Прикладная математика и механика. Том 40, 1976

УДК 536.46 : 533.6

О ПОДЖИГАНИИ ГОМОГЕННОЙ РЕАГИРУЮЩЕЙ СРЕДЫ ТЕПЛОВЫМ ИСТОЧНИКОМ С КОНЕЧНЫМ ЗАПАСОМ ТЕПЛА

В. С. Берман, Ю. С. Рязанцев

(Москва)

Задача о поджигании горючей смеси накаленным телом является одной из классических задач теории горения [1]. Различные аспекты проблемы зажигания теоретически исследовались в работах [1-3].

В данной работе выполнен асимптотический анализ задачи о поджигании гомогенной конденсированной горючей смеси нагретым плоским, цилиндрическим или сферическим телом с учетом изменения температуры тела в процессе поджигания. Получено асимптотическое решение для распределения температуры в области, занимаемой конденсированной средой от начального момента времени до момента зажигания. Определен закон изменения температуры поджигающего тела. Установлен критерий поджигания, связывающий основные физико-химические параметры задачи и основанный на предположении о том, что воспламенение имеет место, если в процессе теплообмена тела и реагирующей среды воспламенитель превращается из источника в сток тепла.

1. Постановка задачи. Зажигание способной к изотермическому химическому превращению конденсированной среды накаленным плоским слоем, бесконечным цилиндром и сферой при обычных упрощающих предположениях может быть описано следующей системой уравнений:

$$\rho_2 c_2 \frac{\partial T_2}{\partial t_*} = \lambda_2 \frac{1}{r_*^{n-1}} \frac{\partial}{\partial r_*}\left(r_*^{n-1} \frac{\partial T_2}{\partial r_*}\right) + \rho_2 k Q \exp\left(-\frac{E}{RT_2}\right), \qquad r_* \geqslant R_0 \tag{1.1}$$

$$T_2(R_0, t) = T_1(R_0, t), \quad T_2(\infty, t_*) = T_-; \quad T_2(r_*, 0) = T_-$$

$$\frac{\partial T_1}{dt_*} = \frac{\lambda_2 n}{\rho_1 c_1 R_0}\left(\frac{\partial T_2}{\partial r_*}\right)_{r_*=R_0}, \quad T_1 = T_1(t_*), \quad T_1(0) = T_+$$

Здесь t_* — время, r_* — пространственная координата, R_0 — характерный размер нагретого тела; $T_1(t)$ — температура инертного газа, $T_2(r_*, t_*)$ — температура реагирующей среды: $n = 1,2,3$ соответствует плоскому цилиндрическому и сферическому случаю; λ_i, ρ_i, c_i — теплопроводность, плотность и теплоемкость инертного тела ($i = 1$) и конденсированной фазы ($i = 2$); k — предэкспоненциальный множитель, Q — тепловой эффект; T_+° и T_- — начальные температуры инертного тела и конденсированной среды $T_+^\circ > T_-$.

Уравнение (1.3) описывает баланс тепла для инертного тела. В случае если температуропроводность $\lambda_1 / \rho_1 c_1$ достаточно велика, то распределение температуры в инертном теле однородно $T_1(r_*, t_*) = T_1(t_*)$.

[1] *Мержанов А. Г., Аверсон А. Э.* Современное состояние тепловой теории зажигания. М., 1970, Препринт Ин-та хим. физики АН СССР. Combustion and Flame, 1971, vol. 16, No. 1, p. 89.

Запишем задачу (1.1) в безразмерных переменных

$$\frac{\partial\theta}{\partial t}=\frac{1}{r^{n-1}}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^{n-1}\frac{\partial\theta}{\partial r}\right)+\delta\exp\frac{\beta(\theta-1)}{\theta+\sigma}\tag{1.2}$$

$$\theta(1,t)=a(t),\quad \theta(\infty,t)=0\quad \frac{da}{dt}=\gamma\left(\frac{\partial\theta}{\partial r}\right)_{r=1},\quad a(0)=1$$

$$t_*=R_0^2\rho_2c_2t/\lambda_2,\quad r_*=R_0r,\quad \beta=E/RT_+$$

$$\theta=\frac{T_2-T_-}{T_+-T_-},\quad \sigma=\frac{T_-}{T_+-T_-},\quad a=\frac{T_1-T_-}{T_+-T_-}$$

$$\gamma=\frac{n\rho_2c_2}{\rho_1c_1},\quad \delta=\frac{\rho_2kQR_0^2}{\lambda_2(T_+-T_-)}e^{-\beta}$$

Здесь $a(t)$, $\theta(r,t)$ — неизвестные функции, которые должны быть определены при решении задачи. При записи (1.4) использовано предположение об однородности температуры воспламенителя.

