Прикладная математика и механика. Том 40, 1976

УДК 531.36 + 62—50

ОПТИМАЛЬНАЯ СТАБИЛИЗАЦИЯ ЛИНЕЙНЫХ СТОХАСТИЧЕСКИХ СИСТЕМ

Г. Н. Мильштейн, Л. Б. Ряшко

(Свердловск)

Для линейных управляемых систем, подверженных воздействию белых шумов, решается задача оптимальной стабилизации. Оптимальное решение находится методом последовательных приближений, где каждое приближение является оптимальным решением соответствующей детерминированной задачи. Приводятся необходимые и достаточные условия стабилизируемости.

1. Постановка и преобразование задачи. Рассмотрим управляемую стохастическую систему вида

$$\frac{dx}{dt} = \left(A + \sum_{r=1}^{k} \sigma_r \xi_r^{\boldsymbol{\cdot}}\right) x + \left(b + \sum_{r=1}^{m} \varphi_r \eta_r^{\boldsymbol{\cdot}}\right) u \tag{1.1}$$

Здесь x — n-мерный вектор фазовых координат, u — скалярное управление, A и σ_r — постоянные $n \times n$-матрицы, b и φ_r — постоянные n-векторы, $\xi_r^{\boldsymbol{\cdot}}(t)$ $(r = 1, \ldots, k)$ — шумы в объекте, $\eta_r^{\boldsymbol{\cdot}}(t)$ $(r = 1, \ldots, m)$ — шумы в канале управления, при этом все $\xi_r(t)$ и $\eta_r(t)$ — независимые в совокупности стандартные винеровские процессы.

Рассмотрим задачу оптимальной стабилизации [1-5] системы (1.1) с критерием качества

$$I(u) = M \int_0^\infty [x^* G x + \lambda u^2]\, dt, \quad \lambda > 0 \tag{1.2}$$

где G — положительно определенная $n \times n$-матрица $(G > 0)$.

Если функцию Беллмана, связанную с задачей (1.1), (1.2), искать в виде положительно определенной квадратичной формы $x^* M x$, то матрица $M > 0$ удовлетворяет уравнению

$$A^* M + MA + \sum_{r=1}^{k} \sigma_r^* M \sigma_r - \frac{M b b^* M}{\lambda + \varphi(M)} = -G \tag{1.3}$$

$$\varphi(M) = \sum_{r=1}^{m} \varphi_r^* M \varphi_r$$

При этом оптимальное управление находится по формуле

$$u_0(x) = -b^* M x / (\lambda + \varphi(M)) \tag{1.4}$$

В уравнении (1.3) сделаем подобно [3,4] замену переменных

(1.5) $$D = M/(\lambda + \varphi(M))$$

Получим систему

(1.6) $$\begin{cases} A^*D + DA + \sum_{r=1}^{k} \sigma_r{}^*D\sigma_r - Dbb^*D = -\mu/\lambda G \\ 1 - \varphi(D) = \mu \end{cases}$$

Теорема 1. Для того, чтобы управление

(1.7) $$u_0(x) = -b^*Dx$$

было оптимальным в задаче (1.1), (1.2), необходимо и достаточно, чтобы система (1.6) имела решение $D > 0$, $\mu > 0$. Такое решение системы (1.6) единственно.

Доказательство. Необходимость. Из существования решения оптимальной задачи (1.1), (1.2) вытекает существование решения $M > 0$ уравнения (1.3) и формула (1.4) для оптимального управления u_0. Из (1.5) найдем

(1.8) $$\varphi(D) = \frac{\varphi(M)}{\lambda + \varphi(M)} < 1, \quad \varphi(M) = \frac{\lambda\varphi(D)}{1 - \varphi(D)}$$

Теперь необходимость сразу следует из формул (1.5), (1.6).

Достаточность. Пусть $D > 0$, $\mu > 0$ — решение системы (1.6). Тогда $\varphi(D) < 1$. Полагая (см. (1.5), (1.8))

$$M = \lambda D/(1 - \varphi(D)) > 0$$

найдем, что M удовлетворяет уравнению (1.3) и

$$u_0(x) = -b^*Dx = -b^*Mx/(\lambda + \varphi(M))$$

Отсюда вытекает оптимальность управления (1.7).

Единственность решения $D > 0$, $\mu > 0$ системы (1.6) следует из доказанной оптимальности управления (1.7). Теорема 1 доказана.

