Прикладная математика и механика. Том 40, 1976

УДК 531.36

АСИМПТОТИЧЕСКАЯ УСТОЙЧИВОСТЬ И ГЛАДКАЯ ЭКВИВАЛЕНТНОСТЬ ОБЫКНОВЕННЫХ УРАВНЕНИЙ

Л. М. Мархашов

(Москва)

Известно, что при определенных условиях асимптотическая устойчивость является грубым свойством [1] (т. е. добавление достаточно малых функций в правые части уравнений не нарушает асимптотической устойчивости). Ниже показано, что в этом случае невозмущенная система является грубой в более широком смысле: всякая гладкая система, возмущенная достаточно малыми гладкими добавками, приводится к невозмущенной обратимым гладким преобразованием. Величина и порядок добавок, а также область существования преобразования оцениваются в явном виде. Требование, при котором данное утверждение имеет место, заключается в существовании функции Ляпунова, допускающей вместе со своей производной определенные оценки. Это требование выполняется, в частности, если правые части невозмущенной системы — однородные функции, положение равновесия асимптотически устойчиво, а в его окрестности нет решений, ограниченных при $-\infty < t < \infty$ (см. [1], стр. 113). Если система аналитична, то оно выполняется, по крайней мере, во всех тех исследованных критических случаях, где зафиксирована асимптотическая устойчивость при $t \to \infty$ или $t \to -\infty$, так как в таких случаях функцией Ляпунова будет аналитическая функция или просто полином.

Поэтому из доказанной теоремы следует, что во всех указанных случаях система приводится гладким преобразованием к полиномиальному виду. Если невозмущенная система линейна, то из доказанной теоремы следует одна теорема о линеаризации из работы [2], если система нелинейна, но ее порядок равен двум,— теорема из работы [3]. Результаты, полученные в работе для нелинейных автономных систем, распространяются и на случай, когда возмущения — непрерывные и ограниченные функции времени. Это позволяет изучать динамику в окрестности асимптотически устойчивых равновесий и периодических режимов, не считаясь с внешними возмущениями широкого класса.

1. Постановка задачи и результат. Рассмотрим вещественную автономную систему уравнений с гладкими правыми частями

$$x_i^{\cdot} = f_i(x) + \varepsilon R_i(x), \quad i = 1, \ldots, n, \ |\varepsilon| < \varepsilon^*, \qquad f_i(0) = R_i(0) = 0 \tag{1.1}$$

Попытаемся выяснить условия существования в окрестности особой точки $x = 0$ гладкого обратимого преобразования, приводящего систему (1.1) к виду

$$x_i^{\cdot} = f_i(x) \tag{1.2}$$

найти величину и порядок «возмущений» $\varepsilon R_i(x)$, а также оценить область существования такого преобразования.

Предположим, что правые части системы (1.1) дважды непрерывно дифференцируемые и удовлетворяют оценкам

$$
(1.3)\qquad \begin{aligned} &|f_i|\leqslant c_1\rho^m, \quad |R_i|\leqslant c_2\rho^{m+\sigma}, \quad \left|\frac{\partial f_i}{\partial x_k}\right|\leqslant c_1\rho^{m-1} \\ &\left|\frac{\partial R_i}{\partial x_k}\right|\leqslant c_2\rho^{m+\sigma-1}, \quad \rho=\|x\|_2{}^2=(x_1{}^2+\ldots+x_n{}^2)^{1/2}\leqslant\delta \end{aligned}
$$

Будем также предполагать, что система (1.2) допускает функцию Ляпунова $V(x)$, удовлетворяющую в области $\Gamma: V(x)\leqslant d$ оценкам

$$
(1.4)\qquad \begin{aligned} &c_0\rho^A\leqslant V\leqslant \nu c_0\rho^A, \quad D_fV\geqslant \mu\rho^{A+m-1} \\ &\left|\frac{\partial V}{\partial x_k}\right|\leqslant \nu c_0\rho^{A-1} \\ &d=\nu c_0\delta^A,\ c_0>0,\ \mu>0,\ A>0,\ \nu\geqslant 1 \end{aligned}
$$

Здесь

$$
D_f=\frac{\partial}{\partial t}+\sum_k f_k\frac{\partial}{\partial x_k}
$$

D_f — оператор дифференцирования вдоль траекторий системы (1.2).

