

**ПРИБЛИЖЕННОЕ РЕШЕНИЕ НЕЛИНЕЙНЫХ ЗАДАЧ  
ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ КОЛЕБАТЕЛЬНЫМИ ПРОЦЕССАМИ  
МЕТОДОМ КАНОНИЧЕСКОГО РАЗДЕЛЕНИЯ ДВИЖЕНИЙ**

Л. Д. Акуленко

(Москва)

Развивается асимптотическая методика решения некоторых задач оптимального управления движением систем стандартного вида с вращающейся фазой. Считается, что управления входят лишь в малые возмущающие члены, а фиксированный интервал времени, на котором рассматривается процесс, достаточно длителен для того, чтобы медленные переменные изменились существенно. В предположении, что система и управления удовлетворяют необходимым требованиям гладкости, при помощи метода канонического усреднения [1] построена схема вывода упрощенной краевой задачи принципа максимума. Исследована структура множества решений краевой задачи и разработана схема выбора оптимального решения с заданной степенью точности по малому параметру. Проводится обоснование приближенного способа решения краевой задачи.

В статье развивается подход, предложенный в работе [2] для построения решения первого приближения аналогичных задач оптимального управления.

**1. Постановка задачи оптимального управления для стандартных систем.** Рассматривается управляемая система стандартного вида с вращающейся фазой [2]

$$(1.1) \quad \begin{aligned} \dot{a} &= \varepsilon f(a, \psi, u, \varepsilon), & a(t_0) &= a_0 \\ \dot{\psi} &= \omega(a) + \varepsilon F(a, \psi, u, \varepsilon), & \psi(t_0) &= \psi_0 \end{aligned}$$

Здесь  $a = (a_1, \dots, a_n)$  — медленный вектор,  $\psi$  — скалярная вращающаяся фаза,  $u \in U$  — вектор управлений размерности  $m$ ,  $U$  — выпуклое фиксированное множество,  $|\varepsilon| \leq \varepsilon_0$  — малый числовой параметр;  $t_0, a_0, \psi_0$  — начальные данные. Функции  $f, F$  предполагаются  $2\pi$ -периодическими по  $\psi$  и достаточное число раз дифференцируемыми по всем аргументам.

Критерий качества управления берется в виде гладкой функции значения переменной  $a$  в фиксированный момент времени  $t = T$ , где  $T \sim \varepsilon^{-1}$  [2]. Так как размерность  $n$  вектора  $a$  произвольна, то можно считать, что минимизируемый функционал  $J$  имеет вид

$$(1.2) \quad J = a_1(T) \rightarrow \min_{u \in U}$$

Требуется построить решение задачи оптимального управления (1.1), (1.2) с произвольной заданной точностью по степеням малого параметра. Предлагаемое решение основано на необходимых условиях принципа максимума [3]. С заданной точностью по медленным переменным и функционалу строятся допустимые решения двухточечной задачи, среди которых выбирается оптимальное [2].

Краевая задача заключается в совместном решении уравнений (1.1) и системы для сопряженных переменных  $p, q$  с краевыми условиями при  $t = T$

$$(1.3) \quad p' = -\partial H / \partial a = -\omega'q - \varepsilon [\partial (pf) / \partial a + q\partial F / \partial a]$$

$$q' = -\partial H / \partial \psi = -\varepsilon [\partial (pf) / \partial \psi + q\partial F / \partial \psi]$$

$$(1.4) \quad p(T) \equiv p_T = (-1, 0, \dots, 0), \quad q(T) = 0$$

Здесь  $H$  — функция Гамильтона задачи [3]

$$(1.5) \quad H = \varepsilon (pf) + q(\omega + \varepsilon F), \quad (pf) = p_1 f_1 + \dots + p_n f_n$$

Управление  $u^*$  выбирается из условия максимума по  $u$  функции  $H$  при фиксированных других аргументах

$$(1.6) \quad u^* = V(a, \psi, p, q, \varepsilon)$$

Предполагается, что достаточно гладкая функция  $V$  находится однозначно, причем она  $2\pi$ -периодична по  $\psi$ .