2. Необходимые и достаточные условия стабилизируемости. Для стабилизируемости системы (1.1) с шумами в канале управления необходима стабилизируемость соответствующей системы без шумов в канале управления: $\varphi_r = 0$ $(r = 1, \ldots, m)$. В то же время стабилизируемость эквивалентна существованию решения оптимальной задачи (1.1), (1.2) при любой положительно определенной матрице G. Поэтому из теоремы 1 вытекает, что для стабилизируемости системы (1.1) при $\varphi_r = 0$ $(r = 1, \ldots, m)$ необходимо и достаточно существование при любом $\nu > 0$ единственного решения $D > 0$ уравнения

(2.1) $$A^*D + DA - Dbb^*D = -\nu G - \sum_{r=1}^{k} \sigma_r{}^*D\sigma_r$$

Теорема 2. Для стабилизируемости в среднем квадратическом системы (1.1) необходимо и достаточно, чтобы существовало $\nu > 0$, такое, что для решения $D > 0$ системы (2.1) выполняется неравенство $\varphi(D) < 1$.

Доказательство. Необходимость немедленно вытекает из существования решения $D > 0$, $\mu > 0$ системы (1.6) при любом G, когда система (1.1) стабилизируема.

Достаточность. Пусть $D > 0$ — решение уравнения (2.1) и $\varphi(D) < 1$. Положим $\mu = 1 - \varphi(D) > 0$. Тогда система (1.6) при $\lambda = \mu/\nu$ имеет решение $D > 0$, $\mu > 0$ и, следовательно, система (1.1) стабилизируема. При этом стабилизирующее управление может быть найдено из (1.7). Теорема 2 доказана.

Укажем простое достаточное условие стабилизируемости системы (1.1) без шумов в канале управления, т. е. при $\varphi_r = 0$ $(r = 1, \ldots, m)$. Это условие одновременно будет также и достаточным условием существования решения $D > 0$ системы (2.1) при любом $\nu > 0$.

Теорема 3. Если детерминированная система

$$dx/dt = Ax + bu \tag{2.2}$$

вполне управляема, то система (1.1) при $\varphi_r = 0$ $(r = 1, \ldots, m)$ стабилизируема в среднем квадратическом, каковы бы ни были шумы в объекте.

Не приводя подробного доказательства, отметим, что благодаря полной управляемости системы (2.2) спектр ее может быть сдвинут как угодно далеко влево путем выбора соответствующего управления. Поэтому, каковые бы ни были наперед заданные шумы в объекте, можно всегда подобрать стабилизирующее управление.

3. Необходимые и достаточные условия стабилизируемости в предельной форме. Будем предполагать, что система (1.1) при $\varphi_r = 0$ $(r = 1, \ldots, m)$, т. е. без шумов в канале управления, стабилизируема. Тогда, как отмечалось в п. 2, уравнение (2.1) имеет решение $D_\nu > 0$ при любом $\nu > 0$. Можно показать, что D_ν монотонно убывает при $\nu \to 0$, т. е. $D_{\nu 2} - D_{\nu 1} > 0$ при $\nu_2 > \nu_1$. Поэтому существует предел

$$D_0 = \lim_{\nu \searrow 0} D_\nu, \quad D_0 \geqslant 0$$

т. е. матрица D_0 неотрицательно определенная.

Теорема 4. Для стабилизируемости в среднем квадратическом системы (1.1) необходимо и достаточно, чтобы выполнялось неравенство $\varphi(D_0) < 1$.

Утверждение теоремы следует из теоремы 2 и из того, что функция $\varphi(D_\nu)$ как функция от ν является монотонно возрастающей.

Из теоремы 4 можно получить результаты о стабилизируемости в случае, рассмотренном в [3, 4].

Действительно, этот случай имеет место, когда

$$\sum_{r=1}^{k} \sigma_r^* D \sigma_r = \varphi(D)\, Q \tag{3.1}$$

где Q — неотрицательно определенная матрица. Рассмотрим уравнение

$$A^*D + DA - Dbb^*D = -\nu G - Q, \quad \nu > 0 \tag{3.2}$$

Пусть $\bar{D}_\nu > 0$ — решение этого уравнения (предполагается, конечно, что детерминированная система (2.2) стабилизируема).

