i}(\bar{t}dt - td\bar{t}) = \frac{B^2}{i\tau}\left(B_{10} + \sum_{i=1}^{k} B_{1i}(\tau^{2i} + \tau^{-2i})\right)d\tau$$

$$t\bar{t} = B^2\left(B_{20} + \sum_{i=1}^{k} B_{2i}(\tau^{2i} + \tau^{-2i})\right)$$

$$B_{1m} = \sum_{j=0}^{k-m}(1-2j-m)b_jb_{m+j}, \quad B_{2m} = \sum_{j=0}^{k-m} b_jb_{j+m}, \quad m = 0, 1, \ldots, k$$

где действительные коэффициенты α_m определяются из системы

$$\sum_{i=m-k}^{k} \alpha_{|i|}\alpha_{|m-i|} - \sum_{i=0}^{k-m}(1-2i)(1-2m-2i)b_ib_{m+i} = 0, \quad m = 0, 1, \ldots, k$$

Граничное условие для функции $f(t)$ на прообразе L_2 — единичной окружности γ_2 в плоскости ζ — с учетом (1.2) имеет вид

$$f(t(\tau)) = B^2\left(k_0 \ln\tau + g\left(\frac{t}{B}\right)\right), \quad g\left(\frac{t}{B}\right) = \sum_{j=-k}^{k} m_j\tau^{2j}, \quad |\tau| = 1 \tag{1.5}$$

$$k_0 = \alpha_0C_2 + B_{10}, \quad C_2 = C_2'/B, \quad m_0 = {}^1/_2\, B_{20}, \quad m_j = {}^1/_2\,(B_{2|j|} + (C_2\alpha_{|j|} + B_{1|j|})/j), \quad j = \pm1, \pm2, \ldots \pm k$$

Из требования однозначности функции $f(z)$ получаем $C_2 = -B_{10}/\alpha_0$.

2. Введем интеграл типа Коши

$$F(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{L_2}\frac{g(t)}{t-z}\,dt \tag{2.1}$$

Здесь и в дальнейшем z, t обозначают безразмерные комплексные координаты z/B, t/B.

Предельные значения интеграла (2.1) связаны формулами Сохоцкого — Племеля [4]

$$F^+(t_0) - F^-(t_0) = g(t_0), \quad F^+(t_0) + F^-(t_0) = \frac{1}{\pi i}\int_{L_2}\frac{g(t)}{t-t_0}\,dt \tag{2.2}$$

$$t, t_0 \in L_2$$

поэтому с учетом первой из формул (2.2) можно, следуя [6], ввести функцию $f_0(z)$, аналитически продолжимую через L_2

$$B^2f_0(z) = \begin{cases} f(Bz) - B^2F^+(z) & \text{при } z \in \Omega \\ -B^2F^-(z) & \text{при } z \text{ вне } L_2 \end{cases}$$

Функция $f_0(z)$ аналитична вне L_1 и обращается в нуль на бесконечности.

Пусть обращение функции $\chi_2(\zeta)$ имеет вид

$$\zeta = z\sum_{i=0}^{\infty}\beta_iz^{-2i}, \quad \beta_i = \sum_{j=\max(0,\, i+2k(1-i))}^{\min(k,\, i)}(1-2j)b_{i-j}^{2i-2}b_j \tag{2.3}$$

$$\beta_0 = 1, \quad j = 1, 2, \ldots$$

где величины типа $b_{i-j}^{(2i-2)}$ являются коэффициентами степеней многочленов по какой-либо переменной (z, ζ, ξ). Например

$$\left(\sum_{i=0}^{k} b_i\zeta^{-2i}\right)^m = \sum_{j=0}^{km} b_j^{(m)}\zeta^{-2j}, \quad b_j^{(m)} = \sum_{i=\max(0,\, j+k(1-m))}^{\min(k,\, j)} b_ib_{j-i}^{(m-1)}$$

$$b_0^{(m)} = 1, \quad j, m \geqslant 1$$

С учетом формул Коши и обращения (2.3) вычислим значение $F(z)$ для $z \in \Omega$. В области сечения Ω имеем представления для функции $f(Bz)$

