Прикладная математика и механика. Том 40, 1976

УДК 531.36

ОБ УСТОЙЧИВОСТИ ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ ПРЕЦЕССИИ СПУТНИКА НА ЭЛЛИПТИЧЕСКОЙ ОРБИТЕ

А. П. Маркеев, Т. Н. Чеховская

(Москва)

Изучается устойчивость движения динамически симметричного спутника относительно центра масс в центральном ньютоновском гравитационном поле. Спутник представляет собой твердое тело, орбита его центра масс эллиптическая. Исследуется частный случай движения, когда ось симметрии спутника перпендикулярна плоскости орбиты (так называемый случай цилиндрической прецессии [1,2]), а проекция его абсолютной угловой скорости на ось симметрии равна нулю. Применяются аналитические и численные методы исследования. В пространстве параметров задачи (инерционный параметр и эксцентриситет орбиты) получены области неустойчивости по Ляпунову и области устойчивости в первом приближении. В последних проведено подробное нелинейное исследование и показана формальная устойчивость [3] цилиндрической прецессии спутника. Рассмотрен также вопрос об устойчивости для большинства начальных условий [4].

1. Пусть $OXYZ$ — орбитальная система координат (ось OX направлена по трансверсали к орбите, OY — по бинормали и OZ — вдоль радиус-вектора центра масс O спутника). Через $Oxyz$ обозначим систему координат, связанную со спутником; ось Oz этой системы координат направлена по оси симметрии спутника. Положение связанной системы координат относительно орбитальной определяется при помощи углов Эйлера ψ, ϑ, φ (ψ — угол прецессии, ϑ — угол нутации, φ — угол собственного вращения).

Линейные размеры спутника предполагаются малыми по сравнению с размерами орбиты, поэтому [2] можно считать, что движение спутника относительно центра масс не влияет на орбиту самого центра масс. При сделанных предположениях движение спутника относительно центра масс может быть описано каноническими дифференциальными уравнениями с функцией Гамильтона вида [5]

$$H = \frac{p_\psi^2}{2(1+e\cos\nu)^2\sin^2\vartheta} + \frac{p_\vartheta^2}{2(1+e\cos\nu)^2} - p_\psi \operatorname{ctg}\vartheta\cos\psi - \tag{1.1}$$

$$- \frac{\alpha\beta(1-e^2)^{3/2}}{(1+e\cos\nu)^2} p_\psi \frac{\cos\vartheta}{\sin^2\vartheta} - p_\vartheta \sin\psi + \alpha\beta(1-e^2)^{3/2}\frac{\cos\psi}{\sin\vartheta} +$$

$$+ \frac{\alpha^2\beta^2(1-e^2)^3}{2(1+e\cos\nu)^2}\operatorname{ctg}^2\vartheta + \frac{3}{2}(\alpha-1)(1+e\cos\nu)\cos^2\vartheta$$

$$\alpha = \frac{C}{A} \quad (0\leqslant\alpha\leqslant 2), \quad \beta = \frac{r_0}{\omega_0}, \quad \omega_0 = \frac{2\pi}{\tau} \tag{1.2}$$

Здесь A и C — экваториальный и полярный моменты инерции спутника, e — эксцентриситет орбиты центра масс спутника, ν — истинная аномалия, принимаемая за независимую переменную, τ — период обращения по орбите, r_0 — проекция абсолютной угловой скорости спутника на ось симметрии, являющаяся интегралом движения. Через p_ψ и p_ϑ в (1.1) обозначены импульсы, канонически сопряженные с переменными ψ и ϑ.

Уравнения движения, соответствующие гамильтониану (1.1), имеют такое частное решение [6]:

$$\vartheta_0 = \pi/2, \quad \psi_0 = \pi, \quad p_{\vartheta_0} = 0, \quad p_{\psi_0} = 0 \tag{1.3}$$

Это решение соответствует так называемой цилиндрической прецессии спутника [1], для которой во все время движения ось симметрии спутника перпендикулярна плоскости орбиты, а сам спутник вращается относительно оси симметрии с постоянной угловой скоростью r_0.

Задача об устойчивости цилиндрической прецессии спутника на эллиптической орбите рассматривалась в работах [7, 8]. Основные результаты этих работ связаны с исследованием устойчивости линеаризованных уравнений движения и с приближенным анализом нелинейных колебаний оси симметрии спутника. В данной работе задача об устойчивости цилиндрической прецессии спутника рассматривается в строгой нелинейной постановке. Ограничимся случаем такой прецессии, когда параметр β в гамильтониане (1.1) равен нулю, что соответствует поступательному движению спутника в абсолютном пространстве. При исследовании применяются как аналитические (при малых значениях e), так и численные (при произвольных e) методы.

