

ПРИБЛИЖЕННЫЙ МЕТОД РАСЧЕТА ОДНОМЕРНЫХ ТЕЧЕНИЙ ГАЗА, ВЫЗВАННЫХ НЕМОНОТОННЫМ ДВИЖЕНИЕМ ПОРШНЯ

С. П. Баутин

(Свердловск)

С помощью специальных рядов решена задача об одномерном поршне, который сначала вдвигается в покоящийся газ ускоренно, потом тормозится и останавливается. Поле течения газа строится с помощью последовательного склеивания через характеристики решений трех характеристических задач Коши. Находится обобщенное решение задачи о мгновенной остановке поршня. Полученные решения используются для приближенного расчета движения возникающих ударных волн.

В работах [1, 2] предложен метод представления решений некоторых краевых задач для нелинейных уравнений гиперболического типа в виде специальных рядов. В частности, решена задача о движении поршня в покоящийся газ, и полученное решение использовано для приближенного расчета движения возникающей ударной волны. Скорость поршня предполагалась монотонно возрастающей. В данной работе с помощью подобных рядов эта задача решена в случае, когда скорость поршня не монотонна.

В настоящее время с помощью численных методов (например методом характеристик) можно с высокой точностью рассчитывать одномерные течения, аналогичные рассмотренному ниже. Метод, предложенный в [1, 2], позволяет решать многомерные задачи. Построение по предложенной схеме решения задачи о многомерном поршне, скорость которого не монотонна, принципиальных затруднений не вызывает, расчетные формулы только получаются более громоздкими.

1. Рассматриваются одномерные изэнтропические течения идеального политропного газа, потенциал которых удовлетворяет уравнению

$$\Phi_{tt} + 2\Phi_{tx}\Phi_x + (\Phi_x^2 - c^2)\Phi_{xx} - (i-1)c^2\frac{\Phi_x}{x} = 0, \quad x > 0$$

$$c^2 = (\gamma - 1)(M - \Phi_t - \frac{1}{2}\Phi_x^2), \quad M = 1 / (\gamma - 1)$$

Здесь c — скорость звука, $\gamma > 1$ — показатель адиабаты; $i = 1$ соответствует случаю плоской симметрии, $i = 2$ — цилиндрической, $i = 3$ — сферической симметрии.

Пусть непроницаемый поршень в момент времени $t = 0$ начинает по закону $x = \chi_1(t)$ вдвигаться в однородный покоящийся газ, причем

$$(1.1) \quad \chi_1(0) = R_0 > 0, \quad \chi_1'(0) = 0, \quad \chi_1''(t) > 0, \quad 0 \leq t \leq t_1$$

По покоящемуся газу начинает распространяться поверхность слабого разрыва — характеристика, отделяющая область покоя от области возмущенного течения газа. Получается характеристическая задача Коши

(задача 1): на характеристике заданы начальные условия — однородный газ покоится, на линии $x = \chi_1(t)$ задано граничное условие

$$(1.2) \quad \Phi_x(\chi_1(t), t) = \chi_1'(t)$$

являющееся следствием непротекания поршня.

С момента t_1 поршень начинает двигаться по закону $x = \chi_2(t)$, причем

$$\begin{aligned} \chi_2(t_1) &= \chi_1(t_1), \quad \chi_2'(t_1) = \chi_1'(t_1) \\ \chi_2''(t) &< 0, \quad t_1 \leq t \leq t_2; \quad \chi_2'(t_2) = 0 \end{aligned}$$

В возмущенном течении возникает еще одна поверхность слабого разрыва, которая полностью определяется решением задачи 1. Заданное течение газа по одну сторону от этой характеристики и граничное условие на поршне, аналогичное условию (1.2), также образуют характеристическую задачу Коши (задачу 2).

В момент времени $t = t_2$ поршень остановился, т. е. $x = \chi_3(t) = \text{const}$. Возникает еще один слабый разрыв, определяемый решением задачи 2. При задании на нем начальных условий из решения задачи 2 и на поршне условия типа (1.2) получается еще одна характеристическая задача Коши (задача 3).