Введем обозначения

$$
(1.5)\qquad \begin{aligned} &k_0=\frac{m-1}{A}, \quad \sigma_0=\frac{\sigma}{A}, \quad \alpha=k_0+\sigma_0+\frac{1}{A}, \quad \mu_0=\mu(\nu c_0)^{-1-k_0} \\ &c_1^*=\frac{c_1\sqrt{n}}{c_0^{k_0}}, \quad c_2^*=\frac{c_2\sqrt{n}}{c_0^{k_0+\sigma_0}}d^{\sigma_0}, \quad C=c_2\sqrt{n}c_0^{-\alpha} \end{aligned}
$$

$$
(1.6)\qquad a=\frac{C'(\nu c_0)^{1/A}d^{\sigma_0+k_0-\beta}\sqrt{n}(\alpha\mu_0-c_1^*)}{(c_2^*+\alpha\nu nc_0c_2d^{\sigma_0})(l-1)+C'd^{\sigma_0}c_0^{1/A}l\sqrt{n}\nu^{1/A}}
$$

Параметры C', l, β стеснены ограничениями

$$
(1.7)\qquad l>1, \quad \beta\geqslant k_0, \quad C'>C
$$

Теорема. Если выполнены условия (1.3), (1.4) и $|\varepsilon|<\varepsilon^*$, $\sigma_0>\sigma^*$, то в открытой области

$$
(1.8)\qquad \Gamma_1: |x_i|<b
$$

существует обратимое, непрерывно дифференцируемое преобразование $x'=x'(x,\varepsilon)$, преобразующее систему (1.1) в систему (1.2).

При $m>1$

$$
(1.9)\qquad \begin{aligned} &\sigma^*=\max\left(1, \frac{c_1^*}{\mu_0}+l\beta-k_0-\frac{1}{A}\right) \\ &\varepsilon^*=\min\left(\frac{\mu_0(\alpha-l\beta)-c_1^*}{B_1}, \frac{\alpha\mu_0-c_1^*}{B+C'(\nu c_0)^{1/A}d^{\sigma_0}\sqrt{n}/l-1}\right) \\ &b=\frac{1}{\sqrt{n}}\left(\frac{d}{\nu c_0}\right)^{1/A}-|\varepsilon|\frac{C'd^{\alpha-\beta}}{a(l-1)} \end{aligned}
$$

При $m=1$

$$
(1.10)\qquad \begin{aligned} &\sigma^*=\max\left(1, \frac{c_1^*}{\mu_0}-\frac{1}{A}\right) \\ &\varepsilon^*=\min\left(\frac{\mu_0}{\nu nc_0c_2d^{\sigma_0}}, \frac{\alpha\mu_0-c_1^*}{B+C'd^{\alpha}/b_0}\right), \quad b_0=\frac{1}{\sqrt{n}}\left(\frac{d}{\nu c_0}\right)^{1/A} \\ &b=\left(\frac{1}{\nu c_0}\right)^{1/A}\frac{1}{\sqrt{n}}-|\varepsilon|\frac{c'd^{\alpha}}{|\lambda|} \end{aligned}
$$

Здесь

$$B = c_2^* + \nu n c_0 c_2 d^{\sigma_*}, \quad B_1 = c_2^* + (\alpha - l\beta)\,\nu n c_0 c_2 d\sigma^{\sigma_*} \tag{1.11}$$

$$\lambda < 0, \quad |\lambda| < \frac{c'(\alpha\mu_0 - c_1^*)\,d^\alpha}{b_0 B + c' d^\alpha}$$

Если $m = 1$, а функции $f_i(x)$ линейны и собственные значения линейной части удовлетворяют условиям $0 < \operatorname{Re}\lambda_1 \leqslant \ldots \leqslant \operatorname{Re}\lambda_n$, то

$$\sigma^* = 0 \text{ при } R^i \in C^1, \quad \sigma^* = 1 \text{ при } R_i \in C^2 \tag{1.12}$$

$$\varepsilon^* = \frac{\operatorname{Re}\lambda_1}{c_2\delta^\sigma(\alpha n + \sqrt{n})}$$

$$b = \frac{\delta}{\sqrt{n}} - |\varepsilon|\frac{c'\delta^{1+\sigma}}{|\lambda|}$$

где

$$(1+\sigma)\operatorname{Re}\lambda_n - \operatorname{Re}\lambda_1 + |\varepsilon|c_2\sqrt{n}\,(1+\alpha\sqrt{n}\delta)^\sigma < \lambda < \tag{1.13}$$
$$< (1+\sigma)\operatorname{Re}\lambda_n$$

В доказательстве теоремы (п. 2) используются леммы, приведенные в п. 3 этой работы.