(2.4)
$$f(Bz) = B^2\left(f_0(z) + \sum_{i=0}^{k} n_i z^{2i}\right)$$
$$n_i = \sum_{j=0}^{k-i} m_{i+j}\beta_j^{(2i+2j)}, \quad i = 0, 1, \ldots k$$

3. Функция кручения $f(Bz)$, регулярная в области Ω, выражается через функцию $f_0(z)$, регулярную вне L_1, и равную нулю на бесконечности по формуле (2.4). Из (1.3) получаем граничное условие для функции $f_0(z)$ на прообразе L_1 — единичной окружности γ_1

(3.1)
$$f_0(t) + \overline{f_0(t)} = -2N_0 + 2C_1 + A_{20}\varkappa^2 + \sum_{i=1}^{k^*}(A_{2i}\varkappa^2 - N_i)(\sigma^{2i} + \sigma^{-2i}$$
$$|\sigma| = 1, \quad C_1 = C_1' / B^2$$
$$N_0 = \sum_{i=0}^{k} n_i\varkappa^{2i}a_i^{(2i)}, \quad N_m = \sum_{i=1}^{k} n_i\varkappa^{2i}a_{m+i}^{(2i)} + \sum_{i=m}^{k} n_i\varkappa^{2i}a_{i-m}^{(2i)}$$
$$m = 1, 2, \ldots k$$

Звездочка при индексе k в (3.1) указывает на удержание в разложении необходимых степеней σ лишь до данного индекса.

Функция $f_0(z) = f_0(\varkappa\chi_1(\xi))$ (обозначим ее через $f_0(\xi)$) с учетом сказанного имеет вид

(3.2)
$$f_0(\xi) = \sum_{i=1}^{k^*}\lambda_i\xi^{-2i}, \quad \lambda_i = A_{2i}\varkappa^2 - N_i, \quad i = 1, 2, \ldots k$$

а постоянная C_1 определяется выражением $C_1 = N_0 - {}^1/_2\, A_{20}\varkappa^2$. Величины A_{2i} в (3.1), (3.2) определяются аналогично B_{2i} заменой коэффициентов b_j на a_j.

Обращение функции $\chi_1(\xi)$ запишем в виде

(3.3)
$$\xi = z\varkappa^{-1}\sum_{i=0}^{\infty}\rho_i(z\varkappa^{-1})^{-2i}, \quad \rho_i = \sum_{j=\max(0,\, i+2k(1-i))}^{\min(k,\, i)}(1-2j)\, a_{i-j}^{(2i-2)}a_j$$
$$\rho_0 = 1, \quad i = 1, 2 \ldots$$

Имеем

(3.4)
$$\xi^{-1} = \varkappa z^{-1}\sum_{i=0}^{k^*}\nu_i(\varkappa z^{-1})^{2i}, \quad \nu_i = -\sum_{j=0}^{i-1}\rho_{i-j}\nu_j, \quad \nu_0 = 1, \quad i = 1, 2, \ldots k$$

В области вне L_1 (включая и сам контур) функция $f_0(z)$ имеет вид

$$f_0(z) = \sum_{i=1}^{k^*} n_{-i}z^{-2i}$$
$$n_{-i} = \varkappa^{2i}\sum_{j=1}^{i}\lambda_j\nu_{i-j}^{(2j)}, \quad i = 1, 2, \ldots k$$

а в области сечения Ω для комплексной функции кручения получаем представление

$$f(Bz) = B^2\sum_{i=-k^*}^{k} n_i z^{2i}$$

В плоскости ζ имеем аналогично (3.4)