Система уравнений (1.1), (1.3) не стандартна в смысле [2], так как  $p'$  не обращается в нуль тождественно при  $\varepsilon = 0$ . Однако на основе подхода работы [2] эта система приводится к стандартному виду  $2n + 1$  уравнений относительно  $a, \psi$  и  $p$ , так как переменная  $q \sim \varepsilon$  однозначно определяется из условия постоянства функции  $H$

$$(1.7) \quad H|_V = \varepsilon h \equiv -\varepsilon A_1(a(T), \psi(T), p_T, 0, \varepsilon), \quad h \sim 1$$

$$q = \varepsilon Q(h, a, \psi, p, \varepsilon) \equiv \varepsilon \omega^{-1} [h - (pA_0)] \{1 - \varepsilon \omega^{-1} [(p\partial A / \partial q)_0] + \Psi_0\} + \varepsilon^3 \dots$$

Здесь  $A$  и  $\Psi$  — соответственно функции  $f$  и  $F$ , в которые подставлено выражение для  $u$  (1.6), а нуль внизу означает, что  $\varepsilon$  полагается равным нулю.

Таким образом, решение исходной краевой задачи сводится к решению стандартной системы с вращающейся фазой относительно  $a, \psi, p$  с последующим определением параметра  $h$  и переменной  $q$  при помощи соотношений (1.7).

При заданных начальных условиях и  $h \sim 1$  обоснование метода усреднения приближенного решения построенной стандартной системы с вращающейся фазой содержится в [1]. Вопросам построения приближенного решения краевой задачи и определения параметра  $h$  с нужной точностью посвящены п. 2, 3.

Управляемые системы с малым параметром, а также системы с малыми управляющими воздействиями на коротком и асимптотически большом интервалах времени исследовались, например, в [4-11].

**2. Построение усредненной канонической системы уравнений.** Порядок системы может быть еще понижен делением на  $\psi'$ , что приводит ее к стандартному виду [1]. При фиксированном значении  $h$  получающаяся неавтономная система  $2n$  уравнений каноническая с функцией Гамильтона —  $\varepsilon Q(h, a, \psi, p, \varepsilon)$  [12]

$$(2.1) \quad da / d\psi = \varepsilon A(\omega + \varepsilon \Psi)^{-1} = -\varepsilon \partial Q / \partial p$$

$$dp / d\psi = -\varepsilon \{\omega'Q + [\partial (pA) / \partial a + \varepsilon Q\partial \Psi / \partial a]\} (\omega + \varepsilon \Psi)^{-1} = \varepsilon \partial Q / \partial a$$

Здесь вращающаяся фаза считается независимой переменной, а начальные и граничные условия для  $a$  и  $p$  как функций  $\psi$  имеют вид (1.1), (1.4). Значение  $\psi_0$  известно, а величина  $\psi_T$  определяется соотношением

$$(2.2) \quad t - t_0 = \int_{\psi_0}^{\psi} \frac{d\psi'}{\omega + \varepsilon A}, \quad \psi_T = \psi(T), \quad T - t_0 = L\varepsilon^{-1}, \quad L \sim 1$$

Далее предполагается, что решение краевой задачи для системы (2.1) при заданных  $h \sim 1$  и  $\psi_T \sim \varepsilon^{-1}$ , принадлежащее допустимой области для всех  $0 < |\varepsilon| \leq \varepsilon_0$ , существует и единственно.

К системе (2.1) применяется методика канонического усреднения по переменной  $\psi$  [1,9,13]. С произвольной заданной степенью точности по  $\varepsilon$  строится такая замена исходных переменных  $a, p$  к новым (усредненным)  $\xi, \eta$  вида

$$(2.3) \quad \xi = a + \varepsilon \partial\sigma / \partial\eta, \quad p = \eta + \varepsilon \partial\sigma / \partial a$$

чтобы уравнения оставались каноническими, причем новый гамильтониан  $\varepsilon R$  не содержал независимую переменную  $\psi$

$$(2.4) \quad d\xi / d\psi = \varepsilon \partial R / \partial \eta, \quad d\eta / d\psi = -\varepsilon \partial R / \partial \xi, \quad R = R(h, \xi, \eta, \varepsilon)$$

Периодическая относительно  $\psi$  производящая функция, близкая к тождественной:  $a\eta + \varepsilon\sigma(h, a, \psi, \eta, \varepsilon)$ , и усредненный гамильтониан вычисляются с произвольной заданной степенью точности по  $\varepsilon$ , определяемой гладкостью системы (2.1), в виде

$$(2.5) \quad \sigma = \sigma_0 + \varepsilon\sigma_1 + \dots + \varepsilon^k\sigma_k + \dots, \quad R = R_0 + \varepsilon R_1 + \dots + \varepsilon^k R_k + \dots$$

из уравнения в частных производных [9-13]

$$(2.6) \quad \partial\sigma / \partial\psi - Q(h, a, \psi, \eta + \varepsilon\partial\sigma / \partial a, \varepsilon) = R(h, a + \varepsilon\partial\sigma / \partial\eta, \eta, \varepsilon)$$