2. Доказательство теоремы. Пусть

$$x = x(x', \varepsilon', \tau), \quad \varepsilon = \varepsilon' + \tau \; (x = x(x', \varepsilon, 0) = x') \tag{2.1}$$

— однопараметрическая группа преобразований, сохраняющих уравнения (1.1), точку $x = 0$ и осуществляющих сдвиг параметра ε. Пусть далее

$$\frac{\partial}{\partial\varepsilon} + X \equiv \frac{\partial}{\partial\varepsilon} + \sum_i \xi_i(x, \varepsilon)\frac{\partial}{\partial x_i}$$

— оператор алгебры, соответствующей этой группе и

$$D = \frac{\partial}{\partial t} + \sum_i (f_i + \varepsilon R_i)\frac{\partial}{\partial x_i}$$

— оператор дифференцирования вдоль траекторий системы (1.1). Тогда

$$[D, X] = R^*, \quad R^* = \sum_i R_i \frac{\partial}{\partial x_i} \tag{2.2}$$

Этому операторному уравнению отвечает n скалярных уравнений

$$\sum_j (f_j + \varepsilon R_j)\frac{\partial\xi_i}{\partial x_j} = \sum_j\left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j} + \varepsilon\frac{\partial R_i}{\partial x_j}\right)\xi_j(x, \varepsilon) + R_j \tag{2.3}$$

Задача состоит в доказательстве существования непрерывно дифференцируемого решения уравнений (2.3) и нахождении нужных оценок.

Если $\xi_i(x, \varepsilon)$ — некоторое непрерывное решение системы (2.3), то конечные уравнения пребразований (2.1) группы, согласно теории Ли [4], получим в виде решения $x_i = x_i(x', \varepsilon', \tau)$ задачи Коши

$$\frac{\partial x_i}{d\tau} = \xi_i(x, \varepsilon), \quad \frac{d\varepsilon}{d\tau} = 1; \quad x_i|_{\tau=0} = x_i', \quad \varepsilon|_{\tau=0} = \varepsilon' \tag{2.4}$$

Известные теоремы существования и непрерывной зависимости решений от начальных данных позволяют установить область, где решение

$x_i = x_i(x', \varepsilon', \tau)$ существует и непрерывно по x' при $0 \leqslant \tau \leqslant \varepsilon$. По условию преобразования (2.1) ($x_i = x_i(x', \varepsilon', \tau)$) переводят систему (1.1) в систему $\dot{x}_i'' = f_i(x') + \varepsilon' R_i(x')$. Поскольку $\varepsilon = \varepsilon' + \tau$, то при $\tau = \varepsilon$ получим $\varepsilon' = 0$. Следовательно, преобразование $x_i = x_i(x', 0, \varepsilon)$ преобразует систему (1.1) в систему $\dot{x}_i' = f_i(x')$, т. е. в систему (1.2).

Докажем существование непрерывного решения системы (2.3). Рассмотрим в пространстве (x, t) полубесконечный цилиндр $Z = \Gamma \times t$: $V \leqslant l$, $t \geqslant 0$. Если выполнено приведенное ниже условие (2.6), то все траектории системы (1.1), кроме одной ($x = 0$), проникая внутрь Z через основание Γ, покидают его через боковую поверхность. Таким образом, часть S пространства (x, t), ограниченная совокупностью траекторий системы (1.1), выходящих из точек $V(x) = l$, и плоскостью $t = 0$, целиком содержит Z.

Для получения условия (2.6) найдем оценку снизу для функции $DV(x)$

$$DV = D_f V + \varepsilon \sum_i R_i \frac{\partial V}{\partial x_i} \geqslant \mu_0 V^{1+k_0} - |\varepsilon| \sqrt{R_1^2 + \ldots + R_n^2} \times \tag{2.5}$$

$$\times \sqrt{\left(\frac{\partial V}{\partial x_1}\right)^2 + \ldots + \left(\frac{\partial V}{\partial x_n}\right)^2} \geqslant \mu_0 V^{1+k_0} - |\varepsilon|\, n c_2 \rho^{m+\sigma} \nu c_0 \rho^{A-1} \geqslant$$

$$\geqslant (\mu_0 - |\varepsilon|\, \nu n c_0 c_2 d^{\sigma_0})\, V^{1+k_0}$$

Получим $DV > 0$, если

$$|\varepsilon| < \frac{\mu_0}{\nu n c_0 c_2 d^{\sigma_0}} \tag{2.6}$$

Рассмотрим задачу Коши для гиперболической системы

$$D\psi_i(t, x, \varepsilon) = \sum_k \left(\frac{\partial f_i}{\partial x_k} + \varepsilon \frac{\partial R_i}{\partial x_k}\right) \psi_k(t, x, \varepsilon), \quad \psi_i(0, x, \varepsilon) = R_i(x) \tag{2.7}$$

Так как $S \supset Z$ и коэффициенты при $\psi_i(t, x, \varepsilon)$ в правых частях системы (2.7) непрерывно дифференцируемы, то согласно лемме 1 решение $\psi_i(t, x, \varepsilon)$ задачи Коши существует, единственно и непрерывно дифференцируемо в Z.