Как и раньше, существует предел

$$\bar{D}_0 = \lim_{\nu \searrow 0} \bar{D}_\nu, \quad \bar{D}_0 \geqslant 0$$

Теорема 5. Пусть шумы в системе (1.1) таковы, что выполняется (3.1). Тогда для стабилизируемости в среднем квадратическом системы (1.1) необходимо и достаточно, чтобы выполнялось неравенство $\varphi(\bar{D}_0) < 1$.

Доказательство. Необходимость. Из стабилизируемости в среднем квадратическом системы (1.1) по теореме 4 следует, что $\varphi(D_0) < 1$. Благодаря монотонности по ν функции $\varphi(D_\nu)$, найдется такое $\nu = \nu_0$, что $\varphi(D_{\nu_0}) = 1$. Вспомнив, что D_ν — решение уравнения (2.1), а $\bar{D}_\nu$ — решение уравнения (3.2), получаем $D_{\nu_0} = \bar{D}_{\nu_0}$. Теперь, воспользовавшись монотонностью функции $\varphi(\bar{D}_\nu)$, получаем, что $\varphi(\bar{D}_0) < 1$.

Достаточность доказывается путем проведения этих рассуждений в обратной последовательности. Теорема 5 доказана.

При $\nu = 0$ уравнение (3.2), вообще говоря, обладает несколькими неотрицательно определенными решениями, причем $\bar{D}_0$ — наибольшее из них. Если же $Q > 0$, то $\bar{D}_0$ совпадает с единственным положительно определенным решением уравнения (3.2) при $\nu = 0$.

Понятно, что это решение является оптимальным для соответствующей детерминированной системы. Отметим, что в [3,4] необходимые и достаточные условия стабилизируемости в форме, близкой к рассматриваемой здесь, получены лишь для случая $Q > 0$.

4. Метод последовательных приближений. Будем считать, что детерминированная система (2.2) стабилизируема. Тогда можно найти матрицу $D^{(0)} > 0$, удовлетворяющую равенству

$$A^*D^{(0)} + D^{(0)}A - D^{(0)}bb^*D^{(0)} = -\nu G, \quad \nu > 0 \tag{4.1}$$

Последующие приближения $D^{(s)} > 0$ $(s = 1, 2, \ldots)$ будем находить из рекуррентных соотношений

$$A^*D^{(s)} + D^{(s)}A - D^{(s)}bb^*D^{(s)} = -\nu G - \sum_{r=1}^{k} \sigma_r^* D^{(s-1)}\sigma_r \tag{4.2}$$

Понятно, что $D^{(s)} \geqslant D^{(s-1)}$.

Теорема 6. Для того, чтобы система (1.1) без шумов в канале управления ($\varphi_r = 0$, $r = 1, \ldots, m$) была стабилизируема, необходимо и достаточно, чтобы при любом $\nu > 0$ последовательность $D^{(s)}$ имела предел D_ν.

Доказательство. Необходимость. Если система (1.1) при $\varphi_r = 0$ $(r = 1, \ldots, m)$ стабилизируема, то уравнение (2.1) имеет единственное положительно определенное решение $D_\nu > 0$. Ясно, что в этом случае все $D^{(s)} \leqslant D_\nu$ и существует предел $\lim_{s\to\infty} D^{(s)} \leqslant D_\nu$. Предел также удовлетворяет уравнению (2.1), поэтому он совпадает с D_ν.

Достаточность сразу же вытекает из того, что если предел $\lim_{s\to\infty} D^{(s)}$ существует, то он является положительно определенным решением уравнения (2.1).

Отметим, что отыскание матрицы $D^{(s)} > 0$ из соотношения (4.2) эквивалентно решению известной задачи об аналитическом конструировании регуляторов для детерминированной системы (2.2). Поэтому при наличии программы решения задачи об аналитическом конструировании регуляторов рекуррентный метод (4.2) становится простым для употребления.

Будем теперь предполагать, что система (1.1) при $\varphi_r = 0$ ($r = 1, \ldots, m$) стабилизируема. Тогда при любом $\nu > 0$ методом (4.2) можно найти решение $D_\nu^\circ > 0$ уравнения (2.1). Найдя предел $D_0 = \lim_{\nu \searrow 0} D_\nu$, можно согласно теореме 4 ответить на вопрос о стабилизируемости системы (1.1), в зависимости от того, будет ли выполняться неравенство $\varphi(D_0) < 1$ или нет.