Подстановка разложений (2.5) в (2.6) и приравнивание коэффициентов при одинаковых степенях  $\varepsilon$  позволяет последовательно определить неизвестные функции  $\sigma_i, R_i$  ( $i \geq 0$ )

$$(2.7) \quad R_i(h, \xi, \eta) = -\langle Q_i \rangle(h, \xi, \eta)$$

$$\langle Q_i \rangle(h, a, \eta) \equiv -\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} Q_i(h, a, \psi, \eta) d\psi$$

$$\sigma_i(h, a, \psi, \eta) = \int_{\psi_0}^{\psi} [Q_i(h, a, \psi', \eta) - \langle Q_i \rangle(h, a, \eta)] d\psi'$$

Угловые скобки в (2.7) означают, что по  $\psi$  проведено усреднение. Функции  $Q_i$  на каждом шаге определяются через известные  $Q_0, R_0, \dots, Q_{i-1}, R_{i-1}$ ; например

$$(2.8) \quad Q_0 = Q(h, a, \psi, \eta, 0), \quad Q_1 = \left(\frac{\partial Q}{\partial \varepsilon}\right) + \left(\frac{\partial Q}{\partial p}\right) \frac{\partial \sigma_0}{\partial a} + \left(\frac{\partial R_0}{\partial \xi}\right) \frac{\partial \sigma_0}{\partial \eta}$$

$$Q_2 = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 Q}{\partial \varepsilon^2}\right) + \left(\frac{\partial^2 Q}{\partial \varepsilon \partial p}\right) \frac{\partial \sigma_0}{\partial a} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 Q}{\partial p^2}\right) \left(\frac{\partial \sigma_0}{\partial a}\right)^2 + \left(\frac{\partial Q}{\partial p}\right) \frac{\partial \sigma_1}{\partial a} +$$

$$+ \left(\frac{\partial R_1}{\partial \varepsilon}\right) + \left(\frac{\partial R_1}{\partial \xi}\right) \frac{\partial \sigma_0}{\partial \eta} + \left(\frac{\partial R_0}{\partial \xi}\right) \frac{\partial \sigma_1}{\partial \eta} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 R_0}{\partial \xi^2}\right) \left(\frac{\partial \sigma_0}{\partial \eta}\right)^2$$

Здесь выражения в круглых скобках типа  $(\partial Q / \partial \varepsilon)$ ,  $(\partial R_0 / \partial \xi)$  означают, что функции вычисляются при  $\varepsilon = 0$ .

Система (2.4) существенно проще для интегрирования, так как она каноническая, причем функция  $R$  не зависит от  $\psi$ . Следовательно,  $R(h, \xi, \eta, \varepsilon) = \text{const}$  и если воспользоваться этим интегралом для исключения какой-либо переменной, то получается автономная система, порядок которой может быть вновь уменьшен на единицу. В конкретных случаях эти преобразования позволяют упростить аналитическое построение и исследование решения краевой задачи. Для численных расчетов система (2.4) удобна тем, что можно ввести медленную независимую переменную  $\theta = \varepsilon\psi$  и строить решение на относительно коротком интервале:  $\theta \in [\theta_0, \theta_T]$ , где  $\theta_0 = \varepsilon\psi_0 \sim \varepsilon$ , а  $\theta_T = \varepsilon\psi_T \sim 1$ .

3. Приближенное решение задачи оптимального управления. При помощи формул (2.7), (2.8) выписывается усредненная система  $k + 1$ -го приближения

$$(3.1) \quad \frac{d\xi_{(k+1)}}{d\theta} = \sum_{i=0}^k \varepsilon^i \frac{\partial R_i}{\partial \eta}, \quad \frac{d\eta_{(k+1)}}{d\theta} = - \sum_{i=0}^k \varepsilon^i \frac{\partial R_i}{\partial \xi}$$

в которой отбрасываются члены  $k + 1$ -го и более высоких порядков по  $\varepsilon$ . Поэтому, вообще говоря [1],  $|\xi - \xi_{(k+1)}| \sim \varepsilon^{k+1}$ ,  $|\eta - \eta_{(k+1)}| \sim \varepsilon^{k+1}$  для  $\theta \sim 1$ .