2. Для последовательного решения трех поставленных задач, как в [1, 2], делается переход к новым независимым переменным r, t и новой неизвестной функции Ψ с помощью преобразования Лежандра $\Psi = rx + Mt - \Phi$. Якобиан преобразования $J = \Psi_r \Psi_{rr}$. В результате для Ψ получается уравнение

$$(2.1) \quad \Psi_{tt} \Psi_{rr} - \Psi_{rt}^2 + 2r \Psi_{rt} - r^2 + c^2 + (i-1)rc^2 \frac{\Psi_{rr}}{\Psi_r} = 0$$

$$(2.2) \quad c^2 = (\gamma - 1) (\Psi_t - \frac{1}{2} r^2)$$

Следствием преобразования Лежандра будут формулы

$$(2.3) \quad x = \Psi_r, \quad r = \Phi_x, \quad \Psi_{rr} = 1 / \Phi_{xx}$$

Для уравнения (2.1) характеристическая задача Коши в общем случае ставится следующим образом. Пусть в некоторой области Γ плоскости tOr задано решение уравнения (2.1)

$$(2.4) \quad \Psi(r, t) = f(r, t)$$

и точка $(t = t_0, r = r_0)$ принадлежит Γ . Тогда характеристика $r = \varphi(t) = 0$ решения (2.4), проходящая через заданную точку, удовлетворяет уравнению и начальному условию

$$(2.5) \quad [f_{tt}(\varphi, t) + (i-1)\varphi(\gamma-1)(f_t(\varphi, t) - \frac{1}{2}\varphi^2) / f_r(\varphi, t)] - [2\varphi - 2f_{rt}(\varphi, t)]\varphi' + [f_{rr}(\varphi, t)]\varphi^{1/2} = 0, \quad \varphi(t_0) = r_0$$

Пусть задача (2.5) имеет решение. Если таких решений два, то одно из них выбирается исходя из физического смысла задачи.

Вводятся новые независимые переменные $z = r - \varphi(t)$, $\tau = t$. Тем самым характеристика берется в качестве координатной линии. Уравнение

(2.1) переходит в уравнение

$$(2.6) \quad (\Psi_{\tau\tau} - 2\varphi' \Psi_{z\tau} + \varphi'^2 \Psi_{zz} - \varphi'' \Psi_z) \Psi_{zz} - (\Psi_{z\tau} - \varphi' \Psi_{zz})^2 + 2(z + \varphi) (\Psi_{z\tau} - \varphi' \Psi_{zz}) - (z + \varphi)^2 + (\gamma - 1) \times \\ \times (\Psi_{\tau} - \varphi' \Psi_z - \frac{1}{2}(z + \varphi)^2) + (i - 1) (\gamma - 1) (z + \varphi) (\Psi_{\tau} - \varphi' \Psi_z - \frac{1}{2}(z + \varphi)^2) \Psi_{zz} / \Psi_z = 0$$

Для уравнения (2.6) начальные условия следующие:

$$(2.7) \quad \Psi(0, \tau) = f(\varphi(\tau), \tau), \quad \Psi_z(0, \tau) = f_r(\varphi(\tau), \tau)$$

Граничное условие для характеристической задачи Коши (2.6), (2.7) получается, как и в [3], из соотношения

$$(2.8) \quad \chi(\tau) = \Psi_z(z, \tau)|_{z=\chi'(\tau)-\varphi(\tau)}$$

Уравнение (2.8) следует из формул (2.3) и из условия непротекания поршня, движущегося по закону $x \stackrel{\Delta}{=} \chi(t)$. После дифференцирования (2.8) по τ и введения функции η , обратной к $\chi' - \varphi$, получается граничное условие для характеристической задачи Коши (2.6), (2.7)

$$(2.9) \quad \Psi_{zz}|_{\tau=\eta(z)} = \eta'(z) [\chi', \eta(z)] - \Psi_{z\tau}|_{\tau=\eta(z)}$$

Для того, чтобы можно было записать соотношение (2.9) в окрестности точки $(\tau = t_0, z = 0)$, достаточно потребовать условия

$$(2.10) \quad \chi''(t_0) - \varphi'(t_0) \neq 0$$

Решение характеристической задачи Коши (2.6), (2.7), (2.9) ищется в виде степенного ряда по z

$$(2.11) \quad \Psi(z, \tau) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{T_k(\tau)}{k!} z^k = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{T_k(t)}{k!} (r - \varphi(t))^k$$

Тогда T_0 и T_1 известны из (2.7), а T_2 и T_k ($k \geq 3$) удовлетворяют уравнениям

$$(2.12) \quad BT_2' + CT_2^2 + DT_2 + E = 0 \\ BT_k' + D_k T_k + E_k = 0, \quad k = 3, 4, \dots \\ B = -2(T_1'(\tau) - \varphi(\tau))$$

где C, D, E — известные функции от τ ; D_k, E_k — известные функции от τ , если известны T_2, \dots, T_{k-1} . Если в пространстве переменных x, t на характеристике $x = \xi(t)$, соответствующей характеристике $z = 0$, нет точек, в которых скорость звука равна нулю, то $B \neq 0$. Действительно, из формул (2.3) следует

$$\frac{d}{d\tau} [f_r(\varphi(\tau), \tau)] = \frac{d}{d\tau} [\xi(\tau)], \quad \varphi(\tau) = \Phi_x(\xi(\tau), \tau)$$

В задаче о поршне при достаточно малых t имеем $B \neq 0$ во всех трех характеристических задачах Коши.

