Прикладная математика и механика. Том 40, 1976

УДК 539.3

О ПРЕДСТАВЛЕНИИ ГРАДИЕНТА ПЕРЕМЕЩЕНИЯ ИЗОТРОПНОГО УПРУГОГО ТЕЛА ЧЕРЕЗ ТЕНЗОР НАПРЯЖЕНИЙ ПИОЛА

Л. М. Зубов

(Ростов-на-Дону)

Рассматриваемый вопрос связан с вариационным принципом дополнительной энергии в нелинейной теории упругости, в котором варьируются статически возможные поля несимметричного тензора напряжений Пиола [1]. В работе [1] был предложен способ выражения градиента деформации через тензор напряжений Пиола для изотропного упругого тела. Впоследствии принцип дополнительной энергии и вопрос представления градиента деформации через тензор напряжений Пиола обсуждался в [2, 3], причем были приведены [2] примеры использования принципа дополнительной энергии и рассмотрен [3] случай анизотропного тела. Эти исследования обнаружили неоднозначность представления градиента деформации через тензор напряжений Пиола, однако характер и природа этой неоднозначности не были проанализированы с достаточной полнотой.

Ниже дается анализ указанного представления для произвольного изотропного упругого тела. На основе одного определяющего неравенства и полярного разложения тензора Пиола доказывается, что изучаемое представление имеет, вообще говоря, четыре ветви. Выяснен механический смысл и природа этой неоднозначности. Установлено, что если углы поворота материальных волокон при деформации не являются чрезмерно большими, то реализуется только одна ветвь из четырех. Изучены особые случаи, в которых характер неоднозначности более сложен. Отмечается, что во многих практических задачах представление градиента перемещения через тензор напряжений Пиола оказывается однозначным.

1. Примем следующие обозначения для тензорных величин, описывающих напряженно-деформированное состояние сплошной среды [4]: C — тензор-градиент радиус-вектора точки деформированного тела, называемый также градиентом деформации, $U = (C \cdot C^T)^{1/2}$ — положительно определенный квадратный корень из меры деформации Коши, $A = U^{-1} \cdot C$ — тензор поворота главных осей деформации, D — несимметричный тензор напряжений Пиола, $Q = D \cdot C^{-1}$ — симметричный энергетический тензор напряжений. Для изотропного упругого тела при условии, что деформация отсчитывается от неискаженного состояния, тензор Q является изотропной функцией тензора U, так что главные оси Q и U совпадают. Поэтому тензор S, определяемый соотношением

$$S = D \cdot A^T = Q \cdot U \tag{1.1}$$

в случае изотропного материала симметричен и также является изотропной функцией U

$$S = S(U) \tag{1.2}$$

Если известна обратная к (1.2) зависимость $U = U(S)$, то вопрос представления градиента деформации C через тензор D сводится к нахождению выражения $A(D)$ тензора поворота через тензор напряжений Пиола. В самом деле, из (1.1) имеем

$$C = U \cdot A = U(S) \cdot A = U[D \cdot A^T(D)] \cdot A(D) \tag{1.3}$$

Однозначную разрешимость уравнения (1.2) относительно тензора U можно доказать, если принять, что материал подчиняется определяющему *GCN*-неравенству [5]. Это неравенство накладывает следующее ограничение на функцию отклика $D(C)$ упругого материала:

$$[D(C') - D(C)] \cdot\cdot (C'^T - C^T) > 0, \quad C' = C \cdot P \tag{1.4}$$

для любого неособого тензора C и любого симметричного, положительно определенного и отличающегося от единичного тензора P. Неравенство (1.4) можно переписать в виде

$$[Q(C') \cdot C' - Q(C) \cdot C] \cdot\cdot (C'^T - C^T) > 0 \tag{1.5}$$

Возьмем в качестве C произвольный симметричный положительно определенный тензор P', соосный с P. Тогда будем иметь

$$C = U = P', \quad C' = U' = P' \cdot P \tag{1.6}$$

Из (1.5) и (1.6) получаем для любых соосных, положительно определенных и не совпадающих между собой U' и U

$$[Q(U') \cdot U' - Q(U) \cdot U] \cdot\cdot (U' - U) > 0 \tag{1.7}$$

или согласно (1.1)

$$[S(U') - S(U)] \cdot\cdot (U' - U) > 0 \tag{1.8}$$

Учитывая соосность тензоров S и U и представив их в базисе главных направлений, вместо (1.8) получим

$$\sum_{n=1}^{3} [S_n(U_1', U_2', U_3') - S_n(U_1, U_2, U_3)](U_n' - U_n) > 0 \tag{1.9}$$

$$S = \sum_{n=1}^{3} S_n \mathbf{e}_n \mathbf{e}_n, \quad U = \sum_{n=1}^{3} U_n \mathbf{e}_n \mathbf{e}_n$$