2. Сделав в гамильтониане (1.1) замену переменных

$$\vartheta = \pi/2 + q_1, \quad \psi = \pi + q_2, \quad p_\vartheta = p_1, \quad p_\psi = p_2 \tag{2.1}$$

получим выражение для функции Гамильтона возмущенного движения. Легко проверить, что в разложении гамильтониана возмущенного движения в ряд будут отсутствовать формы H_m нечетной степени. Имеем

$$H = H_2 + H_4 + H_6 + \ldots \tag{2.2}$$

Нужные в дальнейшем исследовании формы H_2 и H_4 имеют вид (при получении разложения (2.2) величину β в (1.1) положили равной нулю)

$$H_2 = \frac{1}{2(1+e\cos\nu)^2}(p_1^2 + p_2^2) + p_1q_2 - q_1p_2 + \frac{3}{2}(\alpha - 1)(1 + e\cos\nu)q_1^2 \tag{2.3}$$

$$H_4 = -\frac{1}{2}(\alpha - 1)(1 + e\cos\nu)q_1^4 + \frac{1}{2(1+e\cos\nu)^2}q_1^2p_2^2 - \frac{1}{3}q_1^3p_2 + \frac{1}{2}q_1q_2^2p_2 - \frac{1}{6}q_2^3p_1 \tag{2.4}$$

В случае круговой орбиты ($e = 0$) устойчивость цилиндрической прецессии спутника исследовалась многими авторами [1, 5, 9–14]. В частности, из работ [5, 9–11, 14] следует, что на круговой орбите при $\beta = 0$ цилиндрическая прецессия будет устойчивой по Ляпунову при всех значениях параметра α на интервале $1 < \alpha < 4/3$. Отметим также, что на круговой орбите в случаях $0 \leqslant \alpha < 1$ и $4/3 < \alpha \leqslant 2$ рассматриваемая прецессия неустойчива по Ляпунову [9–13].

3. В случае эллиптической орбиты изучим сначала устойчивость в первом приближении. Для малых значений эксцентриситета рассмотрим задачу о параметрическом резонансе. При $e = 0$ каноническая замена переменных $q_i, p_i \to q_i', p_i'$, осуществляемая по формулам

$$q_1 = a_1 p_1' - a_2 p_2', \quad q_2 = -a_1\omega_1(1+b_1)q_1' - a_2\omega_2(1+b_2)q_2' \tag{3.1}$$

$$p_1 = a_1\omega_1 b_1 q_1' + a_2\omega_2 b_2 q_2', \quad p_2 = a_1 b_1 p_1' - a_2 b_2 p_2'$$

$$b_i = \frac{1-\omega_i^2}{1+\omega_i^2}, \quad a_i = \frac{1+\omega_i^2}{\sqrt{\omega_i|\omega_i^2-1|(\omega_i^2+3)}}$$