В предположении, что система (1.1) стабилизируема, обратимся, наконец, к решению задачи оптимальной стабилизации (1.1), (1.2). Решение этой задачи может быть найдено согласно теореме 1, если найти такое решение $D_{\mu/\lambda}$ уравнения (2.1), что

$$1 - \varphi(D_{\mu/\lambda}) = \mu \tag{4.3}$$

Введем функцию

$$f(\mu) = 1 - \mu - \varphi(D_{\mu/\lambda}), \quad 0 < \mu < 1$$

Можно доказать, что функция $f(\mu)$ в интервале (0,1) имеет единственный корень, монотонно убывает и выпукла кверху. Поэтому корень уравнения (4.3) может быть приближенно найден, например, методом хорд или методом Ньютона.

Пусть μ° — приближенное значение корня уравнения (4.3). Тогда матрица $D_{\mu^\circ/\lambda}$ позволит построить приближенное оптимальное решение.

5. Пример. Рассмотрим систему

$$\begin{aligned} x_1^{\cdot} &= 0.1\, \xi_1^{\cdot}\, x_1 + (1 + 0.2\, \xi_2^{\cdot})\, x_2 \\ x_2^{\cdot} &= (-1 + 0.2\, \xi_1^{\cdot})\, x_1 + (1 + \varphi\eta^{\cdot})\, u \end{aligned} \tag{5.1}$$

Соответствующая детерминированная система

$$x_1^{\cdot} = x_2, \quad x_2^{\cdot} = -x_1 + u$$

вполне управляема, поэтому при любых $G > 0$, $\nu > 0$ уравнение (2.1) имеет единственное решение $D > 0$.

Отметим, что уравнение

$$A^* D + DA - Dbb^* D = -C$$

где C — произвольная положительно определённая матрица, в данном случае легко разрешимо; приведём формулы для элементов матрицы D $d_{12} = -1 + \sqrt{1 + c_{11}}$, $d_{22} = \sqrt{c_{22} + 2d_{12}}$, $d_{11} = -c_{12} + (1 + d_{12})\, d_{22}$.

Благодаря этим формулам легко осуществить итерационный процесс (4.2); найти D_ν при любом $\nu > 0$, а затем и D_0.

В рассматриваемом случае элементы матрицы D_0 с точностью до $0.5 \cdot 10^{-5}$ таковы: $d_{11}^\circ = 0.09129$, $d_{12}^\circ = 0.00232$, $d_{22}^\circ = 0.09108$.

Согласно теореме 4 получаем условие стабилизируемости системы (5.1) в виде $\varphi(D_0) = \varphi^2 \cdot d_{22}^\circ < 1$ или $|\varphi| < 1/\sqrt{d_{22}^\circ} \approx 3.314$.

Следуя п. 4, найдём оптимальное управление в задаче минимизации функционала

$$I(u) = M \int_0^\infty (x_1^2 + x_2^2 + u^2)\, dt \tag{5.2}$$

в силу системы (5.1) при $\varphi = 2$. Получим, что оптимальное управление $u_0(x)$ в задаче (5.1), (5.2) и оптимальное значение функционала таковы: $u_0(x) = -0.01572\, x_1 - 0.24531 x_2$, $x^* Mx = 13.280 x_1^2 + 1.676 x_1 x_2 + 13.075 x_2^2$.

Поступила 4 I 1976

ЛИТЕРАТУРА

1. *Красовский Н. Н., Лидский Э. А.* Аналитическое конструирование регуляторов в системах со случайными свойствами. I—III. Автоматика и телемеханика, 1961, т. 22, № 9—11.
2. *Красовский Н. Н.* О стабилизации систем, в которых помеха зависит от величины управляющего воздействия. Изв. АН СССР. Техн. кибернетика, 1965, № 2.
3. *Невельсон М. Б.* Критерий существования оптимального управления для одного класса линейных стохастических систем. ПММ, 1969, т. 33, вып. 3.
4. *Хасьминский Р. З.* Устойчивость систем дифференциальных уравнений при случайных возмущениях их параметров. М., «Наука», 1969.
5. *Wonham W. M.* Random differential equations in control theory. In: Probabilistic method in Appl. Math., vol. 2. Acad. Press, New-York — London, 1970, p. 131—212. (Рус. перев.: Математика. Сб. перев., 1973, 17 : 4, 17 : 5).