1°. Построение общего решения системы (3.1) с погрешностью порядка  $\varepsilon^{k+1}$  может быть проведено на основе решения системы первого приближения, т. е. при  $k = 0$ . Дальнейшее приближенное решение исходной краевой задачи более удобно, если построить общее решение усредненной двухточечной задачи (3.1), удовлетворяющее условиям  $\xi_{(k+1)}(\theta_0) = c_\xi$ ,  $\eta_{(k+1)}(\theta_T) = c_\eta$ , где  $c_\xi$ ,  $c_\eta$  — некоторые произвольные постоянные, принадлежащие  $\varepsilon$ -окрестности точек  $a_0$  и  $p_T$  соответственно. Далее считается известным такое решение для порождающей системы — системы первого приближения:

$$(3.2) \quad \xi_{(1)} = \xi_{(1)}(\theta, \theta_T, h, c_\xi, c_\eta), \quad \eta_{(1)} = \eta_{(1)}(\theta, \theta_T, h, c_\xi, c_\eta)$$

Зависимость от известного параметра  $\theta_0$  не существенна и поэтому не указывается. Искомое решение на интервале  $\theta \sim 1$  имеет вид [1]

$$(3.3) \quad \xi_{(k+1)} = \xi_{(1)} + \sum_{i=1}^k \varepsilon^i \delta \xi_{(i)}, \quad \eta_{(k+1)} = \eta_{(1)} + \sum_{i=1}^k \varepsilon^i \delta \eta_{(i)}$$

Неизвестные функции  $\delta \xi_{(i)}$ ,  $\delta \eta_{(i)}$  должны удовлетворять условиям:  $\delta \xi_{(i)}(\theta_0) = \delta \eta_{(i)}(\theta_T) = 0$ . Они последовательно определяются из уравнений

$$(3.4) \quad \begin{aligned} \frac{d\delta \xi_{(i)}}{d\theta} &= \left( \frac{\partial^2 R_0}{\partial \eta \partial \xi} \right) \delta \xi_{(i)} + \left( \frac{\partial^2 R_0}{\partial \eta^2} \right) \delta \eta_{(i)} + v_{(i)}(\theta, \theta_T, h, c_\xi, c_\eta) \\ \frac{d\delta \eta_{(i)}}{d\theta} &= - \left( \frac{\partial^2 R_0}{\partial \xi^2} \right) \delta \xi_{(i)} - \left( \frac{\partial^2 R_0}{\partial \xi \partial \eta} \right) \delta \eta_{(i)} + w_{(i)}(\theta, \theta_T, h, c_\xi, c_\eta) \end{aligned}$$

Здесь выражения типа  $(\partial^2 R_0 / \partial \eta \partial \xi)$  означают, что производные берутся при порождающем решении (3.2), а  $v_{(i)}$ ,  $w_{(i)}$  — известные на каждом шаге

функции, например  $v_{(1)} = (\partial R_1 / \partial \eta)$ ,  $w_{(1)} = -(\partial R_1 / \partial \xi)$ . Решение линейной неоднородной системы (3.4) строится методом вариации постоянных интегрирования на основе известной фундаментальной системы решений  $X$  соответствующей однородной системы. Учет начальных и краевых условий приводит к выражениям, дающим однозначное решение краевой задачи

$$(3.5) \quad \begin{aligned} \begin{pmatrix} \delta \xi_{(i)} \\ \delta \eta_{(i)} \end{pmatrix} &= X b_{(i)} + X \int_{\theta_0}^{\theta} X^{-1} \begin{pmatrix} v_{(i)} \\ w_{(i)} \end{pmatrix} d\theta' \equiv X b_{(i)} + \begin{pmatrix} \beta_{(i)\xi}(\theta) \\ \beta_{\eta(i)}'(\theta) \end{pmatrix} \\ X &= \begin{pmatrix} \partial \xi_{(1)} / \partial c_{\xi} & \partial \xi_{(1)} / \partial c_{\eta} \\ \partial \eta_{(1)} / \partial c_{\xi} & \partial \eta_{(1)} / \partial c_{\eta} \end{pmatrix} \quad b_{(i)} \equiv \begin{pmatrix} b_{\xi(i)} \\ b_{\eta(i)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -\beta_{\eta(i)}(\theta_T) \end{pmatrix} \\ \partial \xi_{(1)} / \partial c_{\xi} |_{\theta_0} &= I, \quad \partial \xi_{(1)} / \partial c_{\eta} |_{\theta_0} = 0, \quad \partial \eta_{(1)} / \partial c_{\eta} |_{\theta_T} = I, \quad \partial \eta_{(1)} / \partial c_{\xi} |_{\theta_T} = 0 \end{aligned}$$

Здесь  $I$  — единичная  $n \times n$ -матрица,  $\xi$  и  $\eta$  считаются вектор-столбцами, а все рассматриваемые функции зависят также от существенных параметров  $h$ ,  $\theta_T$ ,  $c_{\xi}$ ,  $c_{\eta}$ . Следует отметить, что функции  $\delta \xi_{(i)}$ ,  $\delta \eta_{(i)}$  — медленные, так как они зависят от  $\theta$ . Для построения искомого решения  $\xi_{(k+1)}$ ,  $\eta_{(k+1)}$  можно использовать рекуррентную процедуру метода последовательных приближений по степеням  $\varepsilon$ .