Будем исследовать задачу (1.2) в предположении больших энергий активации химической реакции ($\beta\gg1$), считая, что величины γ и σ по порядку величины равны единице. За момент зажигания примем момент времени, в который инертное тело вследствие инициирования химической реакции в конденсированной среде превратится из источника тепла в сток. Ясно, что для зажигания инертное тело должно иметь достаточный запас тепла.

При малом запасе тепла температура воспламенителя упадет слишком быстро и зажигание не произойдет. С другой стороны, при очень больших запасах тепла в инертном теле потери тепла и уменьшение температуры воспламенителя до момента зажигания будут малыми, так что задача практически не будет отличаться от задачи о зажигании конденсированной фазы накаленной стенкой с постоянной температурой[1]. В связи со сказанным решение рассматриваемой задачи включает оценку порядка величины δ (β), зависящую от запаса тепла в инертном теле, и нахождение критического значения δ.

2. Решение. Представим решение задачи (1.2) в виде суммы

$$\theta=\Phi(r,t)+u(r,t)\tag{2.1}$$

$$\frac{\partial\Phi}{\partial t}=\frac{1}{r^{n-1}}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^{n-1}\frac{\partial\Phi}{\partial r}\right)\tag{2.2}$$

$$\Phi(1,t)=a(t),\quad \Phi(\infty,t)=0,\quad \Phi(r,0)=0$$

Методом преобразования Лапласа можно получить

$$\Phi^*(r,p)=\begin{cases}\dfrac{a_*(p)}{r}e^{-\sqrt{p}(r-1)}\\[2mm] a^*p=\dfrac{K_0(r\sqrt{p})}{K_0(\sqrt{p})},\\[2mm] a^*(p)e^{-\sqrt{p}(r-1)}\end{cases}\quad \left(\frac{\partial\Phi^*}{\partial r}\right)_{r=1}=\begin{cases}-a^*(\sqrt{p}+1), & n=3\\[2mm] a^*\sqrt{p}\dfrac{K_1(\sqrt{p})}{K_0(\sqrt{p})}, & n=2\\[2mm] -a^*\sqrt{p}, & n=1\end{cases}$$

$$\Phi^*(r,p)=p\int_0^\infty e^{-pt}\Phi(r,t)\,dt$$

---

[1] *Берман В. С.* Некоторые вопросы теории распространения зоны с экзотермическими и химическими реакциями в газовых и конденсированных средах. Канд. диссертация. М., 1974, Ин-т проблем механики АН СССР.

Здесь K_0, K_1 — функции Макдональда нулевого и первого порядка.

В соответствии с (2.1) из (1.2) для функции u $(r,\ t)$ найдем

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{1}{r^{n-1}}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^{n-1}\frac{\partial u}{\partial r}\right) + \delta(\beta)\exp\left[\beta\left(\frac{\Phi + u - 1}{\Phi + u + \sigma}\right)\right] \tag{2.3}$$

$$u(1,\ t) = u(\infty,\ t) = u(r,\ 0) = 0$$

$$\frac{da}{dt} = \gamma\left[\left(\frac{\partial\Phi}{\partial r}\right)_{r=1} + \left(\frac{\partial u}{\partial r}\right)_{r=1}\right], \quad a(0) = 1$$

При анализе задачи выделим в области изменения переменной $1 \leqslant \leqslant r < \infty$ пограничный слой, прилегающий к поверхности инертного тела. В погранслое введем переменную $x = (r - 1)\,\psi(\beta)$, $\psi(\beta) \gg 1$.

В используемых безразмерных переменных время зажигания много меньше единицы, поэтому вместо t введем новую переменную $\tau = t\,\varphi(\beta)$, $\varphi(\beta) \gg 1$.