Неравенство (1.9) показывает, что если $U_n' \neq U_n$ хотя бы для одного n, то $S_m' \neq S_m$ хотя бы для одного m. Это значит, что разным значениям U соответствуют разные значения S, т. е. $U(S)$ — однозначная функция.

Обратимся к определению зависимости $A(D)$ для изотропного материала. Задача сводится к нахождению тензора поворота из уравнения, выражающего свойство симметричности тензора S

$$D \cdot A^T = A \cdot D^T \tag{1.10}$$

Так как деформация сплошной среды устанавливает взаимнооднозначное соответствие между координатами точек деформированного и недеформированного тела, градиент деформации C — неособый тензор, при этом систему координат можно всегда выбрать так, чтобы $\det C$ был положительным. Из теоремы о полярном разложении теперь следует, что $\det A = 1$, т.е. A — собственно ортогональный тензор. Итак, физический смысл имеют только собственно ортогональные решения уравнения (1.10).

Как известно [6], любой тензор второго ранга можно представить в виде произведения симметричного неотрицательного тензора на некоторый ортогональный тензор. Для тензора напряжений Пиола имеем

$$\mathrm{D} = \mathrm{K}\cdot\mathrm{N} \tag{1.11}$$

где N — ортогональный тензор, а K — неотрицательный квадратный корень из тензора $\mathrm{D}\cdot\mathrm{D}^T$, определяемый по заданию тензора D единственным образом. Из (1.10) и (1.11) получаем

$$\mathrm{K}\cdot\mathrm{H} = \mathrm{H}^T\cdot\mathrm{K} \tag{1.12}$$

где ортогональный тензор H равен

$$\mathrm{H} = \mathrm{N}\cdot\mathrm{A}^T \tag{1.13}$$

Дальнейший анализ зависит от характера собственных значений тензора $\mathrm{D}\cdot\mathrm{D}^T$.

2. Рассмотрим сначала случай, когда тензор D, а следовательно и K, неособый. Тогда все собственные значения K будут положительны, а ортогональный тензор N находится единственным образом по формуле

$$\mathrm{N} = \mathrm{K}^{-1}\cdot\mathrm{D} \tag{2.1}$$

Из уравнения (1.12) следует

$$(\mathrm{K}\cdot\mathrm{H})^2 = \mathrm{K}^2 \quad \text{или} \quad \mathrm{K}\cdot\mathrm{H} = \sqrt{\mathrm{K}^2} = \sqrt{\mathrm{D}\cdot\mathrm{D}^T} \tag{2.2}$$

Согласно (1.12) представляют интерес только симметричные квадратные корни из тензора K^2, общее выражение для которых, очевидно, имеет вид

$$\mathrm{K}\cdot\mathrm{H} = \pm k_1\mathbf{e}_1\mathbf{e}_1 \pm k_2\mathbf{e}_2\mathbf{e}_2 \pm k_3\mathbf{e}_3\mathbf{e}_3 \tag{2.3}$$

где $\mathbf{e}_s$ — орты главных осей тензора K, k_s — собственные значения K. Так как тензор K неособый, из (2.3) находим

$$\mathrm{H} = \pm\, \mathbf{e}_1\mathbf{e}_1 \pm \mathbf{e}_2\mathbf{e}_2 \pm \mathbf{e}_3\mathbf{e}_3 = \mathrm{H}^T \tag{2.4}$$