Согласно лемме 2 равномерная при $V \leqslant l$ сходимость интегралов

$$I_i(x, \varepsilon) = \int_0^\infty \psi_i(t, x, \varepsilon)\, dt, \quad J_{ij}(x, \varepsilon) = \int_0^\infty \frac{\partial \psi_i}{\partial x_j}\, dt$$

гарантирует существование непрерывно дифференцируемого решения

$$\xi_i(x, \varepsilon) = I_i(x, \varepsilon) \tag{2.8}$$

системы (2.3).

Для доказательства равномерной сходимости интегралов построим оценку для функций $\psi_i(t, x, \varepsilon)$. Верно дифференциальное неравенство

$$Dv \leqslant (c_1^* + |\varepsilon|\, c_2^*)\, V^{k_0} v, \quad v = (\psi_1^2 + \ldots + \psi_n^2)^{1/2} \tag{2.9}$$

В самом деле, умножая i-е уравнение системы (2.7) на ψ_i и складывая все уравнения, получим

$$vDv \leqslant \sum_{i,k} \left(\left| \frac{\partial f_i}{\partial x_k} \right| + |\varepsilon| \left| \frac{\partial R_i}{\partial x_k} \right| \right) |\psi_i| |\psi_k| \leqslant$$
$$\leqslant (c_1\rho^{m-1} + |\varepsilon| c_2\rho^{m-1+\sigma}) \sum_{i,k} |\psi_i| |\psi_k| \leqslant (c_1\rho^{m-1} + |\varepsilon| c_2\rho^{m-1+\sigma}) \sqrt{n} v^2$$

Использовав теперь первое из неравенств (1.4) и обозначения (1.5), придем к неравенству (2.9).

Рассмотрим случай $m > 1$.

Функция

$$u = C'V^\alpha (1 + aV^\beta t)^{-l} \tag{2.10}$$

мажорирует функцию $v(t, x)$, если $C' > C$, а параметры α, β, l, C удовлетворяют условиям теоремы.

Доказательство этого утверждения поведем от противного. Имеем

$$u(0, x) - v(0, x) = C'V^\alpha - \sqrt{R_1^2 + \ldots + R_n^2} > CV^\alpha -$$
$$- c_2\sqrt{n}\, \rho^{m+\sigma} \geqslant c_2 \sqrt{n}\, c_0^{-\alpha} V^\alpha - c_2 \sqrt{n}\, V^{(m+\sigma)/A} c_0^{-(m+\sigma)/A} \equiv 0$$

т. е. при $t = 0$ будет $v < u$. Предположим теперь, что разность $u - v$ становится где-либо в Z отрицательной. Тогда по свойству траекторий системы (1.1), обеспеченному условием (2.6), найдется такая траектория, выходящая из Γ, что вдоль нее до некоторой точки A будет $u - v > 0$, а в самой точке A будет $u = v$. В точке A этой траектории, следовательно, получим

$$u = v, \quad Dv \geqslant Du \tag{2.11}$$

Оценим в точке A разность

$$Dv - (c_1^* + |\varepsilon| c_2^*) V^{k_0} v \geqslant Du - (c_1^* + |\varepsilon| c_2^*) V^{k_0} u = \tag{2.12}$$
$$= \frac{u}{V(1 + aV^\beta t)} [\alpha DV - alV^{\beta-1} + a(\alpha - l\beta) V^\beta t DV] -$$
$$- (c_1^* + |\varepsilon| c_2^*) V^{k_0} u \equiv \frac{u}{V(1 + aV^\beta t)} (\omega_1 + aV^\beta t \omega_2)$$
$$\omega_1 \equiv \alpha DV - alV^{(\beta+1)} - (c_1^* + |\varepsilon| c_2^*) V^{1+k_0}$$
$$\omega_2 \equiv (\alpha - l\beta) DV - (c_1^* + |\varepsilon| c_2^*) V^{1+k_0}$$

Используя (2.5) и условие $\beta \geqslant k_0$, получим

$$\omega_1 > [\alpha(\mu_0 - |\varepsilon| \nu n c_0 c_2 d^{\sigma_0}) - (c_1^* + |\varepsilon| c_2^* + ald^{\beta-k_0})] V^{1+k_0}$$
$$\omega_2 \geqslant [(\alpha - l\beta)(\mu_0 - |\varepsilon| \nu n c_0 c_2 d^{\sigma_0}) - (c_1^* + |\varepsilon| c_2^*)] V^{1+k_0}$$