Будем искать решение в виде

$$a(t) = 1 + \beta^{-1} a_1(\tau) + \ldots,\quad u(x,\ t) = \beta^{-1} u_1 + \ldots$$

Анализ показывает, что решение задачи, соответствующее зажиганию, имеет место при $\psi^2 = \varphi\beta^2$, $\psi = \beta^2$, $\varphi = \beta^2$, $\delta = \delta_0\beta^3$, $\delta_0 = O(1)$. Подставляя $a(t)$ и $u(x,\ t)$ в (2.3), можно получить

$$\frac{\partial^2 u_1}{\partial x^2} + \delta_0 \exp\frac{a_1 + u_1 - x/\sqrt{\pi t}}{1 + \sigma} = 0 \tag{2.4}$$

$$u_1(0,\ \tau) = 0,\quad u_1(x,\ 0) = 0,\quad u_1(\infty,\ \tau) = O(1)$$

$$\frac{da_1}{d\tau} = \gamma\left[-\frac{1}{\sqrt{\pi\tau}} + \left(\frac{\partial u_1}{\partial x}\right)_{x=0}\right], \quad a_1(0) = 0 \tag{2.5}$$

Общее решение уравнения (2.4) имеет вид

$$u_1(x,\ \tau) = \frac{x}{\sqrt{\pi\tau}} - a_1(\tau) + (1 + \sigma)\left[-\ln\delta_0 + \ln c_2(\tau) - 2\ln\operatorname{ch}\left(c_1(\tau) + x\sqrt{\frac{c_2(\tau)}{2(1+\sigma)}}\right)\right] \tag{2.6}$$

Удовлетворяя граничным условиям при $x = 0$ и $x = \infty$, имеем

$$\operatorname{ch}^2 c_1(\tau) = \delta_0^{-1}\exp\left(-\frac{a_1(\tau)}{1+\sigma}\right)c_2(\tau),\quad c_2(\tau) = \frac{1}{2\pi(1+\sigma)\tau}$$

Градиент температуры на поверхности воспламенителя $r = 1$ $(x = 0)$ равен

$$\left(\frac{\partial\theta}{\partial r}\right)_{r=1} = -(\pi r)^{-1/2}\left[1 - 2\pi(1+\sigma)\delta_0\tau\exp\frac{a_1}{1+\sigma}\right]^{1/2} \tag{2.7}$$

Видно, что поток тепла обращается в нуль при обращении в нуль выражения в квадратных скобках. В этот момент инертное тело из источника тепла превращается в сток (момент зажигания).

Из (2.5) с учетом (2.7) находим

$$\frac{ad_1}{d\tau} = -\gamma(\pi\tau)^{-1/2}\left[1 - 2\pi(1+\sigma)\delta_0\tau\exp\frac{a_1}{1+\sigma}\right]^{1/2}, \quad a_1(0) = 0 \tag{2.8}$$

Переходя к новым переменным, вместо (2.8) получим

$$dy / d\xi = \varepsilon \sqrt{1 - \xi^2 e^{-y}}, \quad y(0) = 0, \quad y \geqslant 0 \tag{2.9}$$

$$a_1 = -y(1 + \sigma), \quad \tau = \frac{\xi^2}{2\pi(1+\sigma)\delta_0}, \quad \varepsilon = \frac{\gamma}{\pi}\sqrt{\frac{2}{(1+\sigma)^3\delta_0}}$$

В зависимости от параметра ε решение (2.9) имеет разный вид. При достаточно больших ε оно существует на всем интервале $0 \leqslant \xi \leqslant \infty$, а при достаточно малых — только на конечном интервале изменения времени. Последний случай соответствует зажиганию. Критическое значение $\varepsilon = \varepsilon^*$ находится путем численного интегрирования и равно $\varepsilon^* = 1.138$. Отсюда следует, в частности, что при $R_0 \geqslant R_0{}^*$ зажигание будет иметь место, а при $R_0{}^* < R_0$ зажигания не произойдет, причем

$$R_0{}^* = 0.395 \frac{n\rho_2 c_2}{\rho_1 c_1}\left(\frac{E}{RT_+}\right)^{3/2}\left(\frac{T_+ - T_-}{T_+}\right)^{3/2}\left[\frac{\lambda_2(T_+ - T_-)}{\rho_2 KQ}\right]^{1/2} \exp\frac{E}{2RT_+} \tag{2.10}$$

Очевидно, что указанный критерий охватывает как случай асимптотического поведения решения, при котором изменение температуры инертного тела при зажигании оказывается существенным, так и случай, когда это изменение пренебрежимо мало.