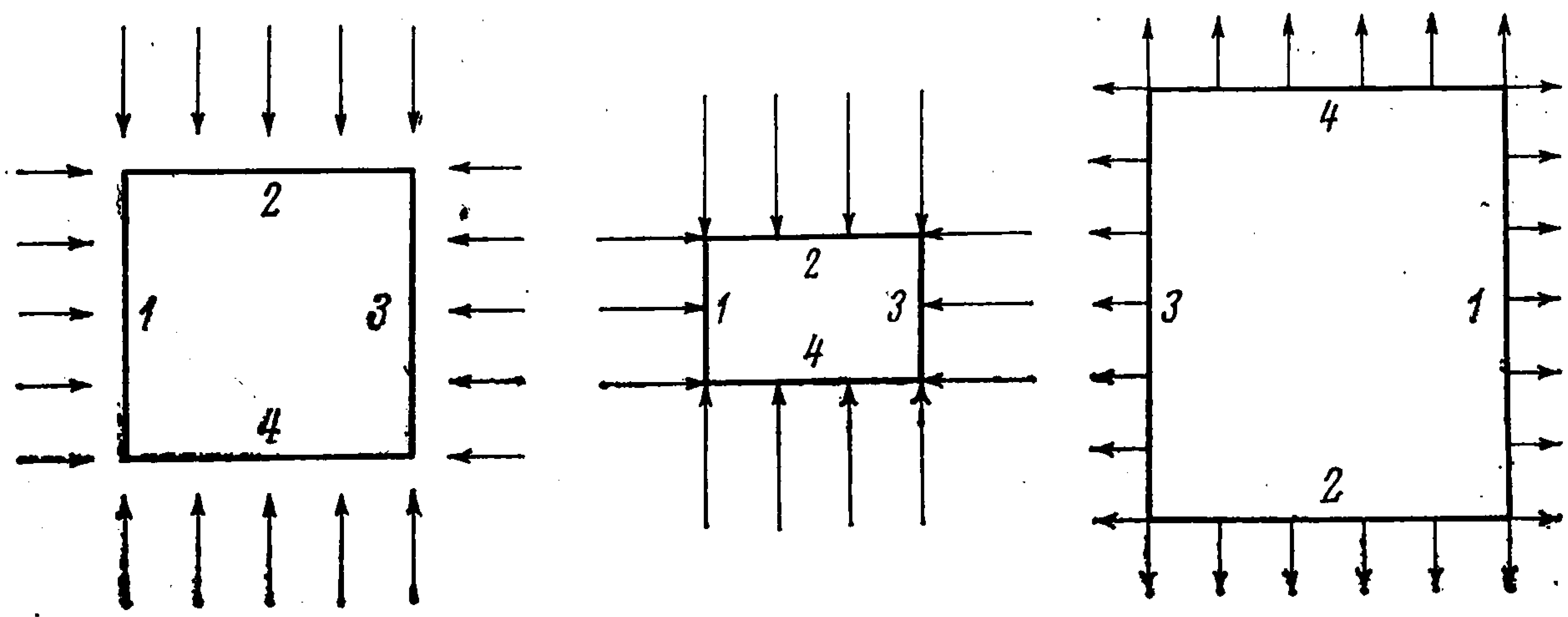
Если собственные значения K простые, то диады $\mathbf{e}_s\mathbf{e}_s$ (не суммировать по s!) определены однозначно и для ортогонального тензора H существует восемь решений. Из (2.4), (1.13), (2.1) найдем

$$\mathrm{A} = \mathrm{H}\cdot\mathrm{K}^{-1}\cdot\mathrm{D} \tag{2.5}$$

Согласно (2.4) четыре значения тензора H имеют детерминант, равный единице, а для остальных четырех $\det \mathrm{H} = -1$. Поэтому только четыре решения удовлетворяют условию $\det \mathrm{A} = 1$, причем соответствующие тензоры H надо выбрать так, чтобы знак $\det \mathrm{H}$ совпадал со знаком $\det \mathrm{D}$.

Таким образом, в наиболее общем случае простых и отличных от нуля собственных значений тензора $\mathrm{D}\cdot\mathrm{D}^T$ представление тензора поворота через тензор напряжений Пиола имеет четыре ветви, отличающиеся одна от другой поворотом на 180° вокруг каждой из главных осей тензора K. Эта неоднозначность носит принципиальный характер и имеет механический смысл.