В силу выбора ε^* (2.9) получим $\omega_2 \geqslant 0$, в силу выбора a и ε (1.6) будет $\omega_1 > 0$. Учитывая (2.11), устанавливаем, что в точке $A \in Z$

$$Dv \geqslant Du > (c_1^* + |\varepsilon| c_2^*) V^{k_0} v$$

что противоречит неравенству (2.9). Таким образом, находим, что всюду в Z

$$v(t, x) \leqslant u(t, x) \tag{2.13}$$

Оценим теперь функции $\xi_i(x, \varepsilon)$

$$\xi_i(x,\varepsilon) = I_i(x,\varepsilon) \leqslant \int_0^\infty u(t,x)\,dt = \frac{C'V^{\alpha-\beta}}{a(l-1)}\left[\frac{1}{(1+aV^{\beta}t)^{l-1}}\bigg|_{t=0} - \right. \tag{2.14}$$

$$\left. - \frac{1}{(1+aV^{\beta}t)^{l-1}}\bigg|_{t=\infty}\right] = \frac{C'V^{\alpha-\beta}}{a(l-1)}$$

В силу определения α и первого условия (1.9) имеем $\alpha - \beta > 0$.

Поэтому в области Γ функции $\xi_i(x, \varepsilon)$ непрерывны

$$|\xi_i(x,\varepsilon)| \leqslant \frac{C'V^{\alpha-\beta}}{a(l-1)} \leqslant \frac{C'd^{\alpha-\beta}}{a(l-1)} \equiv M = \max_{\Gamma}|\xi_i| \tag{2.15}$$

Доказательство равномерной сходимости интегралов $J_{ij}(x, \varepsilon)$ и, следовательно, непрерывной дифференцируемости функций ξ_i проводится аналогично.

Уравнения и начальные условия соответствующей задачи Коши получаются из уравнений (2.7) однократным дифференцированием по переменным x_j, а при оценках используется мажоранта вида (2.10).

Рассмотрим теперь уравнения (2.4), функции ξ_i, очевидно, непрерывно дифференцируемы в замкнутом кубе

$$|x| \leqslant \frac{1}{\sqrt{n}}\left(\frac{d}{\nu c_0}\right)^{1/A} \equiv b_0$$

По теореме существования и единственности и теореме о дифференцируемости по начальным значениям решение $x = x(x', \varepsilon', \tau)$ системы (2.4) непрерывно дифференцируемо по x_i', τ при $|\tau| \leqslant |\varepsilon|$, $|x'| \leqslant b < b_0$, если выполнено условие

$$|\varepsilon| < \frac{b_0 - b}{M}, \quad M = \max|\xi_i|$$

Учитывая определение (1.9) числа b и оценку (2.16), видим, что это условие выполнено, поскольку $|\varepsilon| < \varepsilon^*$. Положительность чисел ε^* и a в формулах (1.9) и (1.6) гарантируется условием $\sigma_0 > \sigma^*$, положительность числа b — условием $|\varepsilon| < \varepsilon^*$. Из формулы (1.9) видно, что выполнено также условие (2.6).

Рассмотрим теперь случай $m = 1$. Отличие от предыдущего состоит лишь в выборе мажорирующей функции

$$u = C'V^{\alpha}e^{\lambda t}, \quad C' > C$$

Получим в точке A предполагаемого нарушения неравенства $u - v > 0$ в силу условий (1.10)

$$\begin{aligned} &Dv - (c_1^* + |\varepsilon|c_2^*)\,v \geqslant Du - (c_1^* + |\varepsilon|c_2^*)\,u = \\ &= [\lambda + \alpha(\mu_0 - |\varepsilon|\,\nu n c_0 c_2 d^{\sigma_0}) - (c_1^* + |\varepsilon|c_2^*)]\,Vu > 0 \end{aligned}$$

Нетрудно также установить, что число b, определенное последней формулой (1.12), положительно благодаря условию $|\varepsilon| < \varepsilon^*$. В рассматриваемом случае число $M = \max|\xi_i|$ найдено из оценки

$$|\xi_i| \leqslant \int_0^\infty u(t,x)\,dt = C'V^{\alpha}\int_0^\infty e^{\lambda t} = \frac{C'V^{\alpha}}{|\lambda|} < \frac{C'd^{\alpha}}{|\lambda|} = M$$

Пусть теперь $m = 1$, функции $f_i(x)$ линейны и собственные значения линейной части системы (1.1) удовлетворяют условиям

$$0 < \operatorname{Re}\lambda_1 \leqslant \ldots \leqslant \operatorname{Re}\lambda_n$$