Из соотношения (2.9) находятся начальные условия для уравнений (2.12).

Сходимость ряда (2.11) в некоторой окрестности точки $(\tau = t_0, z = 0)$ следует из теоремы, доказанной в [3].

3. Решения характеристических задач Коши, поставленных в п. 1, следующие.

В задаче 1 [1,2]

$$(3.1) \quad z = r, \quad \Psi(0, t) = K + t / (\gamma - 1), \quad \Psi_r(0, t) = t + R_0, \quad K = \text{const}$$

Выполнение условия (2.10) в задаче 1 обеспечивают соотношения (1.1).

Для $i = 3$ решение построено в [2], для $i = 2$ — в [1]. При $i = 1$ решение задачи 1 запишем в виде

$$(3.2) \quad \Psi_1(r, t) = \left(K + \frac{t}{\gamma - 1} \right) + (t + R_0)r + \left(\frac{\gamma + 1}{4} t + C_2 \right) r^2 + \sum_{k=3}^{\infty} C_k r^k$$

$$C_k = \text{const}, \quad k \geq 2$$

Для решения задачи 2 надо по решению задачи 1 построить из точки $(t = t_1, r = \chi_1'(t_1))$ характеристику $r = \varphi_1(t)$. При достаточно малых t_1 и $\chi_1'(t_1)$ уравнение (2.5) имеет два решения: $\varphi_{11}'(t_1) > 0$ и $\varphi_{12}'(t_1) \leq 0$. Поскольку поршень при $t \geq t_1$ тормозится, то за $\varphi_1(t)$ выбирается второе решение.

При $i = 1$ имеем $\varphi_1(t) = \chi_1'(t_1)$. При $i = 2$ и $i = 3$ уравнение (2.5) решалось численно и вместо бесконечных рядов брались их конечные отрезки

$$(3.3) \quad \sum_{k=0}^3 \frac{T_k(\tau)}{k!} z^k$$

Если $\varphi_1(t)$ построена, то $\chi_2(t)$ берется такой, чтобы при $t = t_1$ выполнялось условие, аналогичное условию (2.10).

При $i = 1$ решение задачи 2 следующее:

$$(3.4) \quad \Psi_2(r, t) = \Psi_1(r_1, t) + \Psi_{1r}(r_1, t)(r - r_1) + \left[\frac{\gamma + 1}{4} t + C_{22} \right] \times$$

$$\times (r - r_1)^2 + \sum_{k=3}^{\infty} C_{k2} (r - r_1)^k$$

$$r_1 = \chi_1'(t_1), \quad C_{k2} = \text{const}, \quad k \geq 2$$

При $i = 2$ и $i = 3$ для нахождения решения задачи 2 вместо решений задачи 1 брались конечные отрезки (3.3) и уравнения (2.12) решались численно.

Для того, чтобы построить решение задачи 3, надо построить характеристику $r = \varphi_2(t)$ решения задачи 2, выходящую из точки $(t = t_2, r = 0)$. При достаточно малых t_2 и $\chi_1'(t_1)$ уравнение (2.5) имеет два решения: $\varphi_{21}'(t_2) < \varphi_{22}'(t_2) \leq 0$. За $\varphi_2(t)$ выбирается $\varphi_{22}(t)$, так как если взято $\varphi_{21}(t)$, то при восстановлении течения в физическом пространстве получается, что с ростом времени характеристика «распространяется» в поршень, а не в газ.

При $i = 1$ имеем $\varphi_2(t) = 0$, а так как $\chi_3(t) = \text{const}$, то условие (2.10) не выполняется и решение задачи 3 в пространстве переменных r, t построить не удастся. Если рассматривать задачу 3 в пространстве переменных x, t , то из (3.4), (2.2), и (2.3) следует, что характеристика, разделяющая решения задачи 2 и задачи 3, является прямой. На этой прямой $U = 0, \rho =$