Представим себе параллелепипед из упругого материала, подвергнутый произвольной аффинной деформации. Исходя из физического смысла тензора напряжений Пиола [4], можно видеть, что задание тензора D эквивалентно заданию равномерно распределенных по граням параллелепипеда мертвых внешних сил. Неоднозначность деформации обусловлена природой мертвых сил, не меняющих своего направления в про-



странстве, и проиллюстрирована на фигуре в частном случае прямоугольного параллелепипеда, нагруженного нормальными силами. Слева изображено недеформированное состояние (силы еще не приложены), в центре и справа — два из возможных положения равновесия. В каждом из этих состояний равновесия, существование которых очевидно, силы, приближенные, например, к грани *1*, имеют одно и то же направление.

Один частный случай описанного здесь явления неоднозначности отмечен при других обстоятельствах в книге [5] как пример неединственности равновесия упругого тела при мертвых внешних силах.

Пусть A_1 — некоторое собственно ортогональное решение уравнения (1.10). Его всегда можно представить в виде

$$A_1 = e_1e_1' + e_2e_2' + e_3e_3' \tag{2.6}$$

где e_s' — некоторый ортонормированный базис. Как было показано выше, наряду с этим решением существуют решения вида

$$A_r = H_r \cdot A_1 \quad (r = 1, 2, 3, 4) \tag{2.7}$$

$$H_1 = e_1e_1 + e_2e_2 + e_3e_3, \quad H_2 = e_1e_1 - e_2e_2 - e_3e_3 \tag{2.8}$$

$$H_3 = -e_1e_1 + e_2e_2 - e_3e_3, \quad H_4 = -e_1e_1 - e_2e_2 + e_3e_3$$

Справедливо следующее утверждение. Если один из собственно ортогональных тензоров вида (2.7) удовлетворяет неравенству

$$\mathrm{tr}A > {}^5/_3 \tag{2.9}$$

то остальные три ему не удовлетворяют.

Допустим для определенности, что $\mathrm{tr}\, A_1 > {}^5/_3$. Согласно (2.6) имеем

$$e_1 \cdot e_1' + e_2 \cdot e_2' + e_3 \cdot e_3' > {}^5/_3 \tag{2.10}$$

Вместе с тем очевидно, что

$$e_1 \cdot e_1' + e_2 \cdot e_2' + e_3 \cdot e_3' \leqslant 3 \tag{2.11}$$

Так как $e_1 \cdot e_1' \leqslant 1$, из (2.10) следует, что

$$-2\,(e_2 \cdot e_2' + e_3 \cdot e_3') < -{}^4/_3 \tag{2.12}$$

Складывая неравенства (2.11) и (2.12), получаем

$$e_1 \cdot e_1' - e_2 \cdot e_2' - e_3 \cdot e_3' < {}^5/_3 \tag{2.13}$$

т. е. тензор A_2 условию (2.9) не удовлетворяет. Аналогично проводится доказательство для A_3 и A_4.

Видно, что константа $^5/_3$ в неравенстве (2.6) наилучшая, она не может быть уменьшена.

Воспользуемся представлением собственно ортогонального тензора через вектор конечного поворота [4]

$$\mathbf{A} = (\mathbf{E} - \mathbf{kk}) \cos \varphi + \mathbf{kk} - \mathbf{k} \times \mathbf{E} \sin \varphi \tag{2.14}$$

Здесь $\mathbf{k}$ — единичный вектор, задающий направление оси поворота, φ — угол поворота. Из (2.14) имеем

$$2 \cos \varphi = \operatorname{tr} \mathbf{A} - 1$$

Теперь видим, что неравенство (2.9) сводится к следующему: $\cos \varphi > > {}^1/_3$, откуда

$$| \varphi | < \varphi^*, \quad \varphi^* \approx 70^\circ \tag{2.15}$$

Следовательно, неравенство (2.9) геометрически означает, что угол конечного поворота триеда главных осей деформации не превосходит 70°. Таким образом, если известно, что углы поворотов материальных волокон при деформации не слишком велики, представление градиента деформации через тензор напряжений Пиола с привлечением неравенства (2.9) оказывается однозначным, ибо условие (2.9) выделяет единственное решение из четырех возможных.