2°. При помощи (2.3) строится решение  $k + 1$ -го приближения исходной системы (2.1)

$$(3.6) \quad a_{(k+1)} = \xi_{(1)} + \sum_{i=1}^k \varepsilon^i \delta a_i, \quad p_{(k+1)} = \eta_{(1)} + \sum_{i=1}^k \varepsilon^i \delta p_i$$

Функции  $\delta a_{(i)}$ ,  $\delta p_{(i)}$ , зависящие от  $\psi$ ,  $\theta$ ,  $\theta_T$ ,  $h$ ,  $c_{\xi}$ ,  $c_{\eta}$ , определяются последовательно подстановкой (3.6) в (2.3) и приравниванием коэффициентов при одинаковых степенях  $\varepsilon$ , например

$$(3.7) \quad \delta a_{(1)} = \delta \xi_{(1)} - (\partial \sigma_0 / \partial \eta), \quad \delta p_{(1)} = \delta \eta_{(1)} + (\partial \sigma_0 / \partial \xi)$$

В результате для функций  $a$ ,  $p$  получены приближенные представления вида

$$(3.8) \quad \begin{aligned} a_{(k+1)} &= \xi_{(1)} + \varepsilon \Delta a_{(k)}(\psi, \theta, \theta_T, h, c_{\xi}, c_{\eta}, \varepsilon), \quad a_{(k+1)}(\theta_0) = \\ &= c_{\xi} + \varepsilon \Delta a_k(\theta_0) \\ p_{(k+1)} &= \eta_{(1)} + \varepsilon \Delta p_{(k)}(\psi, \theta, \theta_T, h, c_{\xi}, c_{\eta}, \varepsilon), \quad (p_{(k+1)})(\theta_T) = \\ &= c_{\eta} + \varepsilon \Delta p_k(\theta_T) \end{aligned}$$

Они представляют собой, как видно из (3.6) — (3.8), суммы плавных функций и малых вибрационных членов порядка  $\varepsilon$ .

3°. Постоянные интегрирования  $c_{\xi}$ ,  $c_{\eta}$  должны быть выбраны таким образом, чтобы функции  $a_{(k+1)}$ ,  $p_{(k+1)}$  удовлетворяли заданным начальным и граничным условиям. Так как правые части выражений (3.8) гладки относительно  $c_{\xi}$ ,  $c_{\eta}$ , то

$$(3.9) \quad c_{\xi} = a_0 + \sum_{i=1}^k \varepsilon^i \delta c_{\xi(i)}, \quad c_{\eta} = p_T + \sum_{i=1}^k \varepsilon^i \delta c_{\eta(i)}$$

Неизвестные коэффициенты  $\delta c_{\xi(i)}$ ,  $\delta c_{\eta(i)}$  зависят от параметров  $h$ ,  $\theta_T$  и периодически от  $\psi_0$ ,  $\psi_T$ . Они находятся путем приравнивания членов

одинакового порядка по  $\varepsilon$  после подстановки (3.9) в соотношения (3.8) и разложения по явно входящему  $\varepsilon$ . В частности

$$(3.10) \quad \delta c_{\xi(1)} = \partial \sigma_0 / \partial \eta (h, a_0, \psi_0, \eta_{(1)}(\theta_0)), \quad \delta c_{\eta(1)} = \\ = -\partial \sigma_0 / \partial \xi (h, \xi_{(1)}(\theta_T), \psi_T, p_T)$$

Здесь функции  $\xi_{(1)}$ ,  $\eta_{(1)}$  имеют вид (3.2) при  $c_{\xi} = a_0$ ,  $c_{\eta} = p_T$ . В результате для  $c_{\xi}$ ,  $c_{\eta}$  получаются выражения

$$(3.11) \quad c_{\xi} = a_0 + \varepsilon \Delta c_{\xi(k)}(h, \psi_T, \theta_T, \varepsilon), \quad c_{\eta} = p_T + \varepsilon \Delta c_{\eta(k)}(h, \psi_T, \theta_T, \varepsilon)$$