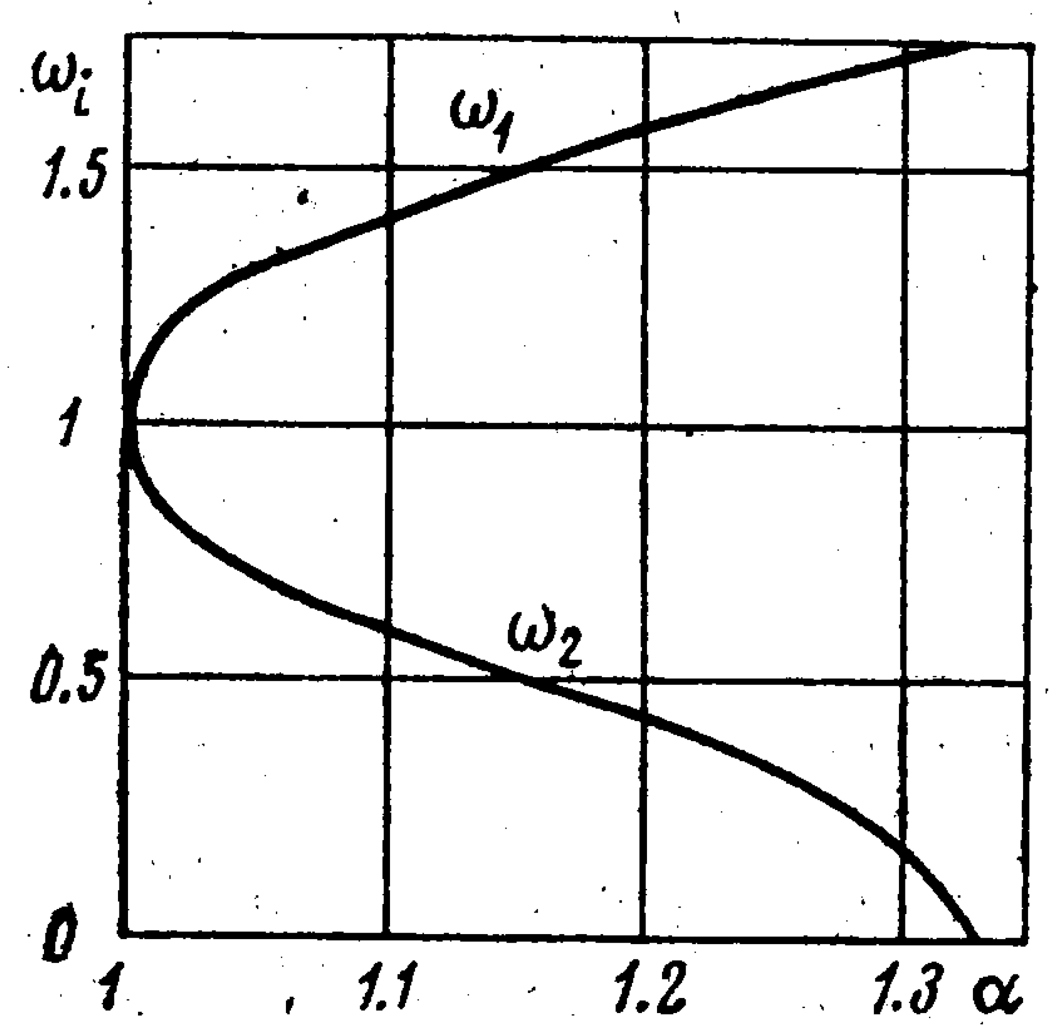
где $\omega_i = \omega_i(\alpha)$ $(i = 1, 2;\ \omega_1 > \omega_2 > 0)$ — корни уравнения

$$\omega^4 - (3\alpha - 1)\omega^2 + (4 - 3\alpha) = 0 \tag{3.2}$$

приводит форму H_2 к виду

$$H_2 = {}^1/_2\omega_1(q_1'^2 + p_1'^2) - {}^1/_2\omega_2(q_2'^2 + p_2'^2) \tag{3.3}$$

При $0 < e \ll 1$ возможна неустойчивость из-за явления параметрического резонанса. Используя теорему Крейна — Гельфанда — Лидского [15], получаем, что при малых e в рассматриваемой задаче неустойчивость возможна только вблизи таких значений параметра α, для которых хотя бы одна из величин $2\omega_1$, $2\omega_2$ или $\omega_1 - \omega_2$ будет целым числом.



Фиг. 1

Зависимости частот ω_1 и ω_2 от α представлены на фиг. 1. Используя (3.2), можно показать, что в рассматриваемой задаче при малых e и $1 < \alpha < {}^4/_3$ неустойчивость возможна только в следующих трех случаях:

$$\omega_1 = {}^3/_2, \quad \omega_2 = {}^1/_2, \quad \omega_1 - \omega_2 = 1 \tag{3.4}$$

Соответствующие значения параметра α таковы: $\alpha_1 = 1.1603$, $\alpha_2 = 1.1500$, $\alpha_3 = 1.1547$.

При $e \neq 0$ в плоскости e, α из точек α_i $(i = 1,2,3)$ исходят области неустойчивости. При малых e уравнения границ областей неустойчивости можно найти аналитически. Оказалось, что область неустойчивости, соответствующая первому из резонансов (3.4), обнаруживается только в третьем приближении по e. Для второго и третьего резонансов из (3.4) области неустойчивости обнаруживаются уже в первом приближении по e. Вычисления показали, что уравнения границ соответствующих областей неустойчивости имеют вид

$$\alpha = \alpha_2 \pm e\cdot 0.015 + O(e^2), \quad \alpha = \alpha_3 \pm e\cdot 0.211 + O(e^2)$$