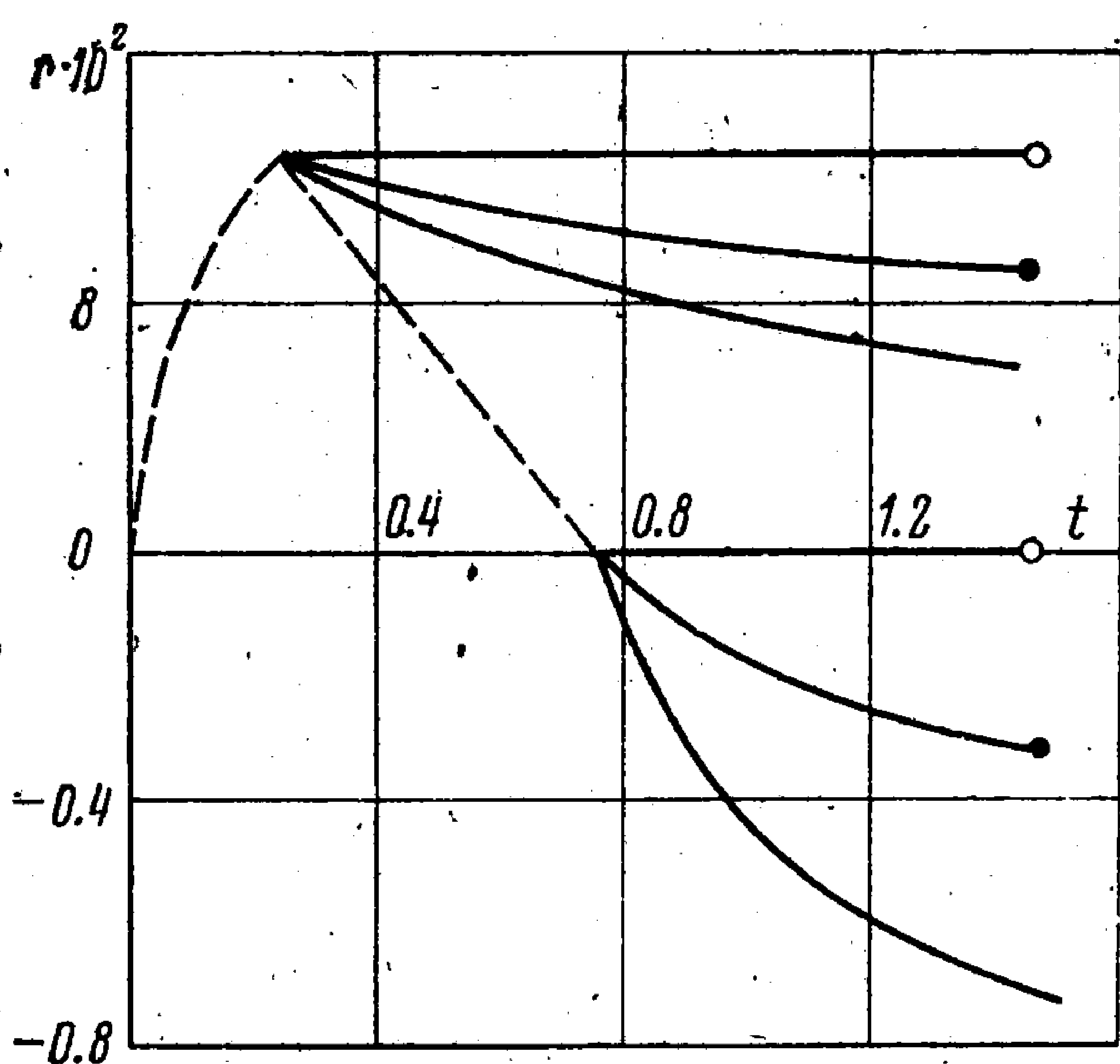
$= \rho_0 = \text{const}$, причем ρ_0 — плотность газа при $t = 0$. Таким образом, задача 3 имеет вид

$$(3.5) \quad \begin{aligned} \rho_t + U\rho_x + \rho U_x &= 0, & \rho U_t + \rho U U_x + \rho^{\gamma-1} \rho_x &= 0 \\ U &= 0, \quad \rho = \rho_0 & \text{на линии } x &= t - t_2 + \chi_2(t_2) \\ U &= 0 & \text{при } x &= \chi_2(t_2) \end{aligned}$$