$$z^{-1} = \zeta^{-1} \sum_{i=0}^{k^*} \mu_i \zeta^{-2i}$$

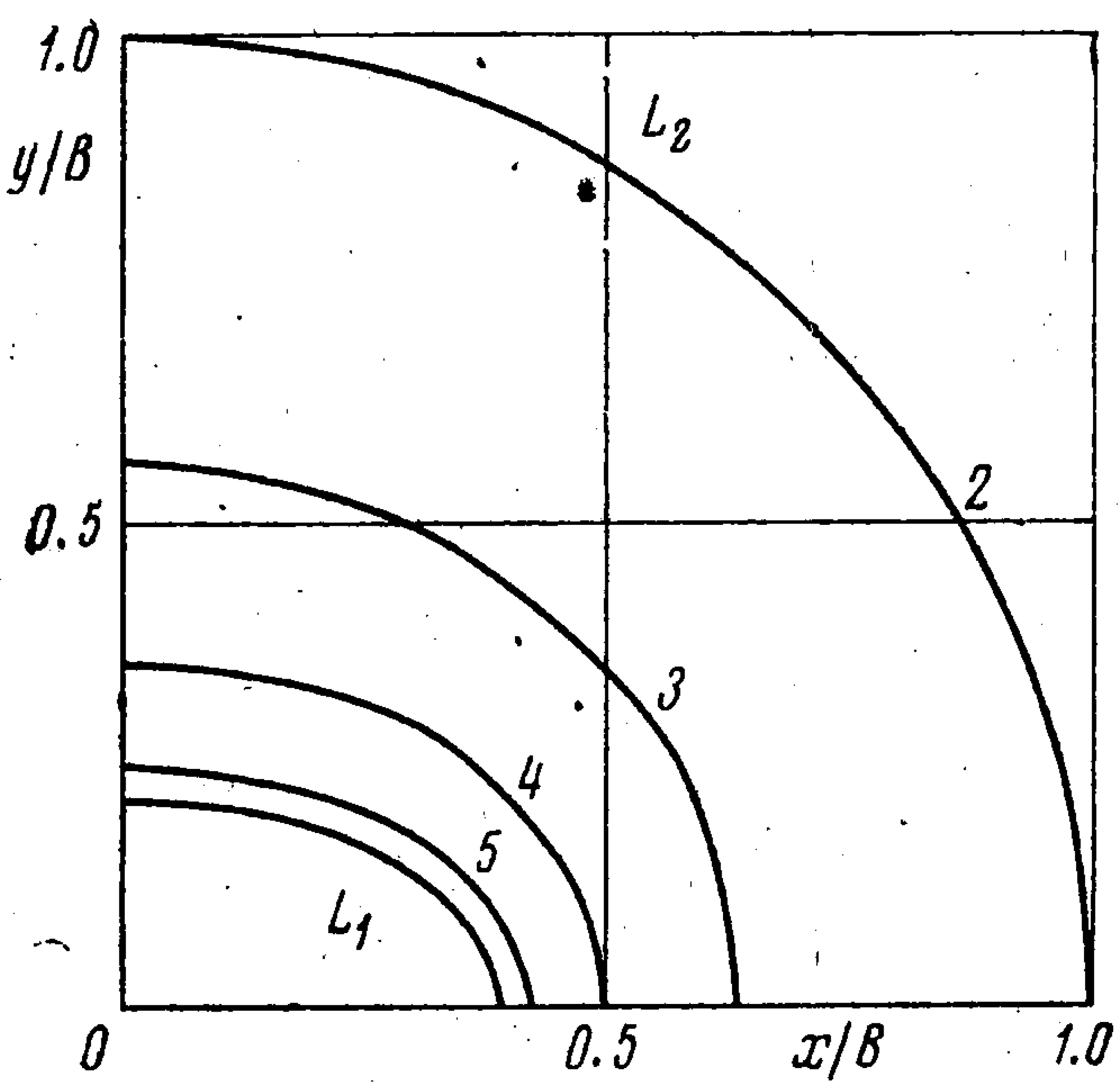
Возвращаясь к граничному условию (1.5) на γ_2, получаем тождества при неотрицательных степенях τ^{2p}