Здесь  $\Delta c_{\xi(k)}$ ,  $\Delta c_{\eta(k)}$  периодичны по  $\psi_T$ , а зависимость от известных параметров  $\theta_0$ ,  $\psi_0$  не указывается. После подстановки (3.11) в выражения для  $a_{(k+1)}$ ,  $p_{(k+1)}$  (3.8) получаются представления

$$(3.12) \quad a_{(k+1)}^* = \xi_{(1)}^*(\theta, \theta_T, h) + \varepsilon \Delta a_{(k)}^*(\psi, \theta, \psi_T, \theta_T, h, \varepsilon) \\ p_{(k+1)}^* = \eta_{(1)}^*(\theta, \theta_T, h) + \varepsilon \Delta p_{(k)}^*(\psi, \theta, \psi_T, \theta_T, h, \varepsilon)$$

Здесь

$$(3.13) \quad \xi_{(1)}^* \equiv \xi_{(1)}(\theta, \theta_T, h, a_0, p_T), \quad \eta_{(1)}^* \equiv \eta_{(1)}(\theta, \theta_T, h, a_0, p_T) \\ \Delta a_{(k)}^*|_{\theta_0} = \Delta p_{(k)}^*|_{\theta_T} = 0$$

Функции  $\Delta a_{(k)}^*$ ,  $\Delta p_{(k)}^*$  получаются отбрасыванием членов порядка  $\varepsilon^{k+1}$  и выше в (3.8). Для приближенного вычисления коэффициентов  $c_{\xi}$ ,  $c_{\eta}$  можно применить схему последовательных приближений по степеням  $\varepsilon$  или метод касательных.

Таким образом, получено приближенное представление функций  $a$  и  $p$   $k+1$ -го приближения, удовлетворяющее заданным начальным и граничным условиям. Оценка близости построенного решения краевой задачи (2.1) при заданных  $\psi_T$ ,  $h$  проводится на основе уравнений для разностей  $\Delta a = a - a_{(k+1)}^*$ ,  $\Delta p = p - p_{(k+1)}^*$  [1]

$$(3.14) \quad \frac{d\Delta a}{d\psi} = -\varepsilon \left( \frac{\partial^2 Q}{\partial \eta \partial \xi} \right) \Delta a - \varepsilon \left( \frac{\partial^2 Q}{\partial \eta^2} \right) \Delta p + \varepsilon R_a + \varepsilon F_a, \quad \Delta a|_{\psi_0} = 0 \\ \frac{d\Delta p}{d\psi} = \varepsilon \left( \frac{\partial^2 Q}{\partial \xi^2} \right) \Delta a + \varepsilon \left( \frac{\partial^2 Q}{\partial \xi \partial \eta} \right) \Delta p + \varepsilon R_p + \varepsilon F_p, \quad \Delta p|_{\psi_T} = 0$$

При принятом в п. 2 предположении решение краевой задачи (3.14) обращается в нуль, если  $R_a = R_p \equiv 0$ . Введением соответствующих вектор-столбцов  $g$ ,  $r$ ,  $\varphi$  и квадратной матрицы  $B$  система (3.14) записывается в виде

$$(3.15) \quad dg/d\psi = \varepsilon Bg + \varepsilon r + \varepsilon \varphi, \quad r = O(\varepsilon^{k+1}), \quad \varphi = O(|\varepsilon g| + g^2)$$

При помощи преобразования, близкого к тождественному

$$(3.16) \quad g = g_{(1)} + \varepsilon \left[ \int (B - \langle B \rangle) d\psi' \right] g_{(1)}$$

где интегрирование проводится только по явно входящему аргументу  $\psi$ , система (3.15) приводится к виду

$$(3.17) \quad dg_{(1)}/d\psi = \varepsilon \langle B \rangle g_{(1)} + \varepsilon r_{(1)} + \varepsilon \varphi_{(1)}, \quad r_{(1)} = O(\varepsilon^{k+1}) \\ \varphi_{(1)} = O(|\varepsilon g_{(1)}| + g_{(1)}^2)$$

Вид функций  $r_{(1)}$ ,  $\varphi_{(1)}$ , получаемых из  $r$  и  $\varphi$  соответственно, здесь не приводится вследствие громоздкости.