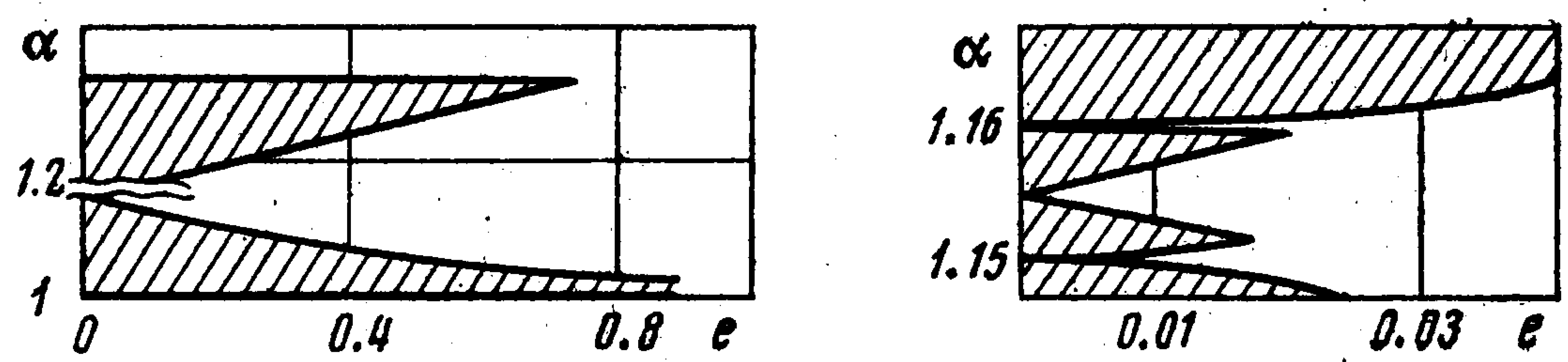
При больших значениях эксцентриситета исследование устойчивости требует привлечения численных расчетов на ЭВМ. Для этого при фиксированных параметрах e и α при $\nu = 2\pi$ находили фундаментальную систему решений линейной системы дифференциальных уравнений, соответствующих гамильтониану (2.3), а затем подсчитывали коэффициенты характеристического уравнения

$$\rho^4 - a_1\rho^3 + a_2\rho^2 - a_1\rho + 1 = 0$$

Если при этом выполняются неравенства

$$-2 < a_2 < 6, \quad 4(a_2 - 2) < a_1^2 < {}^1/_4\,(a_2 + 2)^2$$

то рассматриваемые значения параметров e и α лежат в области устойчивости в первом приближении [16]. На фиг. 2 в плоскости e, α показаны



Фиг. 2

области устойчивости в первом приближении (эти области заштрихованы) и области неустойчивости по Ляпунову рассматриваемого случая цилиндрической прецессии спутника. Приведенные на фиг. 2 результаты исследования устойчивости уточняют в области малых e соответствующие результаты работы [8]. Область неустойчивости, исходящую из точки α_1, получить численно довольно трудно из-за малости эксцентриситета. На фиг. 2 она показана схематически.

4. В области устойчивости линейной системы дифференциальных уравнений, соответствующих гамильтониану (2.3), для полного исследования надо проводить нелинейный анализ. При значениях параметров e и α, принадлежащих области выполнения необходимых условий устойчивости, гамильтониан (2.3) при помощи вещественной канонической 2π-периодической по ν замены переменных $q_i, p_i \to q_i'', p_i''$ может быть приведен к виду

$$H_2 = {}^1/_2\lambda_1 (q_1''^2 + p_1''^2) + {}^1/_2\lambda_2 (q_2''^2 + p_2''^2) \tag{4.1}$$

Преобразование $q_i, p_i \to q_i'', p_i''$ при отсутствии малого параметра должно производиться с помощью ЭВМ. Алгоритм соответствующих вычислений изложен в статье [17]. Для значений параметров e и α из заштрихованной части плоскости на фиг. 2 неустойчивость возможна, и это может быть в первую очередь для тех значений параметров e и α, при которых имеет место резонанс третьего или четвертого порядков

$$n_1\lambda_1 + n_2\lambda_2 = N \tag{4.2}$$

(n_i, N — целые числа, $|n_1| + |n_2| = 3$ или 4).

В [18] получены условия неустойчивости гамильтоновых систем при резонансах (4.2).