$$\sum_{i=p}^{k} n_i b_{i-p}^{(2i)} - m_p \equiv 0, \quad p = 0, 1, \ldots k$$

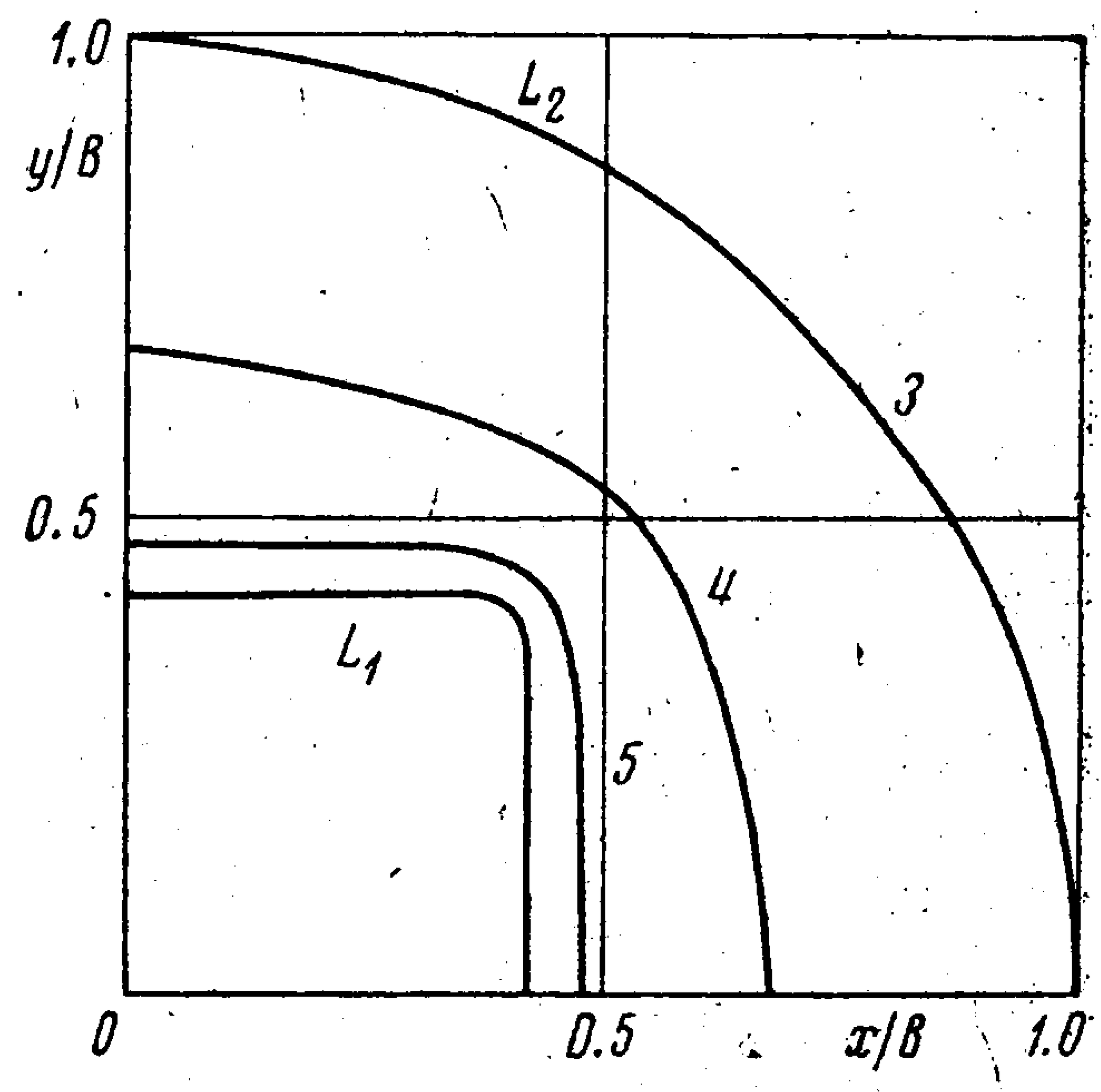
а при отрицательных степенях τ^{-2p} имеем k нелинейных алгебраических уравнений относительно b_i

$$\sum_{i=1}^{p} n_{-i} \mu_{p-i}^{(2i)} + \sum_{i=1}^{k} n_i b_{i+p}^{(2i)} - m_{-p} = 0, \quad p = 1, 2, \ldots k \tag{3.5}$$

4. Уравнения (3.5) выполняются: 1) при $b_i = 0$, $\varkappa = 0$ — жесткость сплошного стержня кругового сечения максимальна; 2) при $a_i = b_i = 0$, $\varkappa \neq 0$ — жесткость пустотелого стержня максимальна, если сечение имеет вид кругового кольца.



Фиг. 1



Фиг. 2

Покажем, что при $\varkappa \to 1$ тонкостенное сечение стержня максимальной крутильной жесткости можно рассматривать как сечение с постоянной толщиной стенки.