В этом частном случае оценки могут быть несколько упрощены, а оценка для σ улучшена. Система уравнений (1.1) (вещественные корни предлагаются простыми) для $t_1 = -t > 0$ имеет вид

$$dx_i/dt_1 = -\operatorname{Re}\lambda_i x_i + \operatorname{Im}\lambda_i y_i - \varepsilon R_i, \quad |R_i| \leqslant c_2\rho^{1+\sigma} \tag{2.16}$$
$$dy_i/dt_1 = -\operatorname{Im}\lambda_i x_i - \operatorname{Re}\lambda_i y_i - \varepsilon R_i, \quad i = 1, \ldots, n_1$$
$$dz_j/dt_1 = -\lambda_j z_j - \varepsilon R_j, \quad j = n_1 + 1, \ldots, n$$

Из уравнений соответствующей задачи Коши в области $\rho \leqslant \delta$, $t_1 \geqslant 0$ имеем оценку

$$D_{t_1} v \leqslant (-\operatorname{Re}\lambda_1 + |\varepsilon| c_2\sqrt{n}\delta^\sigma)v \tag{2.17}$$

где D_{t_1} — оператор дифференцирования вдоль траекторий системы (2.16). Мажорирующую функцию возьмем в виде

$$u = C'\rho^\alpha e^{\lambda t_1}, \quad C' > C$$

В точке A, где предположим нарушение неравенства $u - v > 0$, будет $u = v$ и

$$D_{t_1}v \geqslant D_{t_1}u = [\lambda - \alpha(\operatorname{Re}\lambda_n + |\varepsilon| c_2 n\delta^\sigma)]\, v$$

Если λ выбрано по условию (1.13) и $|\varepsilon| < \varepsilon^*$, то

$$D_{t_1}v > (-\operatorname{Re}\lambda_1 + |\varepsilon| c_2\sqrt{n}\delta^\sigma)\, v$$

что противоречит неравенству (2.17). Поэтому в Γu действительно мажорирует $v: v \leqslant u$. Возвращаясь к переменной t, получим при $t \leqslant 0$

$$u = C'\rho^\alpha e^{-\lambda t}$$

Согласно лемме 3 решение системы (2.3) дается формулой

$$\xi_i(x) = \int\limits_0^{T(x)} \psi_i(t, x)\, dt$$

где ψ_i — решение задачи Коши (2.7), а функция $T(x)$ — какое-либо стационарное решение уравнения $DT = 1$. Рассмотрим решение этого уравнения с граничным условием $T(x)|_{\rho=\delta} = 0$; так как имеет место оценка

$$(\operatorname{Re}\lambda_1 - |\varepsilon| c_2 n\delta^\sigma)\rho \leqslant \frac{d\rho}{dt} \leqslant (\operatorname{Re}\lambda_n + |\varepsilon| c_2 n\delta^\sigma)\rho \tag{2.18}$$

то при выполнении условия (1.12) система (1.1) асимптотически устойчива при $t \to -\infty$. Согласно лемме 4, $T(x)$ — время, за которое изображающая точка системы (1.1) с начальным условием на сфере $\rho = \delta$ достигнет точки с координатами $x_1, \ldots, x_n$. Уже отсюда ясно (и это нетрудно доказать вполне строго), что $T(x)$ непрерывна в шаре $\rho \leqslant \delta$ с выколотой точкой $\rho = 0$. Интегрируя неравенство (2.18) в пределах от 0 до $T(x)$, получим

$$(\operatorname{Re}\lambda_1 - |\varepsilon| c_2 n\delta^\sigma) T(x) \leqslant \ln\left|\frac{\rho}{\delta}\right| \leqslant (\operatorname{Re}\lambda_n + |\varepsilon| c_2 n\delta^\sigma) T(x)$$

Отсюда видно, что в области Г, где $\rho \leqslant \delta$

$$\frac{1}{\operatorname{Re}\lambda_n + |\varepsilon| c_2 n\delta^\sigma} \ln\left|\frac{\rho}{\delta}\right| \leqslant T(x) \leqslant 0$$

Оценка для $\xi_i(x, \varepsilon)$ дает

$$|\xi_i| \leqslant \left|\int_0^{T(x)} \psi_i(t, x, \varepsilon)\, dt\right| \leqslant \int_{T(x)}^0 u\, dt = \frac{C'\rho^\alpha}{\lambda}(e^{-\lambda T(x)} - 1)$$