Перейдем к случаю кратных, неравных нулю собственных значений $\mathbf{K}$. Если собственное значение трехкратное, т. е. $\mathbf{D} \cdot \mathbf{D}^T$ — шаровой тензор, то в формуле (2.4) в качестве векторов $\mathbf{e}_s$ можно взять любой ортонормированный базис. Другими словами, в этом случае тензор $\mathbf{H}$ будет произвольным симметричным ортогональным тензором. Общее выражение такого тензора с положительным или отрицательным детерминантом имеет вид

$$\mathbf{H} = \pm (\mathbf{E} - \mathbf{ee}) + \mathbf{ee} \operatorname{sign} (\det \mathbf{D}) \tag{2.16}$$

где $\mathbf{E}$ — единичный тензор, $\mathbf{e}$ — произвольный единичный вектор. Искомый тензор $\mathbf{A}$ определяется по формуле (2.5).

Таким образом, если тензор $\mathbf{K}$ шаровой, то тензор поворота $\mathbf{A}$ определяется из уравнения (1.10) лишь с точностью до поворота на 180° вокруг любой оси.

В случае двукратного собственного значения $k_1 = k_2$ диада $\mathbf{e}_3\mathbf{e}_3$ определена однозначно, а в качестве векторов $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$ можно взять любой ортонормированный базис в плоскости, перпендикулярной $\mathbf{e}_3$. Теперь в представлениях (2.16) вектор $\mathbf{e}$ не вполне произвольный. Он может быть равен либо $\mathbf{e}_3$, либо $\mathbf{e}_3 \times \mathbf{h} / \sqrt{1 - (\mathbf{e}_3 \cdot \mathbf{h})^2}$, где $\mathbf{h}$ — любой единичный вектор, не совпадающий с $\mathbf{e}_3$.

Итак, в случае кратных корней характеристического уравнения тензора $\mathbf{D} \cdot \mathbf{D}^T$ неоднозначность представления $\mathbf{A}(\mathbf{D})$ имеет континуальный характер, так как выражение $\mathbf{A}(\mathbf{D})$ содержит неопределенные параметры. Эта неоднозначность допускает такую же физическую интерпретацию, какая была дана для случая простых корней.

3. Обратимся к решению уравнения (1.10) в случае, когда $\det \mathbf{D} = 0$. Предположим, что спектр тензора $\mathbf{K}$ состоит из одного нулевого числа $k_3 = 0$

и двух различных ненулевых k_1, k_2. Представление тензора K имеет вид

$$\mathrm{K} = k_1 \mathbf{e}_1\mathbf{e}_1 + k_2 \mathbf{e}_2\mathbf{e}_2 \tag{3.1}$$

причем диады $\mathbf{e}_1\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2\mathbf{e}_2$ определены однозначно.

Формула (2.1) теперь неприменима, а ортогональный сомножитель N в полярном разложении тензора D не единственный. Нетрудно убедиться в том, что общее его выражение таково:

$$\mathrm{N} = \mathbf{e}_1\mathbf{e}_1' + \mathbf{e}_2\mathbf{e}_2' \pm \mathbf{e}_3\mathbf{e}_3' \tag{3.2}$$

где единичные взаимноортогональные векторы $\mathbf{e}_\alpha'$ ($\alpha = 1, 2$) находятся из соотношений (не суммировать по $\alpha = 1, 2$!)

$$\mathbf{e}_\alpha' = k_\alpha^{-1} \mathbf{e}_\alpha \cdot \mathrm{D} \tag{3.3}$$

а векторы $\mathbf{e}_3$ и $\mathbf{e}_3'$ определены следующим образом:

$$\mathbf{e}_3 = \mathbf{e}_1 \times \mathbf{e}_2, \quad \mathbf{e}_3' = \mathbf{e}_1' \times \mathbf{e}_2' \tag{3.4}$$