Можно доказать, что  $g_{(1)} = O(r_{(1)})$  для  $\psi \in [\psi_0, \psi_T]$ ,  $\psi_T \sim \varepsilon^{-1}$ . Действительно, решение краевой задачи для системы (3.17) находится путем решения системы  $2n$  интегральных уравнений (см. (3.5))

$$(3.18) \quad g_{(1)} = Xl_{(1)} + X\varepsilon \int_{\psi_0}^{\psi} X^{-1}(r_{(1)} + \varphi_{(1)}) d\psi'$$

Здесь вектор  $l_{(1)}$  определяется аналогично  $b_{(i)}$  в (3.5), а его компоненты представляют собой линейные функционалы от вектора  $(r_{(1)} + \varphi_{(1)})$ . Последовательными приближениями по степеням  $\varepsilon$  строится решение системы (3.18). При  $|\varepsilon|$  достаточно малом существует единственная неподвижная точка нелинейного интегрального оператора от  $g_{(1)}$  (3.18), т. е. последовательные приближения равномерно сходятся к единственному решению  $g_{(1)}^* = O(r_{(1)})$  [14]. Тогда из (3.16) следует, что  $\Delta a, \Delta p \sim \varepsilon^{k+1}$  при заданных  $\psi_T \sim \varepsilon^{-1}, h$ .

4°. Параметр  $\psi_T$  и функция  $\psi(t, h, \varepsilon)$  с погрешностью  $O(\varepsilon^k)$  определяются формулами (2.2). Соотношение для определения величины  $\theta(t, h, \varepsilon)$  в  $k+1$ -м приближении после подстановки выражений (3.12), (3.13) и отбрасывания членов более высокого порядка малости по  $\varepsilon$  принимает вид

$$(3.19) \quad \int_{\theta_0}^{\theta^{(k+1)}} \left[ 1 + \varepsilon \Delta \Psi^{(k)} \left( \frac{\theta}{\varepsilon}, \theta, \frac{\theta_{T(k+1)}}{\varepsilon}, \theta_{T(k+1)}, h, \varepsilon \right) \right] \frac{d\theta}{\omega(\xi_{(1)}^*)} = \tau$$

Величины  $\theta$  и  $\theta_T$  при этом определяются с погрешностью  $O(\varepsilon^{k+1})$ . При  $k \geq 1$

$$(3.20) \quad \Delta \Psi^{(k)} = \sum_{i=0}^{k-1} \varepsilon^i \Psi_i(\psi, \theta, \psi_{T(k)}, \theta_{T(k+1)}, h)$$

Как отмечалось, зависимость от  $\psi$  и  $\psi_T$  периодическая. Подстановка (3.20) в соотношение (3.19), взятое при  $\tau = L$ , приводит к уравнению относительно параметра  $\theta_{T(k+1)}$

$$(3.21) \quad M_{(k+1)}(\theta_{T(k+1)}, h, \varepsilon) \equiv \int_{\theta_0}^{\theta_{T(k+1)}} (1 + \varepsilon \Delta \Psi^{(k)}) \frac{d\theta}{\omega(\xi_{(1)}^*)} = L$$

Решение трансцендентного уравнения (3.21) находится в виде асимптотического разложения

$$(3.22) \quad \theta_{T(k+1)}(h, \varepsilon) = \theta_{T(1)}(h) + \sum_{i=1}^k \varepsilon^i \delta \theta_{T(i)} \equiv \theta_{T(1)} + \varepsilon \Delta \theta_{T(k)}$$

В первом приближении параметр  $\theta_T$  определяется из уравнения (3.21) при  $\varepsilon = 0$ :  $M_{(1)}(\theta_{T(1)}, h) = 0$ . Пусть решение  $\theta_{T(1)}(h)$  существует, причем  $\partial M_{(1)} / \partial \theta_{T(1)} \neq 0$  для рассматриваемого значения корня. Тогда добавка  $\delta \theta_{T(1)}$  определяется уравнением

$$(3.23) \quad \frac{\partial M_{(1)}}{\partial \theta_{T(1)}} \delta \theta_{T(1)} = - \int_{\theta_0}^{\theta_{T(1)}} \langle \delta \Psi^{(1)} \rangle (\theta, \psi_{T(0)} + \delta \theta_{T(1)}, \theta_{T(1)}, h) \times \\ \times \frac{d\theta}{\omega(\xi_{(1)}^*(\theta, \theta_{T(1)}, h))}$$