Выбор λ согласно условию (1.13) гарантирован условием $|\varepsilon| < \varepsilon^*$:

$$(1 + \sigma) \operatorname{Re}\lambda_n - \operatorname{Re}\lambda_1 + |\varepsilon| c_2\delta^\sigma ((1 + \sigma) n + \sqrt{n}) < (1 + \sigma) \operatorname{Re}\lambda_n$$

Так как $\lambda > 0$, то

$$|\xi_i| \leqslant \frac{C'\rho^\alpha}{\lambda} \exp \frac{\lambda}{\operatorname{Re}\lambda_n + |\varepsilon| c_2 n\delta^\sigma} \ln\left|\frac{\delta}{\rho}\right| =$$

$$= \frac{C'\rho^\alpha}{\lambda}\left(\frac{\delta}{\rho}\right)^{\lambda/(\operatorname{Re}\lambda_n + |\varepsilon| c_2 n\delta^\sigma)}$$

В силу выбора λ по формуле (1.13)

$$\varkappa \equiv \alpha - \frac{\lambda}{\operatorname{Re}\lambda_n + |\varepsilon| c_2 n\delta^\sigma} > 0 \tag{2.19}$$

Поэтому

$$|\xi_i| \leqslant \frac{C'\delta^{\alpha-\varkappa}}{\lambda} \rho^\varkappa \leqslant \frac{C'\delta^\alpha}{\lambda} \equiv M \tag{2.20}$$

Формулы (2.19) и (2.20) показывают, что функции непрерывны в шаре $\rho \leqslant \delta$, включая точку $\rho = 0$ при любом $\sigma > 0$. Выбор λ согласно формуле (1.13) обеспечивает выполнение условия $b > 0$, поскольку C' можно взять сколь угодно близким к C.

3. Доказательство лемм. Рассмотрим задачу Коши (уравнения (2.7))

$$D\psi_i(t, x, \varepsilon) = \sum_k \left(\frac{\partial f_i}{\partial x_k} + \varepsilon \frac{\partial R_i}{\partial x_k}\right) \psi_k(t, x, \varepsilon), \quad \psi_i(0, x, \varepsilon) = R_i(x)$$

Лемма 1. В области Z решение задачи Коши определено, единственно и непрерывно дифференцируемо. Идея доказательства такого рода утверждений для систем гиперболического типа принадлежит И. Г. Петровскому (см. [5], стр. 86—92) и состоит в следующем. Поскольку D — оператор дифференцирования вдоль траекторий системы (1.1), то $D \equiv d / dt$, т. е. D является полной производной в силу уравнений (1.1). Пусть $x = u(t, x_0)$ — общее решение этой системы, $x_0 = u(0, x_0)$. Тогда $x_0 = u(-t, x)$.

Рассмотрим область S пространства (x, t), образованную совокупностью траекторий системы (1.1), выходящих при $t = 0$ из Г ($V(x) \leqslant d$). Как было отмечено ранее, $S \supset Z$. Зафиксируем в Z произвольную точку (t, x) и обозначим через L часть траектории от точки (t, x) до ее пересечения в некоторой точке $(0, x_0)$ с плоскостью $t = 0$. Интегрируя уравнения системы (2.7) вдоль кривой L, получим

$$\psi_i(t, x, \varepsilon) - \psi_i(0, x_0, \varepsilon) = \int\limits_L \sum_k \left(\frac{\partial f_i}{\partial x_k} + \varepsilon \frac{\partial R_i}{\partial x_k}\right) \psi_k \, dt$$

причем для всякого $x \in \Gamma$ будет $x_0 = u(-t, x) \in \Gamma$. В силу начальных условий

$$\psi_i(t, x, \varepsilon) = R_i(u(-t, x)) + \int\limits_L \left(\sum_k \frac{\partial f_i}{\partial x_k} + \varepsilon \frac{\partial R_i}{\partial x_k}\right) \psi_k \, dt \tag{3.1}$$

Всякое решение задачи Коши (2.7) является, очевидно, решением системы интегральных уравнений (3.1) и обратно. Дальнейшее доказательство использует систему последовательных приближений

$$\psi_1^{(0)}(t, x, \varepsilon) = R_i(u(-t, x))$$

$$\psi_i^{(j+1)}(t, x, \varepsilon) = R_i(u(-t, x)) + \int\limits_L \sum_k \left(\frac{\partial f_i}{\partial x_k} + \varepsilon \frac{\partial R_i}{\partial x_k}\right) \psi_k^{(j)} \, dt$$

и ничем не отличается от того, которое приведено в цитированной книге [4] для системы второго порядка. Оказывается, можно построить числовой мажорантный сходящийся ряд, что показывает равномерную сходимость ряда

$$\psi_i^{(0)}(t, x) + \sum_{j=0}^{\infty} (\psi_i^{(j+1)}(t, x, \varepsilon) - \psi_i^{(j)}(t, x, \varepsilon))$$

Этим доказывается непрерывность в Z решения задачи Коши.