Согласно (2.2) имеем $\mathrm{K} \cdot \mathrm{H} = \pm k_1 \mathbf{e}_1\mathbf{e}_1 \pm k_2 \mathbf{e}_2\mathbf{e}_2$, откуда $\mathbf{e}_1 \cdot \mathrm{H} = \pm \mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2 \cdot \mathrm{H} = \pm \mathbf{e}_2$. Из ортогональности H заключаем, что $\mathbf{e}_3 \cdot \mathrm{H} = \pm \mathbf{e}_3$. Следовательно, в данном случае H имеет также вид (2.4). Отсюда и с помощью (1.13), (3.2) находим

$$\mathrm{A} = \pm \mathbf{e}_1\mathbf{e}_1' \pm \mathbf{e}_2\mathbf{e}_2' \pm \mathbf{e}_3\mathbf{e}_3' \tag{3.5}$$

Так как согласно (3.4) ортонормированные базисы $\mathbf{e}_s$ и $\mathbf{e}_s'$ ($s = 1,2,3$) имеют одинаковую ориентацию, собственно ортогональными тензорами из совокупности (3.5) будут следующие:

$$\begin{gathered} \mathrm{A} = \pm (k_1^{-1} \mathbf{e}_1\mathbf{e}_1 + k_2^{-1} \mathbf{e}_2\mathbf{e}_2) \cdot \mathrm{D} + \mathbf{e}_3\mathbf{e}_3' \\ \mathrm{A} = \pm (k_1^{-1} \mathbf{e}_1\mathbf{e}_1 - k_2^{-1} \mathbf{e}_2\mathbf{e}_2) \cdot \mathrm{D} - \mathbf{e}_3\mathbf{e}_3' \end{gathered} \tag{3.6}$$

Прямой проверкой можно убедиться в справедливости следующих тождеств:

$$\pm (k_1^{-1} \mathbf{e}_1\mathbf{e}_2 + k_2^{-1} \mathbf{e}_2\mathbf{e}_2) = \frac{\mathbf{g}(I_1 + j_2) - \mathrm{D} \cdot \mathrm{D}^T}{\pm j_2 \sqrt{2 j_2 + I_1}}, \qquad j_2 = \sqrt{I_2} \tag{3.7}$$

$$\pm (k_1^{-1} \mathbf{e}_1\mathbf{e}_1 - k_2^{-1} \mathbf{e}_2\mathbf{e}_2) = \frac{\mathbf{g}(I_1 + j_2) - \mathrm{D} \cdot \mathrm{D}^T}{\pm j_2 \sqrt{2 j_2 + I_1}}, \qquad j_2 = -\sqrt{I_2} \tag{3.8}$$

$$\begin{gathered} \mathbf{g} = \mathbf{e}_1\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2\mathbf{e}_2, \quad I_1 = k_1^2 + k_2^2 = \mathrm{tr}\,(\mathrm{D} \cdot \mathrm{D}^T) \\ I_2 = k_1^2 k_2^2 = {}^1/_2\,[\mathrm{tr}^2\,(\mathrm{D} \cdot \mathrm{D}^T) - \mathrm{tr}\,(\mathrm{D} \cdot \mathrm{D}^T)^2] \end{gathered}$$

Здесь I_1, I_2 — соответственно первый и второй инварианты тензора $\mathrm{D} \cdot \mathrm{D}^T$. Равенство (3.8) надо понимать в том смысле, что каждый из двух тензоров левой части равен какому-либо из тензоров правой части. Вместо (3.6) теперь получаем

$$\begin{gathered} \mathrm{A} = \frac{\mathrm{D}(I_1 + j_2) - \mathrm{D} \cdot \mathrm{D}^T \cdot \mathrm{D}}{\pm j_2 \sqrt{2 j_2 + I_1}} + \mathbf{e}_3\mathbf{e}_3', \quad j_2 = \sqrt{I_2} \\ \mathrm{A} = \frac{\mathrm{D}(I_1 + j_2)\, \mathrm{D} \cdot \mathrm{D}^T \cdot \mathrm{D}}{\pm j_2 \sqrt{2 j_2 + I_1}} - \mathbf{e}_3\mathbf{e}_3', \quad j_2 = -\sqrt{I_2} \end{gathered} \tag{3.9}$$

Здесь учтено, что $\mathbf{g} \cdot \mathrm{D} = \mathrm{D}$, как это следует из (1.11) и (3.1).