Полученные соотношения определяют распределение температуры во внутренней зоне, изменение температуры воспламенителя и критические условия воспламенения. При описании изменения температуры во всей области, занятой конденсированной средой $R_0 < r < \infty$, эти соотношения должны быть дополнены распределением температуры во внешней области $u = \beta^{-1} U_1$, где функция U_1 представляет собой решение следующей линейной задачи:

$$\partial U_1 / \partial\tau = \partial^2 U_1 / \partial X^2, \quad X = (r - 1)\beta$$

$$U_1(0, \tau) = u_1(x \to \infty, \tau) = f(\tau), \quad U_1(X, 0) = U(\infty, \tau) = 0$$

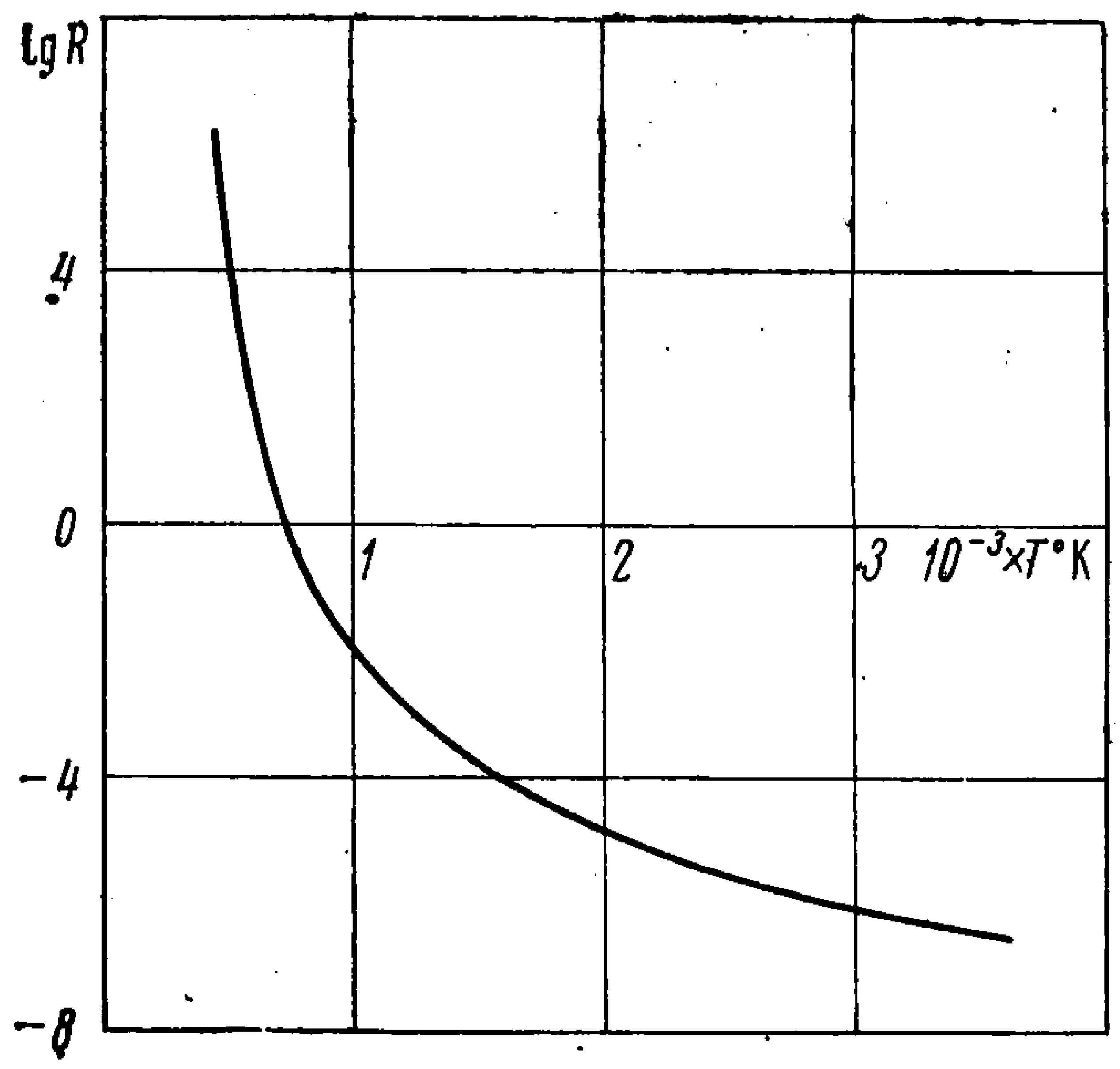
$$U_1(X, \tau) = \frac{X}{2\sqrt{\pi}}\int_0^\pi \frac{f(\tau')}{(\tau - \tau')^{3/2}} \exp\left[-\frac{X^2}{4(\tau - \tau')}\right] d\tau'$$