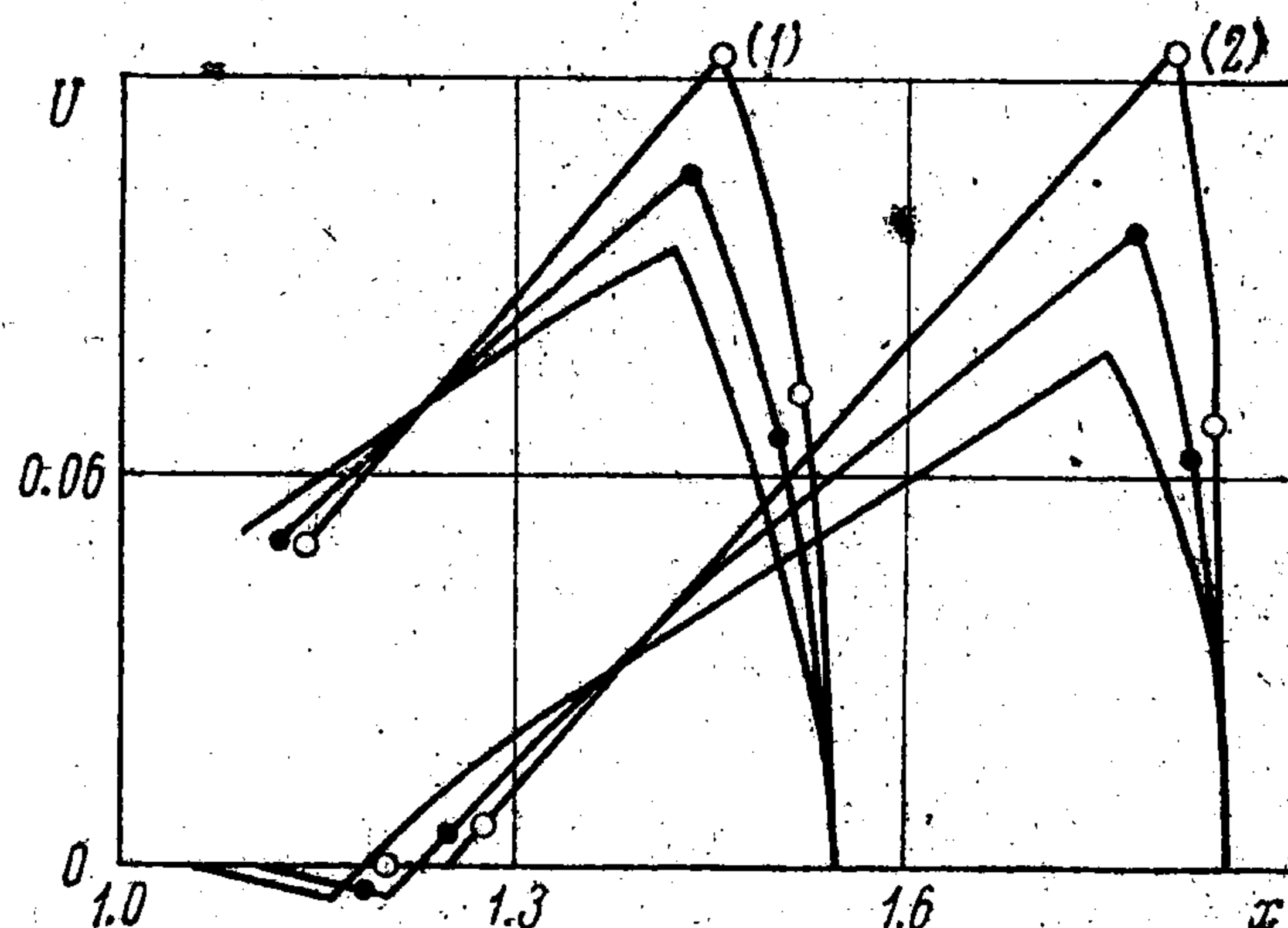
Можно показать, что у задачи (3.5) может быть только одно аналитическое решение

$$(3.6) \quad U = 0, \quad \rho = \rho_0$$

Итак, для $i = 1$, (3.2), (3.4), (3.6) решают исходную задачу о поршне. Решения (3.2) и (3.4) являются простыми волнами [4].



Фиг. 1



Фиг. 2

При $i = 2$ и $i = 3$ имеем $\varphi_2'(t_2) < 0$. Уравнение (2.5) решалось численно. Вместо решения задачи 2 брался его конечный отрезок (3.3), определенный по отрезку (3.3) решения задачи 1.

На фиг. 1—3 приведены результаты расчетов при

$$\chi_1(t) = 1 + \frac{1}{2}t^2 - \frac{4}{6}t^3, \quad t_1 = \frac{1}{4}$$

$$\chi_2(t) = \chi_1(t_1) + \chi_1'(t_1)(t - t_1) - \frac{1}{8}(t - t_1)^2, \quad t_2 = \frac{3}{4}$$

Линии со светлыми точками соответствуют $i = 1$, с темными точками — $i = 2$, без точек — $i = 3$.

На фиг. 1 представлены функции $\varphi_1(t)$ (верхний пучок сплошных кривых) и $\varphi_2(t)$ (нижний пучок); пунктирные линии соответствуют $\chi_1'(t)$ и $\chi_2'(t)$.