В рассматриваемой задаче резонансы третьего порядка к неустойчивости не приводят, так как в разложении (2.2) гамильтониана возмущенного движения отсутствует форма третьей степени относительно q_i, p_i. Резонансы четвертого порядка нуждаются в подробном исследовании.

Пусть резонанс четвертого порядка однократный, т. е. соотношение (4.2) выполнено только для одной пары целых чисел n_1 и n_2, сумма модулей которых равна четырем. Если числа n_1 и n_2 имеют разные знаки, то согласно [3] имеет место формальная устойчивость или устойчивость в любом сколь угодно высоком конечном нелинейном приближении относительно q_i, p_i. Пусть теперь числа n_1 и n_2 имеют одинаковые знаки, напри мер, $n_i \geqslant 0$. При помощи нелинейной 2π-периодической по ν вещественной канонической замены переменных q_i'', $p_i'' \to q_i^*$, p_i^* гамильтониан можно [18] привести к виду (l_{ij}, β_{n_1, n_2}, γ_{n_1, n_2} — вещественные числа)

$$
\begin{aligned}
(4.3)\qquad & H = \lambda_1 r_1 + \lambda_2 r_2 + G(r_1, r_2) + r_1^{1/2 n_1} r_2^{1/2 n_2} \times \\
& \times [\beta_{n_1, n_2} \sin(n_1\varphi_1 + n_2\varphi_2 - N\nu) + \gamma_{n_1, n_2} \cos(n_1\varphi_1 + n_2\varphi_2 - \\
& - N\nu)] + O((r_1 + r_2)^{5/2}) \\
& G(r_1, r_2) = l_{20} r_1^2 + l_{11} r_1 r_2 + l_{02} r_2^2 \\
& q_i^* = \sqrt{2r_i} \sin\varphi_i, \quad p_i^* = \sqrt{2r_i} \cos\varphi_i
\end{aligned}
$$

При отсутствии малого параметра коэффициенты разложения (4.3) должны вычисляться с помощью ЭВМ.

Если выполняется неравенство

$$
(4.4)\qquad |G(n_1, n_2)| < n_1^{1/2 n_1} n_2^{1/2 n_2} \sqrt{\beta_{n_1, n_2}^2 + \gamma_{n_1, n_2}^2}
$$

(при $n_i = 0$ величина $n_i^{1/2 n_i} = 1$), то изучаемое движение неустойчиво по Ляпунову. При обратном знаке в неравенстве (4.4) имеет место устойчивость при учете в разложении гамильтониана форм, по крайней мере до четвертого порядка включительно. И, наконец, если форма четвертого порядка относительно q_i^*, p_i^*

$$
\begin{aligned}
F = {} & G(r_1, r_2) + r_1^{1/2 n_1} r_2^{1/2 n_2} [\beta_{n_1, n_2} \sin(n_1\varphi_1 + n_2\varphi_2) + \\
& + \gamma_{n_1, n_2} \cos(n_1\varphi_1 + n_2\varphi_2)]
\end{aligned}
$$

будет знакоопределенной, то движение формально устойчиво.

Если резонансы до четвертого порядка включительно отсутствуют, то в гамильтониане (4.3) величины β_{n_1, n_2} и γ_{n_1, n_2} тождественно равны нулю. И в этом случае при условии знакоопределенности квадратичной формы $G(r_1, r_2)$ в области $r_i \geqslant 0$ движение формально устойчиво [19]. Если же выполняется неравенство

$$
(4.5)\qquad D = l_{11}^2 - 4 l_{20} l_{02} \neq 0
$$

то невозмущенное движение устойчиво для большинства (в смысле меры Лебега) начальных условий [4].

5. Сформулированные в п. 4 условия устойчивости и неустойчивости были применены при численном и аналитическом исследовании устойчивости цилиндрической прецессии спутника. Рассмотрим сначала случай малых значений эксцентриситета. Расчеты показали, что в области устойчивости в первом приближении существует 13 кривых резонансов четвертого порядка. Из них 10 кривых соответствуют одинаковым знакам целых чисел n_i, входящих в резонансное соотношение (4.2). В плоскости e, α при $e = 0$ резонансные кривые исходят из точек $\alpha^{(0)}$, приведенных в таблице.