Согласно технической теории кручения тонкостенных стержней жесткость кручения D равна

$$D = 4\Phi^2 \left(\oint_L h^{-1}(s)\, ds \right)^{-1}$$

где $h(s)$ — толщина стенки, s — дуговая координата срединного контура L сечения, охватывающего площадь Φ.

Максимум функционала D при дополнительном условии

$$\oint_L h(s)\, ds = F \quad \left(F = \text{const}, \ \Phi = F_1 + \frac{1}{2} F \right)$$

достигается при $h(s) = \text{const}$.

Тот же результат следует и из уравнений задачи (3.5). Положив в (1.3) $\xi = \zeta = e^{i\theta}$, имеем параметрическое задание границ области $\Omega = (t_1 \in L_1,\ t_2 \in L_2)$. Орт n внешней нормали к контуру L_2 равен

$$n = -i dt_2 \,/\, | dt_2 |$$

При достаточно малой толщине h стенки (L_1 и L_2 близки) с точностью до малых первого порядка

$$h = \operatorname{Re} n \, (\bar{t}_2 - \bar{t}_1)$$

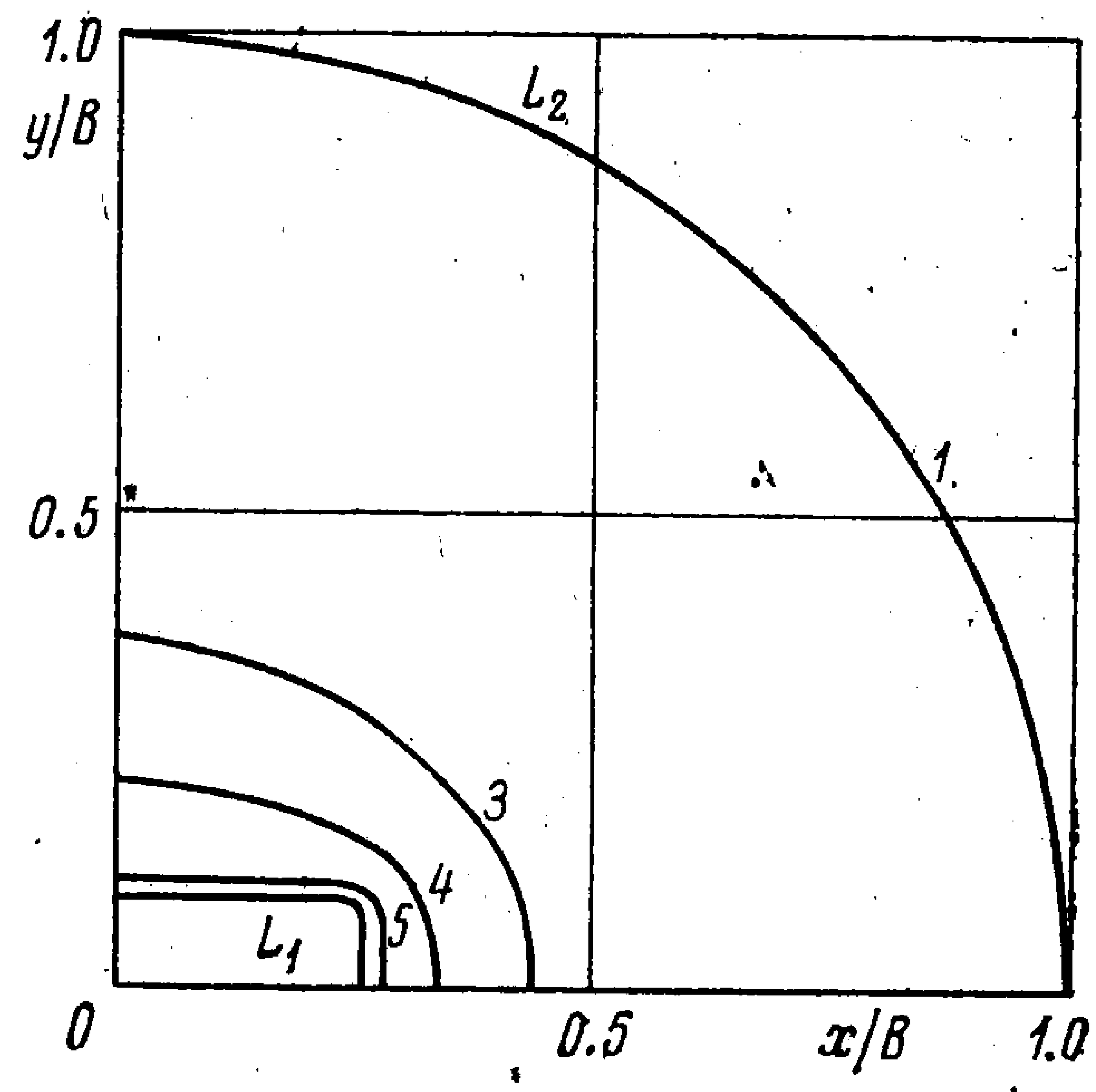
С учетом (1.4) получаем

$$h = B \sum_{m=0}^{k^*} c_m \cos 2m\theta$$

Полагая $a_i = b_i - \Delta_i$, $\varkappa = 1 - \Delta$ и линеаризуя уравнения системы (3.5) относительно величин Δ_i, Δ, находим с точностью до малых первого порядка

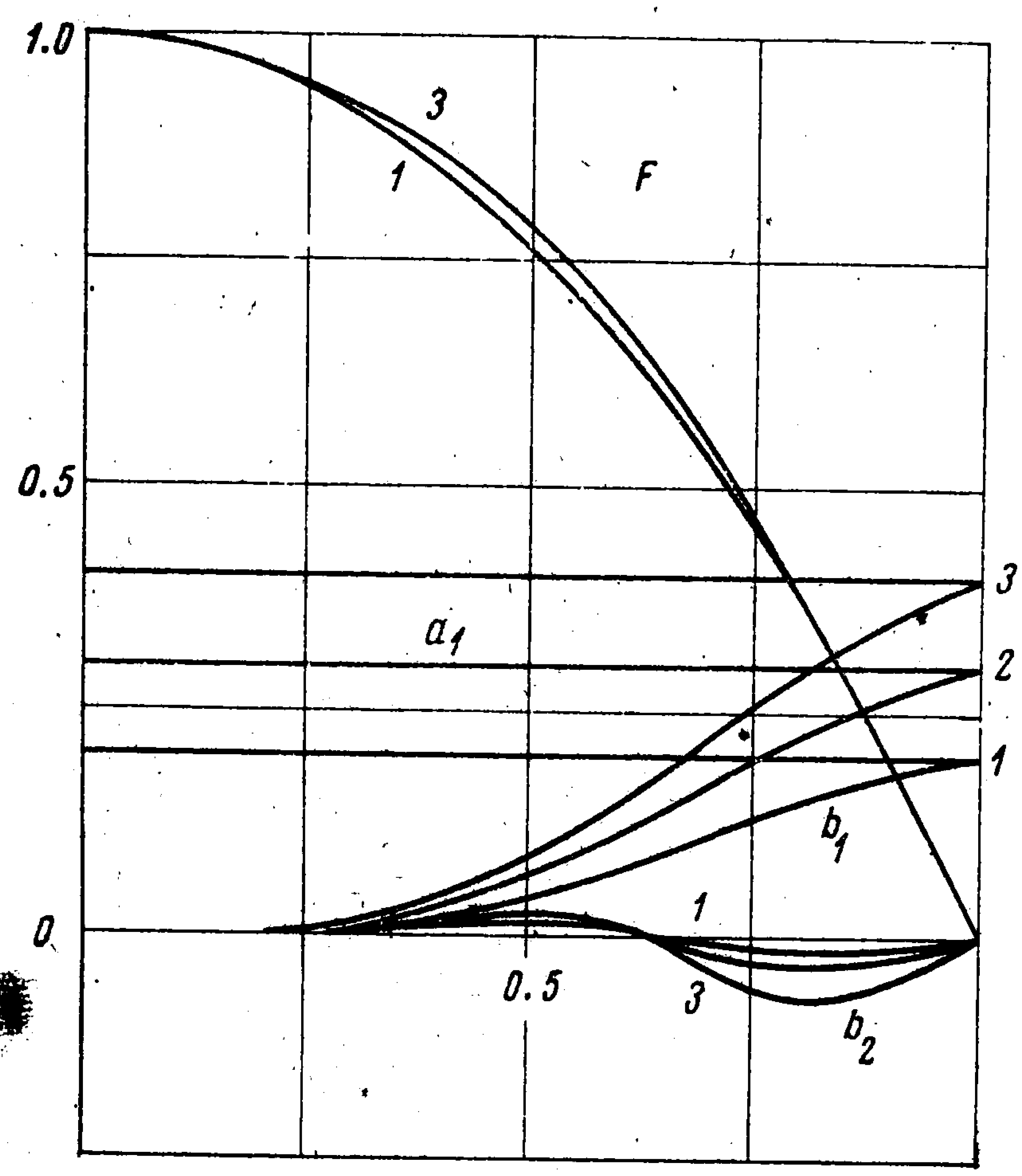
$$c_m = 0, \quad m = 1, 2, \ldots, k, h = Bc_0$$