На фиг. 2, 3 приведены графики скорости газа U и плотности ρ , построенные по (3.3) решения задачи 3 в момент времени $t = 0.55$ (линии 1) и $t = 0.85$ (линии 2).

4. При уменьшении времени торможения, т. е. при $t_2 \rightarrow t_1$, «в пределе» получается задача о мгновенной остановке поршня. Решить «предельную» задачу в пространстве переменных x, t затруднительно. Предельный переход $t_2 \rightarrow t_1$ рассматривается в пространстве переменных r, t .

Краевое условие для задачи 2 имеет вид

$$(4.1) \quad \Psi_{rr}(r, \eta_2(r)) = \eta_2'(r) [r - \Psi_{rt}(r, \eta_2(r))]$$

где η_2 — функция, обратная к χ_2' ; $\eta_2(r_1) = t_1$, $\eta_2(0) = t_2$, $r_1 = \chi_1'(t_1)$. При $t_2 \rightarrow t_1$ η_2 стремится к прямой $t = t_1$. Условие (4.1) переходит в условие

$$(4.2) \quad \Psi_{rr}(r, t_1) = \Psi_{zz}(z, t_1) = 0$$

Задача 2 с граничным условием (4.2) вместо (2.9) никаких особенностей не имеет, у нее также существует аналитическое решение. Поэтому особенность в течении может возникнуть лишь в точках, где $J = 0$. В частности, $J = 0$ при $t = t_1$. Так как в задаче 2 T_2 удовлетворяет неоднородному уравнению, то существует $t_1' > t_1$, что $T_2(t) \neq 0$ при $t_1 < t < t_1'$. Поэтому у течения в физическом пространстве для $t_1 < t < t_1'$ в некоторой окрестности характеристики особенностей не будет.

Полученные таким способом обобщенные решения для $i = 1$ являются центрированной волной разрежения, а при $i = 2$ и $i = 3$ напоминают центрированную волну разрежения.

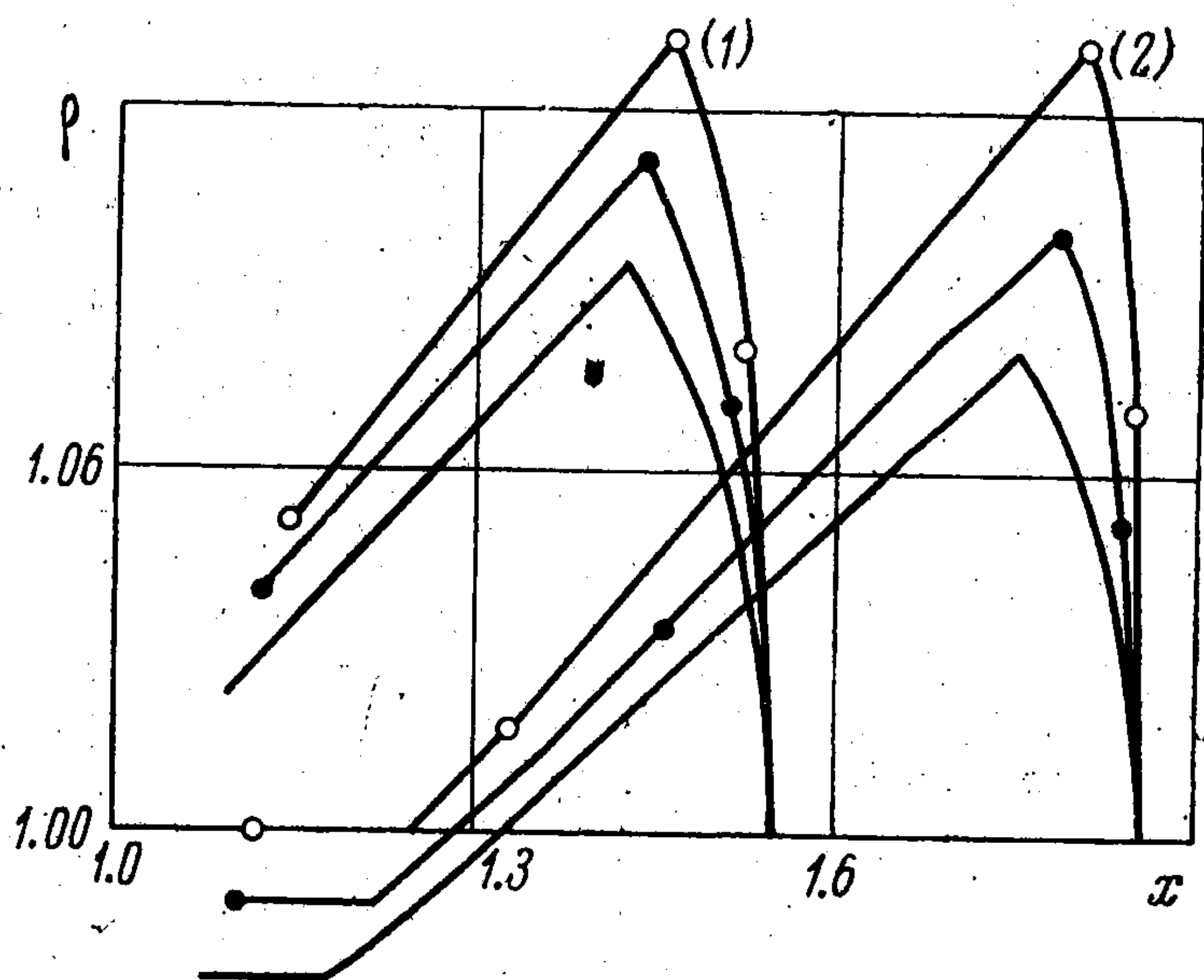
5. С течением времени в решении задачи 1 появляются бесконечные градиенты, возникает ударная волна, нарушается изэнтропичность. С помощью решения задачи 1 можно находить место и время $t = t_*$ возникновения ударной волны [1, 2].