№	Резонанс	$\alpha^{(0)}$	$\alpha^{(2)}$	№	Резонанс	$\alpha^{(0)}$	$\alpha^{(2)}$
1	$4\lambda_2=-3$	1.0408	−0.0746	8	$3\lambda_1+\lambda_2=4$	1.1574	8.7770
2	$\lambda_1+3\lambda_2=-1$	1.0409	−0.0751	9	$3\lambda_1-\lambda_2=5$	1.1671	2.2475
3	$2\lambda_1+2\lambda_2=1$	1.0410	−0.0755	10	$4\lambda_2=-1$	1.2757	0.1032
4	$3\lambda_1+\lambda_2=3$	1.0411	−0.0760	11	$\lambda_1+3\lambda_2=1$	1.2859	0.0990
5	$4\lambda_1=5$	1.0412	−0.0764	12	$2\lambda_1+2\lambda_2=3$	1.2986	0.0949
6	$\lambda_1-3\lambda_2=3$	1.1459	−2.2114	13	$\lambda_1-3\lambda_2=2$	1.3249	0.0028
7	$\lambda_1+3\lambda_2=0$	1.1523	−8.6744				

При малых e уравнения резонансных кривых имеют вид

$$\alpha=\alpha^{(0)}+e^2\alpha^{(2)}+\ldots \tag{5.1}$$

где величина $\alpha^{(2)}$ вычисляется по формуле

$$\alpha^{(2)}=\frac{n_1\lambda_1^{(2)}+n_2\lambda_2^{(2)}}{n_2d\omega_2/d\alpha-n_1d\omega_1/d\alpha} \tag{5.2}$$

в которой надо положить $\alpha=\alpha^{(0)}$. Величины $\lambda_i^{(2)}$ в формуле (5.2) представляют собой коэффициенты при e^2 в разложении величин λ_i, входящих в гамильтонианы (4.1) и (4.3), в ряд по степеням эксцентриситета

$$\lambda_1=\omega_1+e\lambda_1^{(1)}+e^2\lambda_1^{(2)}+\ldots,\quad \lambda_2=-\omega_2+e\lambda_2^{(1)}+e^2\lambda_2^{(2)}+\ldots$$

Аналитическое исследование показывает, что $\lambda_1^{(1)}=\lambda_2^{(1)}=0$, а величины $\lambda_i^{(2)}$ можно представить как функции ω_1 и ω_2. При этом

$$\lambda_1^{(2)}(\omega_1,\omega_2)=\frac{(\omega_1^2-1)(3\omega_1^6+60\omega_1^4+17\omega_1^2-8)}{4\omega_1(\omega_1^2+3)^2(4\omega_1^2-1)}-$$
$$-\frac{(1-\omega_1^2\omega_2^2)(3\omega_1^4+\omega_2^4+6\omega_1^2-4\omega_2^2-5)}{\omega_1(9-\omega_1^2\omega_2^2)(\omega_1^4+\omega_2^2-5)},\quad \lambda_2^{(2)}=\lambda_1^{(2)}(-\omega_2,\omega_1)$$

Величины $\alpha^{(2)}$, входящие в уравнения резонансных кривых (5.1), приведены в таблице.

При $e=0$ коэффициенты l_{ij} функции (4.3) были получены аналитически. После проведения довольно громоздких выкладок они могут быть записаны в следующем виде:

$$l_{20}=-\frac{(1-\omega_1^2)^2}{4(3+\omega_1^2)^2},\quad l_{11}=\frac{2(\omega_1^2+\omega_2^2-6)}{\omega_1\omega_2(\omega_1^2+\omega_2^2+6)}$$
$$l_{02}=-\frac{(1-\omega_2^2)^2}{4(3+\omega_2^2)^2}$$