Введя в рассмотрение векторы $\mathbf{f}^\alpha = \mathbf{e}_\alpha \cdot \mathrm{D} = k_\alpha \mathbf{e}_\alpha'$ (не суммировать по $\alpha = 1, 2!$), из (1.11). (3.1), (3.2) получим

$$\mathrm{D} = \mathbf{e}_\alpha \mathbf{f}^\alpha \tag{3.10}$$

На основании (3.4) имеем

$$\sqrt{I_2}\,\mathbf{e}_3\mathbf{e}_3' = (\mathbf{e}_1 \times \mathbf{e}_2)(\mathbf{f}^1 \times \mathbf{f}^2) = {}^1/_2 \mathbf{e}_\alpha \times \mathbf{e}_\beta \mathbf{f}^\alpha \times \mathbf{f}^\beta \qquad (\alpha, \beta = 1, 2) \tag{3.11}$$

С помощью известного соотношения для символов Леви-Чивита

$$e^{mns} e_{pqr} = \begin{vmatrix} \delta_p^m & \delta_q^m & \delta_r^m \\ \delta_p^n & \delta_q^n & \delta_r^n \\ \delta_p^s & \delta_q^s & \delta_r^s \end{vmatrix}$$

можно проверить следующее тождество, справедливое для любых векторов **a**, **b**, **x**, **y**:

$$\begin{aligned} \mathbf{a} \times \mathbf{b}\mathbf{x} \times \mathbf{y} = (\mathbf{a}\cdot\mathbf{x}\mathbf{b}\cdot\mathbf{y} - \mathbf{a}\cdot\mathbf{y}\mathbf{b}\cdot\mathbf{x})\,\mathrm{E} - \mathbf{a}\mathbf{x}\mathbf{y}\mathbf{b} + \mathbf{b}\cdot\mathbf{x}\mathbf{y}\mathbf{a} + \\ + \mathbf{a}\cdot\mathbf{y}\mathbf{x}\mathbf{b} - \mathbf{b}\cdot\mathbf{y}\mathbf{x}\mathbf{a} \end{aligned} \tag{3.12}$$

Применительно к (3.11) из (3.12) имеем

$$\sqrt{I_2}\,\mathbf{e}_3\mathbf{e}_3' = {}^1/_2 (\mathbf{e}_\alpha \cdot \mathbf{f}^\alpha \mathbf{e}_\beta \cdot \mathbf{f}^\beta - \mathbf{e}_\alpha \cdot \mathbf{f}^\beta \mathbf{e}_\beta \cdot \mathbf{f}^\alpha)\,\mathrm{E} + \mathbf{e}_\beta \cdot \mathbf{f}^\alpha \mathbf{f}^\beta \mathbf{e}_\alpha - \mathbf{e}_\alpha \cdot \mathbf{f}^\alpha \mathbf{f}^\beta \mathbf{e}_\beta$$

Далее заметим, что согласно (3.10)

$$\mathbf{f}^\alpha \mathbf{e}_\alpha = \mathrm{D}^T, \qquad \mathbf{e}_\beta \cdot \mathbf{f}^\beta = \operatorname{tr} \mathrm{D}^T = \operatorname{tr} \mathrm{D}$$

$$\mathbf{e}_\beta \cdot \mathbf{f}^\alpha \mathbf{f}^\beta \mathbf{e}_\alpha = \mathbf{f}^\beta \mathbf{e}_\beta \cdot \mathbf{f}^\alpha \mathbf{e}_\alpha = (\mathrm{D}^T)^2$$

Приходим к соотношению

$$\sqrt{I_2}\,\mathbf{e}_3\mathbf{e}_3' = (\mathrm{D}^T)^2 - \mathrm{D}^T \operatorname{tr} \mathrm{D}^T + {}^1/_2 \mathrm{E}\, [\operatorname{tr}^2 \mathrm{D}^T - \operatorname{tr} (\mathrm{D}^T)^2] \equiv \mathrm{D}^{*T} \tag{3.13}$$

Здесь D^* — тензор, присоединенный к D. Матрица смешанных компонент D^* в любом базисе совпадает с транспонированной матрицей алгебраических дополнений матрицы компонент D. Для неособого тензора X верно равенство $\mathrm{X}^* = \det \mathrm{X} \mathrm{X}^{-1}$.