Если ударная волна слабая, то приближенно можно считать, что течение за ней изэнтропическое, потенциальное. Решение задачи 1 можно использовать для приближенного расчета движения возникшей ударной волны и для описания течения газа за ней [1, 2]. Пусть $R(t)$ — скорость газа на ударной волне. Для $R(t)$ справедливо уравнение, являющееся следствием условий Гюгонио [4]

$$(5.1) \quad \Psi_{rr}(R(t), t) R'(t) + \Psi_{rt}(R(t), t) = \frac{\gamma+1}{4} R(t) + \sqrt{\frac{(\gamma+1)^2}{16} R^2(t) + 1}$$

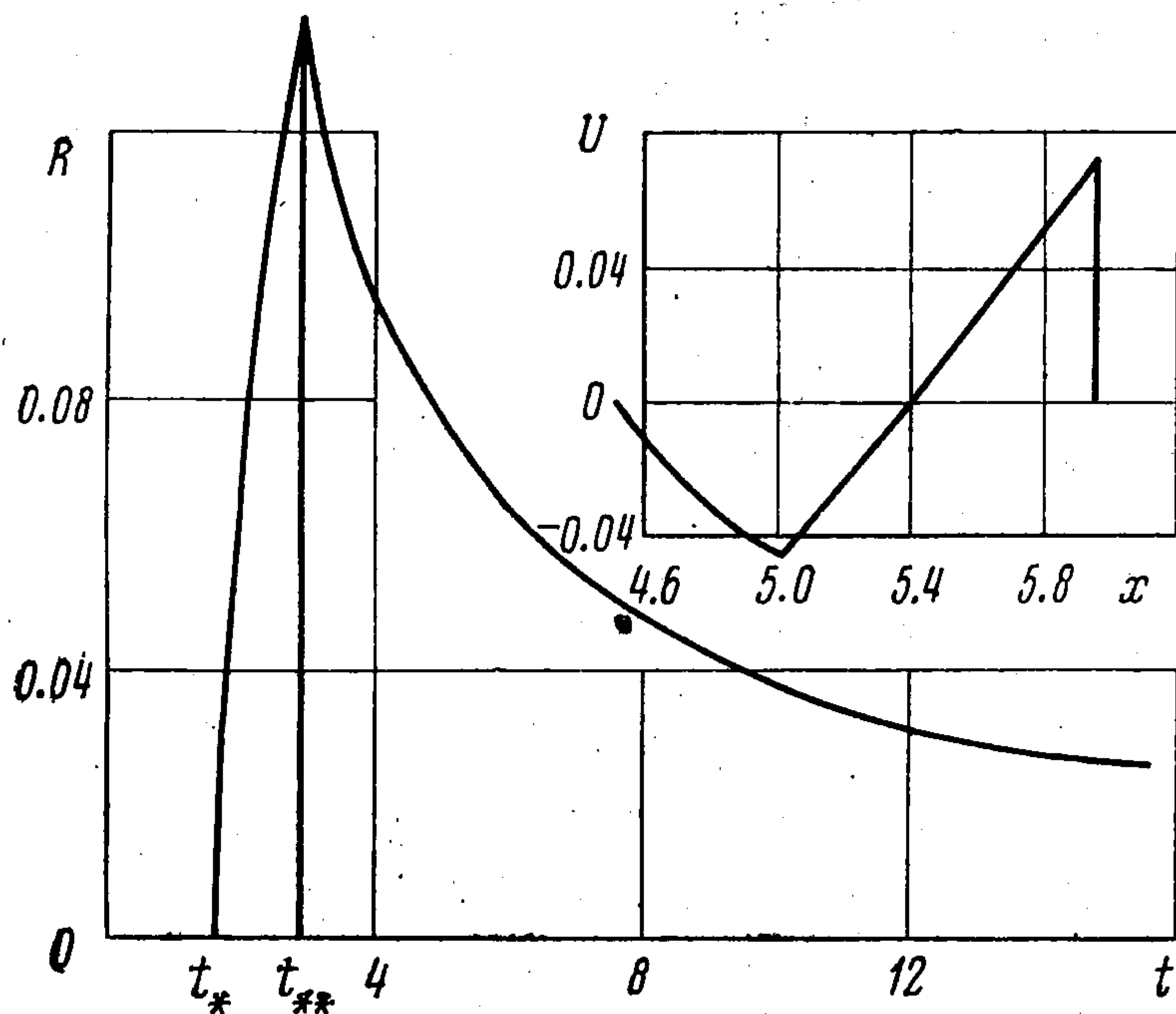
Взяв вместо Ψ конечный отрезок (3.3), уравнение (5.1) можно решать численно.