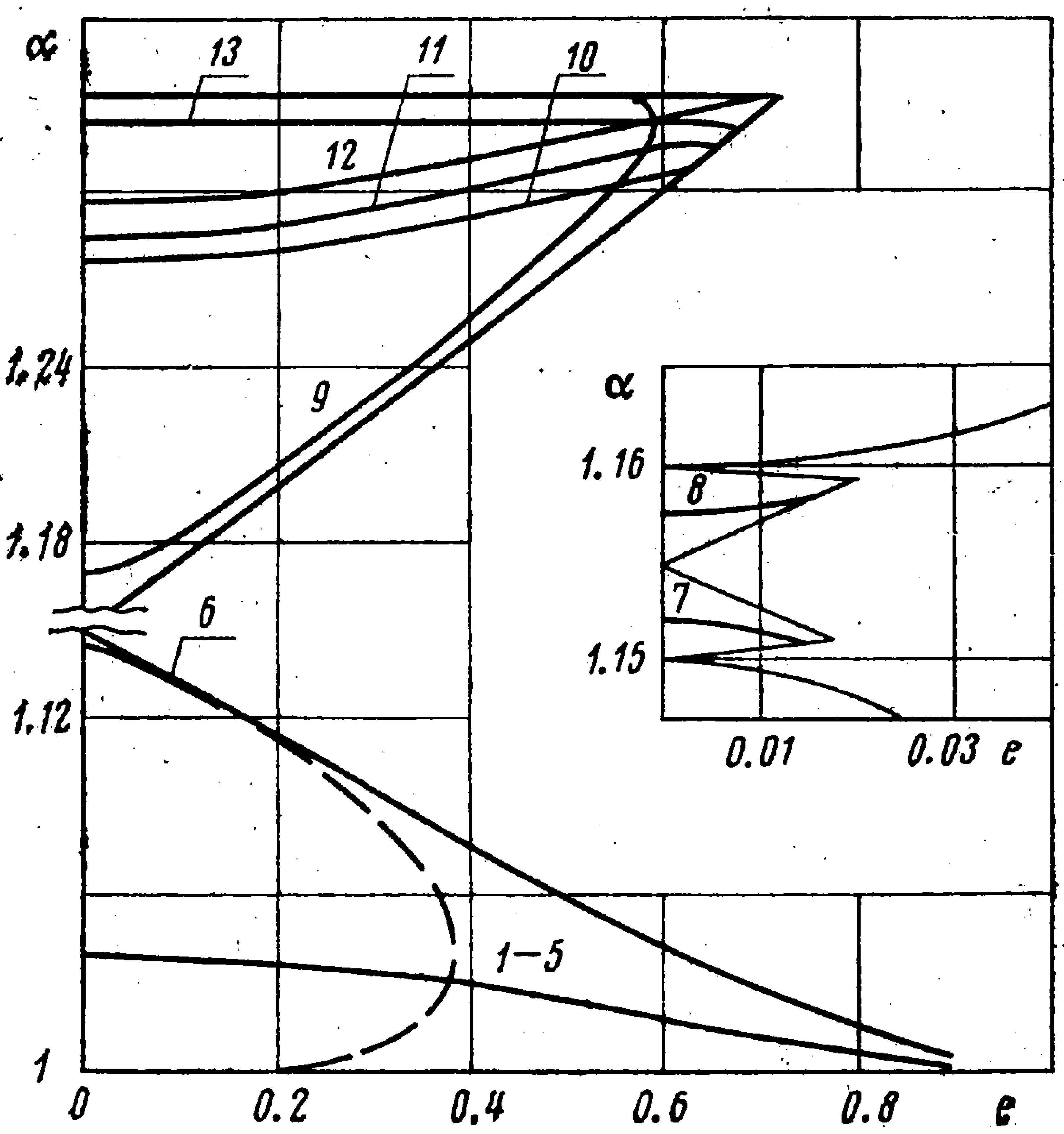
Используя уравнение (3.2), получаем, что в рассматриваемом интервале $1<\alpha<{}^4/_3$ все величины l_{ij} отрицательны. Отсюда следует, что при $e=0$ квадратичная форма $G(r_1,r_2)$, определенная в (4.3), будет знакоопределенной в области $r_1\geqslant 0$, $r_2\geqslant 0$. И поэтому при достаточно малых эксцентриситетах и при отсутствии резонансов четвертого порядка цилиндрическая прецессия спутника формально устойчива.

Покажем еще, что при малых e и при отсутствии резонансов четвертого порядка цилиндрическая прецессия спутника устойчива для большинства начальных условий. Для этого надо проверить выполнимость неравенства (4.5) при $e = 0$. Несложные выкладки показывают, что

$$D = l_{11}^2 - 4l_{20}l_{02} = \frac{144u^3 + 95u^2 + 18u - 1}{4(9u - 1)^2}, \quad u = \omega_1^{-2}\omega_2^{-2}$$

При помощи уравнения (3.2) получаем, что при $1 < \alpha < {}^4/_3$ величина $u > 1$. Отсюда ясно, что $D > 0$, и, следовательно, при $e = 0$ условие (4.5) устойчивости для большинства начальных условий выполнено.