В качестве примера рассмотрим поджигание нитрометана плоским слоем меди. Для этого случая физико-химические характеристики равны [4] $\rho_1 = 8.939$ *г·см*$^{-3}$; $c_1 = 9.154 \cdot 10^{-2}$ *кал·г*$^{-1}$*·к*$^{-1}$; $\rho_2 = 1.1286$ *г·см*$^{-3}$; $c_2 = 4.153 \cdot 10^{-1}$ *кал·г·к*$^{-2}$; $\lambda_1 = 5 \cdot 10^{-4}$ *кал·см*$^{-1}$*·сек*$^{-1}$*·к*$^{-1}$; $Q = 1.113 \cdot 10^{-3}$ *кал·г*$^{-1}$; $k = 3.98 \cdot 10^{-14}$ *сек*$^{-1}$; $E = 5.36 \cdot 10^4$ *кал·моль*$^{-1}$*·к*$^{-1}$.

Начальная температура нитрометана равна $T_- = 300°$ К. На фигуре показана зависимость критического размера воспламенителя (полуширина слоя) в зависимости от начальной температуры T_+. Область выше кривой соответствует зажиганию. Очевидно, что критический размер в случае поджигающего тела цилиндрической или сферической формы находится из данных фигуры простым пересчетом.

Отметим, что как следует из решения задачи, в рассмотренном случае размеры зоны с химическим тепловыделением оказываются много меньше размеров поджигающего тела, так что задача во внутренней области оказывается плоской, а форма тела проявляется только в наличии в формулах множителя n, равного отношению площади воспламенителя к его объему.

В проведенном анализе предполагалось, что $\gamma = O(1)$. Это соответствует типичным значениям теплофизических характеристик воспламенителя и конденсированной среды. Аналогичное рассмотрение может быть выполнено и при более общем предположении относительно величины параметра γ. Если принять, что $\gamma = \gamma_0 \alpha(\beta)$, $\gamma_0 = O(1)$, то изменение температуры воспламенителя будет существенным при $\sigma(\beta)\alpha^{-2}(\beta)\beta^{-3} = O(1)$. При этом переменные во внутренней области должны быть выбраны в виде $x = (r-1)\alpha\beta^2$, $\tau = t\alpha^2\beta^2$. Тогда для значений α, удовлетворяющих неравенству $\alpha\beta^2 \gg 1$, решение задачи будет определяться полученными в данной работе выражениями, в которые необходимо лишь вместо δ_0 подставить $\delta / \alpha^2 \beta^3$, а вместо γ — величину γ / α. Однако в случае $\alpha = \beta^{-2}$ задача сведется к решению уравнения, в котором дифференциальный оператор сохранит форму, определяемую симметрией задачи.



В заключение отметим, что развитый подход применим и к задаче о зажигании реагирующего газа нагретым телом с учетом остывания тела и выгорания реагента. В этом случае задача сведется к интегрированию двух нелинейных интегральных уравнений для температуры воспламенителя и концентрации реагента у его поверхности.

Поступила 5 II 1976

ЛИТЕРАТУРА

1. *Зельдович Я. Б.* К теории зажигания. Докл. АН СССР, 1963, т. 150, № 2.
2. *Вилюнов В. Н., Колчин А. К.* О зажигании конденсированных ВВ при кондуктивном подводе тепла от сред с плохой теплопроводностью. Физика горения и взрыва, 1966, № 3.
3. *Аверсон А. Э., Розенбанд В. И.* Приближенные методы расчета критических условий зажигания. Физика горения и взрыва, 1968, № 4.
4. *Enig J. W.* Approximate solutions in the theory of thermal explosions for semi-infinite explosives. Proc. Roy. Soc. London, A, 1968, vol. 305, No. 1481.