Характеристика, разделяющая решения задачи 1 и задачи 2 в некоторый момент времени $t = t_{**}$, догонит ударную волну. Предполагается, что в этом случае результатом взаимодействия слабого разрыва и ударной волны является только ударная волна, распространяющаяся по покою. Тогда, начиная с $t = t_{**}$ для приближенного описания движения ударной волны, используется решение задачи 2 — в уравнении (5.1) при $t \geq t_{**}$ за Ψ берется (3.3) решение задачи 2.



Фиг. 3

Замечание. В точной постановке результатом взаимодействия слабого разрыва и ударной волны является не только ударная волна, распространяющаяся по покою, а еще и слабый разрыв, идущий в глубь течения. Но использование изэнтропических потенциальных течений для приближенного описания движения газа за ударной волной приводит к следующему. Если рассматривать слабый разрыв, распространяющийся в глубь течения, то получающаяся характеристическая задача Коши имеет неединственное решение — линия, на которой задается граничное условие (обеспечивающее



Фиг. 4

единственность), известна только тогда, когда известен закон движения ударной волны. Если не рассматривать новую характеристическую задачу Коши, то движение ударной волны однозначно описывается решением соответствующего дифференциального уравнения. В [4] аналогичным образом приближенно описывается взаимодействие слабой ударной волны с догоняющей ее волной разрежения: возникающий слабый разрыв не рассматривается, течение за ударной волной описывается исходной волной разрежения, положение ударной волны однозначно определяется решением соответствующего дифференциального уравнения.

На фиг. 4 приведены расчеты движения ударной волны для $i = 3$, $\chi_1(t) = 1 + \frac{1}{2}t^2 - 1.28t^3/6$, $t_1 = t_2 = \frac{3}{4}$ (величина $\rho - 1$ близка к U и здесь не приводится).

При $i = 1$ за решением задачи 2 газ покоится. При $i = 2$ и $i = 3$ это не так, и существует момент времени, когда в решении задачи 3 Φ_{xx} становится равной бесконечности. Это можно трактовать как возникновение заднего края N -волны [4]. Пока не ясно, какое решение использовать для описания течения между задним краем N -волны и поршнем. Поэтому про положение заднего края N -волны ничего сказать нельзя кроме того, что он не догонит ту точку в течении, описываемом решением задачи 2, где $U = 0$.

В заключение автор благодарит А. Ф. Сидорова за научное руководство и помощь.

Поступила 19 XI 1975

ЛИТЕРАТУРА

1. Сидоров А. Ф. Метод решения некоторых краевых задач для нелинейных уравнений гиперболического типа и распространение слабых ударных волн. ПММ, 1972, т. 36, вып. 3.
2. Зубов Е. Н., Сидоров А. Ф. О решении одной краевой задачи для неустановившегося пространственного течения газа и распространение слабых сферических ударных волн. В сб.: Численные методы механики сплошной среды, т. 3, № 3. Новосибирск, Изд-во ВЦ СО АН СССР, 1972.
3. Баутин С. П. Аналитические решения задачи о движении поршня. В сб.: Численные методы механики сплошной среды, т. 4, № 1. Новосибирск, Изд-во ВЦ СО АН СССР, 1973.
4. Курант Р., Фридрихс К. О. Сверхзвуковое течение и ударные волны. М., Изд-во иностр. лит., 1950.