6. Для исследования устойчивости при произвольных значениях параметров α и e, лежащих в области устойчивости в первом приближении, использовались численные расчеты. На фиг. 3 в плоскости e, α построены кривые резонансов четвертого порядка, пронумерованные в соответствии



Фиг. 3

с таблицей. Они выходят из точек $\alpha^{(0)}$ перпендикулярно оси α. Кривые *1—5* проходят очень близко одна к другой и поэтому на фиг. 3 изображены в виде одной кривой. Расчеты показали, что всюду в области устойчивости в первом приближении цилиндрическая прецессия спутника формально устойчива независимо от того, есть резонанс или его нет (отметим, что устойчивость в точках пересечения резонансных кривых не исследовалась).

Проверка условия (4.5) показала также, что устойчивость для большинства начальных условий имеет место почти всюду в области устойчивости в первом приближении за исключением, быть может, кривых резонансов четвертого порядка и кривой $D = 0$, изображенной на фиг. 3 пунктиром.

Проведенные рассмотрения позволяют сформулировать основной вывод данной работы в виде следующего утверждения: для всех значений параметров e и α, принадлежащих заштрихованной на фиг. 2 области устойчивости в первом приближении и не совпадающих с точками пересечения кривых резонансов четвертого порядка, цилиндрическая прецессия не закрученного относительно оси симметрии спутника формально устойчива; если же дополнительно исключить параметры, принадлежащие кривым резонансов четвертого порядка и кривой $D = 0$, изображенной на фиг. 3 пунктиром, то исследуемая прецессия спутника устойчива для большинства (в смысле меры Лебега) начальных условий.

Поступила 9 IV 1976

ЛИТЕРАТУРА

1. *Likins P. W.* Stability of symmetrical satellite in attitudes fixed in an orbiting reference frame. J. Astronaut. Sci., 1965, vol. 12, No. 1.
2. *Белецкий В. В.* Движение спутника относительно центра масс в гравитационном поле. Изд-во МГУ, 1975.
3. *Moser J.* New aspects in the theory of stability of hamiltonian systems. Communs. Pure and Appl. Math., 1958, vol. 11, No. 1.
4. *Арнольд В. И.* Математические методы классической механики. М., «Наука», 1974.
5. *Маркеев А. П.* Резонансные эффекты и устойчивость стационарных вращений спутника. Космические исследования, 1967, т. 5, № 3.
6. *Сарычев В. А.* Асимптотически устойчивые стационарные вращения спутника. Космические исследования, 1965, т. 3, № 5.
7. *Маркеев А. П.* Устойчивость стационарного вращения спутника на эллиптической орбите. Космические исследования, 1965, т. 3, № 5.
8. *Маркеев А. П.* О вращательном движении динамически симметричного спутника на эллиптической орбите. Космические исследования, 1967, т. 5, № 4.
9. *Дубошин Г. Н.* О вращательном движении искусственных небесных тел. Бюл. Ин-та теор. астрон., 1960, т. 7, № 7.
10. *Кондурарь В. Т.* Частные решения общей задачи о поступательно-вращательном движении сфероида под действием притяжения шара. Астрон. ж., 1959, т. 36, вып. 5.
11. *Черноусько Ф. Л.* Об устойчивости регулярной прецессии спутника. ПММ, 1964, т. 28, вып. 1.
12. *Thomson W. T.* Spin stabilization of attitude against gravity torque. J. Astronaut. Sci., 1962, vol. 9, No. 1.
13. *Kane T. R., Marsh E. L., Wilson W. G.* Letter to the Editor. J. Astronaut. Sci., 1962, vol. 9, No. 4.
14. *Маркеев А. П.* Об устойчивости канонической системы с двумя степенями свободы при наличии резонанса. ПММ, 1968, т. 32, вып. 4.
15. *Якубович В. А., Старжинский В. М.* Линейные дифференциальные уравнения с периодическими коэффициентами и их приложения. М., «Наука», 1972.
16. *Ляпунов А. М.* Об устойчивости движения в одном частном случае задачи о трех телах. Собр. соч., т. 1. М.— Л., Изд-во АН СССР, 1954.
17. *Маркеев А. П.* О нормализации гамильтоновой системы линейных дифференциальных уравнений с периодическими коэффициентами. ПММ, 1972, т. 36, вып. 5.
18. *Маркеев А. П.* Об устойчивости неавтономной гамильтоновой системы с двумя степенями свободы. ПММ, 1969, т. 33, вып. 3.
19. *Glimm J.*, Formal stability of hamiltonian systems. Communs Pure Appl. Math., 1964, vol. 17, No. 4.