т. е. с точностью до малых первого порядка толщина стенки сечения постоянна.



Фиг. 3

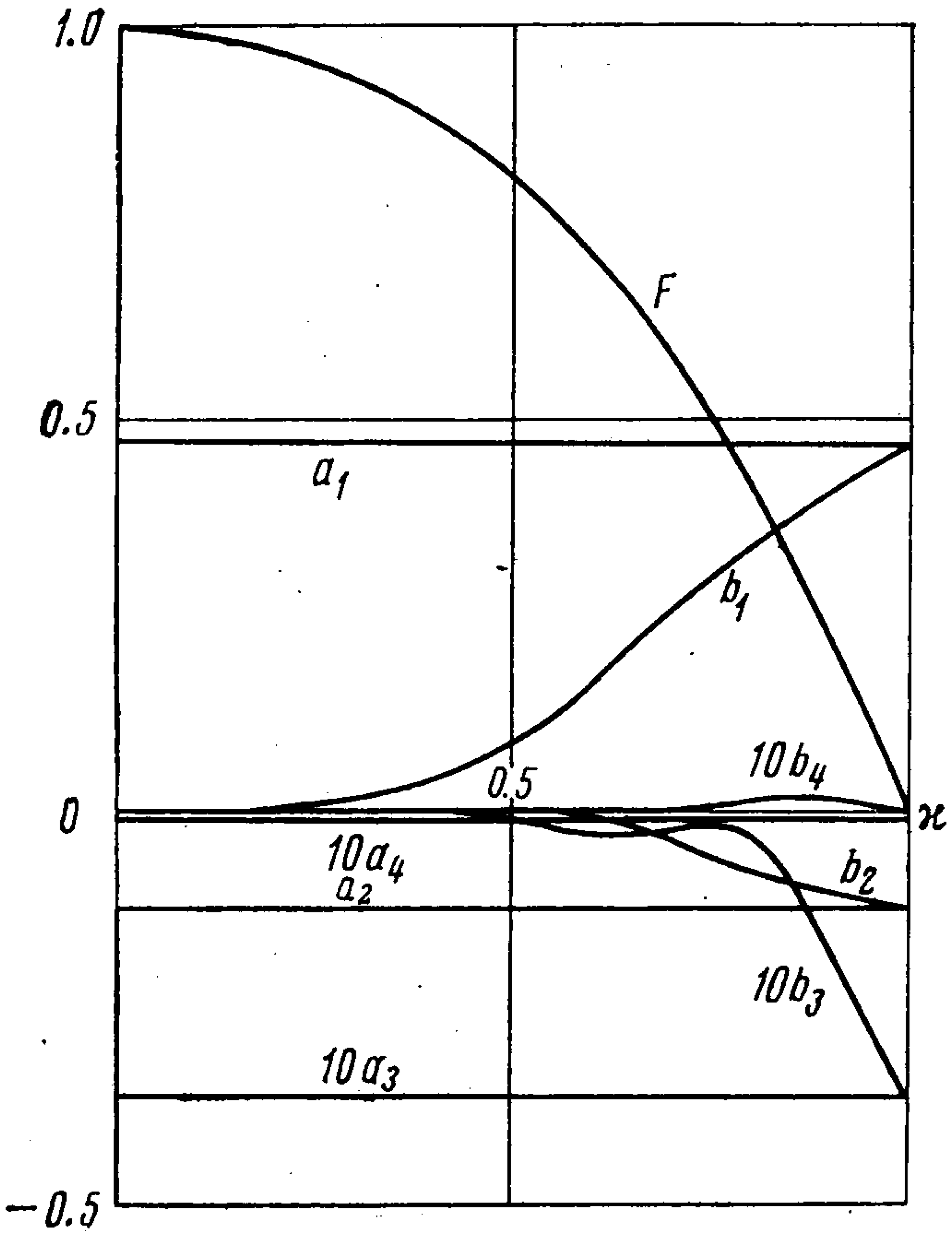
5. Для разыскания неизвестного контура L_2 имеем систему k нелинейных уравнений (3.5) относительно коэффициентов b_i при известных величинах a_j и $\varkappa$. Эта система решалась методом Ньютона. Производные левых частей (3.5) по неизвестным b_i находились численно. В качестве начального приближения принималось $\varkappa = 1$, $a_i = b_i$ и с шагом $v = -0.01$ по $\varkappa$ было получено решение в диапазоне $0 < \varkappa < 1$. Внутренний контур L_1 задавался в виде эллипса ($a_1 = 0.1, 0.2, \ldots, 0.9$; $a_i = 0$, $i = 2, 3, \ldots, k$)