Из (3.9), (3.13) получим окончательно следующее явное представление общего решения уравнения (1.10);

$$\begin{aligned} &\mathrm{A} = j_2^{-1} \{\mathrm{D}^{*T} \pm (2j_2 + I_1)^{-1/2} [(I_1 + j_2)\,\mathrm{D} - \mathrm{D}\cdot\mathrm{D}^T\cdot\mathrm{D}]\}, \\ &j_2 = \pm\sqrt{I_2} \end{aligned} \tag{3.14}$$

Напомним, что это решение справедливо при условиях

$$k_3 = 0,\ k_1 \neq 0,\ k_2 \neq 0,\ k_1 \neq k_2$$

или в эквивалентной форме

$$\det \mathrm{D} = 0, \quad I_2 \neq 0, \quad I_1 \neq 2\sqrt{I_2}$$

В рассматриваемом случае, как и для неособого тензора D, выражение тензора поворота имеет четыре ветви, отличающиеся одна от другой поворотом на 180° вокруг каждой из главных осей тензора $\mathrm{D}\cdot\mathrm{D}^T$. Неравенство (2.9), выделяющее из четырех решений единственное, очевидно, применимо и в данном случае.

Заметим, что случай, когда $\det \mathrm{D} = 0$, хотя и является вырожденным, все же достаточно важен, так как реализуется в тонкостенных конструкциях, где тензор напряжений Коши часто можно считать двумерным (например, безмоментная теория оболочек).

Если два ненулевых собственных значения совпадают ($k_1 = k_2$), то однозначно определена лишь главная ось тензора K, соответствующая нулевому собственному значению, а в качестве $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$ можно взять любой ортонормированный базис в плоскости, нормальной к $\mathbf{e}_3$. Тензор поворота в этом случае определяется тензором напряжений Пиола с точностью до поворота на 180° вокруг $\mathbf{e}_3$ и вокруг любой оси, перпендикулярной $\mathbf{e}_3$.

Для случая, когда только одно собственное число отлично от нуля ($\mathrm{K} = k_1\mathbf{e}_1\mathbf{e}_1$), можно показать, что общее решение уравнения (1.10) содержит следующую неопределенность: поворот на любой угол вокруг вектора $\mathbf{e}_1$ и поворот на 180° вокруг любой оси, перпендикулярной $\mathbf{e}_1$.

Наконец, если все три главных значения тензора K равны нулю, то $\mathrm{D} = 0$, и уравнению (1.10) удовлетворяет любой собственно ортогональный тензор.

Итак, установлено, что в случае простых корней характеристического уравнения тензора $\mathrm{D}\cdot\mathrm{D}^T$ независимо от того, является ли тензор D обратимым, представление C (D) имеет четыре изолированные ветви. Если заранее известно (как это бывает во многих практических задачах), что углы поворота главных материальных волокон не слишком велики, то в сочетании с неравенством (2.9) это представление будет однозначным. В случае кратных корней представление C(D) содержит неопределенные параметры. Однако эти случаи — исключительные и в конкретных задачах могут реализоваться только на некоторых поверхностях или линиях внутри области, занятой телом (т. е. на множествах меры нуль). Поэтому указанную неопределенность можно устранить путем предельного перехода. Таким образом, во многих практических задачах представление градиента перемещений через тензор напряжений Пиола оказывается однозначным в каждой точке тела, что дает возможность применять вариационный принцип дополнительной энергии для решения задачи нелинейной теории упругости.

Поступила 28 V 1976

ЛИТЕРАТУРА

1. *Зубов Л. М.* Принцип стационарности дополнительной работы в нелинейной теории упругости. ПММ, 1970, т. 34, вып. 2.
2. *Koiter W. T.* On the principle of stationary complementary energy in the non-linear theory of elasticity. SIAM J. Appl. Math., 1973, vol. 25, No. 3.
3. *Christoffersen J.* On Zubov's principle of stationary complementary energy and a related principle. Danish center for appl. math. and mechanics. The technical university of Denmark, 1973.
4. *Лурье А. И.* Теория упругости. М., «Наука», 1970.
5. *Трусделл К.* Первоначальный курс рациональной механики сплошных сред. М., «Мир», 1975.
6. *Гантмахер Ф. Р.* Теория матриц. М., «Наука», 1967.