Лемма 2. Пусть $\psi_i(t, x, \varepsilon)$ — решение задачи Коши, интегралы I_i, J_{ij} равномерно сходятся при $V(x) \leqslant l$ и $\lim\limits_{t\to\infty} \psi_i(t, x) = 0$. Тогда функции

$$\xi_i(x, \varepsilon) = \int\limits_0^{\infty} \psi_i(t, x, \varepsilon) \, dt$$

дают непрерывно-дифференцируемое решение системы (2.3).

Доказательство. Очевидно, достаточно показать, что функции $\xi_i(x, \varepsilon)$ удовлетворяют системе (2.3). Интегрируя уравнения (2.8) в пределах от 0 до ∞ и учитывая начальные условия, получим

$$\sum_k \left(f_k^* \frac{\partial \xi_i}{\partial x_k} - \xi_k \frac{\partial f_i^*}{\partial x_k}\right) = \int\limits_0^{\infty} \sum_k \left(f_k^* \frac{\partial \psi_i}{\partial x_k} - \psi_k \frac{\partial f_i^*}{\partial x_k}\right) dt =$$

$$= -\int\limits_0^{\infty} \frac{\partial \psi_i}{\partial t} dt = \psi_i(0, x, \varepsilon) - \psi_i(\infty, x, \varepsilon) = R_i(x)$$

Лемма 3. Пусть $\psi_i(t, x, \varepsilon)$ — решение задачи Коши и $T(x)$ — произвольное стационарное решение уравнения $DT = 1$. Тогда функции

$$\xi_i(x, \varepsilon) = \int\limits_0^{T(x)} \psi_i(t, x, \varepsilon) \, dt$$

дают решение системы (2.3).

Доказательство

$$\sum_k \left(f_k^* \frac{\partial \xi_i}{\partial x_k} - \xi_k \frac{\partial f_i^*}{\partial x_k} \right) = \sum_k f_k^* \left(\int_0^{T(x)} \frac{\partial \psi_i}{\partial x_k} + \psi_i (T, x) \frac{\partial T}{\partial x_k} \right) -$$

$$- \int_0^{T(x)} \sum_k \psi_k \frac{\partial f_i^*}{\partial x_k} dt = - \int_0^{T(x)} \frac{\partial \psi_i}{\partial t} dt + \psi_i (T(x), x, \varepsilon) DT =$$

$$= \psi_i (0, x, \varepsilon) + \psi_i (T, x, \varepsilon)(DT - 1) = R_i (x)$$

Следствие. Пусть $\psi_i^* (t, x)$ — произвольное решение уравнений (2.7), а $T_1 (x)$, $T_2 (x)$ — два различных решения уравнения $DT = 1$. Тогда

$$\xi_i^* (x) = \int_{T_1(x)}^{T_2(x)} \psi_i^* (t, x) \, dt$$

компоненты оператора

$$Y = \sum_i \xi_i^* (x) \, \partial / \partial x_i$$

однопараметрической группы симметрии системы (1.1). Доказательство вытекает из сопоставления соотношений

$$[D, X_1] = R^*, \ [D, X_2] = R^*, \ Y = X_2 - X_1 : [D, Y] = 0$$

Лемма 4. Пусть $T (x)$ — произвольное решение уравнения $DT = 1$. Тогда $t = T (x) - T (x_0)$ — время движения вдоль траектории системы (1.1) от точки x_0 до точки x.

Доказательство

$$1 = DT = \frac{d}{dt} T (u (x_0, t))$$

Отсюда $T (u (x_0 t)) = t + \Phi (x_0)$. При $t = 0$ $\Phi (x_0) = T (x_0)$ и, следовательно, $t = T (x) - T (x_0)$.

Поступила 28 I 1976

ЛИТЕРАТУРА

1. *Красовский Н. Н.* Некоторые задачи теории устойчивости движения. М., Физматгиз, 1959.
2. *Hartman Ph.* On local homeomorphisms of Euclidean spaces. Bol. Soc. Math. Mexicana. Ser. 2, 1960, vol. 5, No. 2, p. 220—241.
3. *Бибиков Ю. Н.* О приводимости системы двух дифференциальных уравнений к нормальной форме. Дифференциальные уравнения, 1971, т. 7, вып. 10.
4. *Понтрягин Л. С.* Непрерывные группы. М., Гостехиздат, 1956.
5. *Петровский И. Г.* Лекции об уравнениях с частными производными. М.— Л., Гостехиздат, 1950.