Фиг. 4

и в виде прямоугольника с различным соотношением сторон λ ($\lambda = 1, 2, \ldots, 10$). Значения коэффициентов функции χ_1 (ξ) брались из работы [7].

Очертания внешних контуров сечения представлены для случаев, когда внутренний контур L_1 — эллипс при $a_1 = 0.3$ (фиг. 1), квадрат (фиг. 2), прямоугольник с $\lambda = 3$ (фиг. 3). Кривые *1—5* соответствуют искомому контуру L_2 при значениях параметра $\varkappa$, равных 0.2, 0.3, 0.5, 0.7, 0.9. При малых значениях $\varkappa$ наружный контур близок к окружности (в случае эллиптического отверстия при $\varkappa = 0.3$), а при значениях $\varkappa$, близких к единице, сечение обладает почти постоянной толщиной стенки ($\varkappa = 0.9$).



Фиг. 5

На фиг. 4 даны графики величин a_i, b_i ($k = 2$) в зависимости от $\varkappa$. Кривые *1*, *2*, *3* соответствуют значениям $a_1 = 0.2$, 0.3, 0.4. На фиг. 5 представлены аналогичные кривые для прямоугольного отверстия ($\lambda = 3$). В разложениях $\chi_1(\xi)$, $\chi_2(\xi)$ удержано по четыре коэффициента.

Решение сходится по k достаточно быстро. Так, для сечений с квадратным и прямоугольным ($\lambda = 3$) отверстиями при $\varkappa = 0.7$ внешние контуры L_2 практически совпадают для $k = 2$ и $k = 4$.

Аналогичные расчеты были проделаны для стержня с полостью в виде правильного треугольника.

Поступила 20 I 1976

ЛИТЕРАТУРА

1. *Куршин Л. М.* К задаче об определении формы сечения стержня максимальной крутильной жесткости. Докл. АН СССР, 1975, т. 223, № 3.
2. *Баничук Н. В.* Об одной вариационной задаче с неизвестной границей и определении оптимальных форм упругих тел. ПММ, 1975, т. 39, вып. 6.
3. *Тумашев Г. Г., Нужин М. Т.* Обратные краевые задачи и их приложения. Изд-во Казанск. ун-та, 1965.
4. *Мусхелишвили Н. И.* Некоторые основные задачи математической теории упругости. М., «Наука», 1966.
5. *Арутюнян Н. Х., Абрамян Б. Л.* Кручение упругих тел. М., Физматгиз, 1963.
6. *Шерман Д. И.* Про один метод розв'язання деяких задач кручения, згину і плоскої теорії пружності для неоднозв'язних областей. Прикл. механ. 1957, т. 3, вип. 4.
7. *Гурьянов В. М., Космодамианский А. С.* О напряженном состоянии изотропной пластины, ослабленной криволинейным отверстием. Инж. ж., 1964, т. 4, вып. 3