решение которого заведомо существует, так как справа стоит ограниченная периодическая функция  $\delta\theta_{T(1)}$ . Если  $\delta\theta_{T(1)}$  — простой корень (3.23), то все коэффициенты  $\delta\theta_{T(i)}$  определяются последовательно из линейных уравнений вида

$$\left[ \frac{\partial M_{(1)}}{\partial \theta_{T(1)}} + \int_{\theta_0}^{\theta_{T(1)}} \frac{\partial \langle \Psi_{(1)} \rangle}{\partial \delta \theta_{T(1)}} \frac{d\theta}{\omega(\xi_{(1)}^*)} \right] \delta \theta_{T(i)} = \vartheta_i(h), \quad i = 2, \dots, k.$$

Здесь  $\vartheta_i(h)$  — известные функции  $h$ ; например

$$\begin{aligned} \vartheta_2 = & - \int_{\theta_0}^{\theta_{T(1)}} \left\{ \left[ \langle \delta \Psi_2 \rangle + \delta \Psi_{(1)} - \langle \delta \Psi_{(1)} \rangle \right] \frac{1}{\omega} - \right. \\ & \left. - \frac{\omega' \xi_{(1)}^{**}}{2\omega^2} \delta \theta_{T(1)}^2 + \left( \frac{\omega'^2}{\omega^3} - \frac{\omega''}{2\omega^2} \right) \xi_{(1)}^{**2} \delta \theta_{T(1)}^2 \right\} d\theta \end{aligned}$$

Аналогично строится приближенное решение  $\theta_{(k+1)}$  уравнения (3.19). В частности, первое приближение  $\theta_{(1)}(\tau, h)$  однозначно определяется из уравнения (3.19) при  $\varepsilon = 0$ . Остальные коэффициенты вычисляются последовательно, например

$$\begin{aligned} \delta \theta_{(1)} = & \omega(\xi_{(1)}^*) \int_{\theta_0}^{\theta_{(1)}} \left[ \omega'(\xi_{(1)}^*) \frac{\partial \xi_{(1)}^*}{\partial \theta_{T(1)}} \delta \theta_{T(1)} + \right. \\ & \left. + \langle \delta \Psi_{(1)} \rangle(\theta, \psi_{T(0)} + \delta \theta_{T(1)}, \theta_{T(1)}, h) \right] \frac{d\theta}{\omega^2(\xi_{(1)}^*)} \end{aligned}$$

В результате при заданном значении параметра  $h$  допустимые решения  $(k+1)$ -го приближения краевой задачи (1.1), (1.3), (1.4), (1.6), (1.7) построены в виде выражений (3.12), в которые подставлены найденные значения  $\theta_{k+1}(t, h, \varepsilon)$  и  $\theta_{T(k+1)}(h, \varepsilon)$ .

5°. Параметр  $h$  должен удовлетворять условию трансверсальности для переменной  $q$  (1.7), а его значение необходимо вычислить с погрешностью  $\sim \varepsilon^{k+1}$ , чтобы указанные выше соотношения точности действительно имели место. Для рассматриваемой существенно нелинейной системы установлено [2], что  $\partial \psi_T / \partial h \sim \varepsilon^{-1}$ ; поэтому искомое значение  $h$  определяется (неоднозначно) из уравнения:  $h = -A_1(a_{T(k+1)}^*, \psi_{T(k)}, p_T, 0, \varepsilon)$ , так как погрешность  $\sim \varepsilon^k$  в определении  $\psi_T$  может быть скомпенсирована изменением  $h$  на величину  $\sim \varepsilon^{k+1}$ , с точностью до которой производится вычисление. Далее в [2] показано, что существует корень уравнения первого приближения:  $h_{(1)} = -\langle A_1 \rangle(\xi_{T(1)}^*, p_T, 0, 0)$ . Если этот корень простой, то при достаточно малом  $|\varepsilon|$  исходное уравнение допускает дискретное множество корней  $\{h\}$ . Эти корни при  $\varepsilon \rightarrow 0$  заполняют некоторый сплошной интервал  $[h_1, h_2]$ , которому принадлежит точка  $h_{(1)}$  (см. фиг. 1).

Решение задачи оптимального управления (1.1), (1.2)  $k+1$ -го приближения, заключается теперь в выборе такого значения  $h^* \in \{h\}$ , лежащего в  $\varepsilon$ -окрестности точки  $h_{(1)} \in [h_1, h_2]$ , чтобы достигал минимума функционал (1.2), вычисленный с погрешностью порядка  $\varepsilon^{k+1}$

$$(3.24) \quad J_{(k+1)}[h] = a_{1T(k+1)}^* \rightarrow \min_{h \in \{h\}}$$

Типичный вид функции  $J_{(k+1)} [h]$  в окрестности локального минимума представлен на фиг. 2.

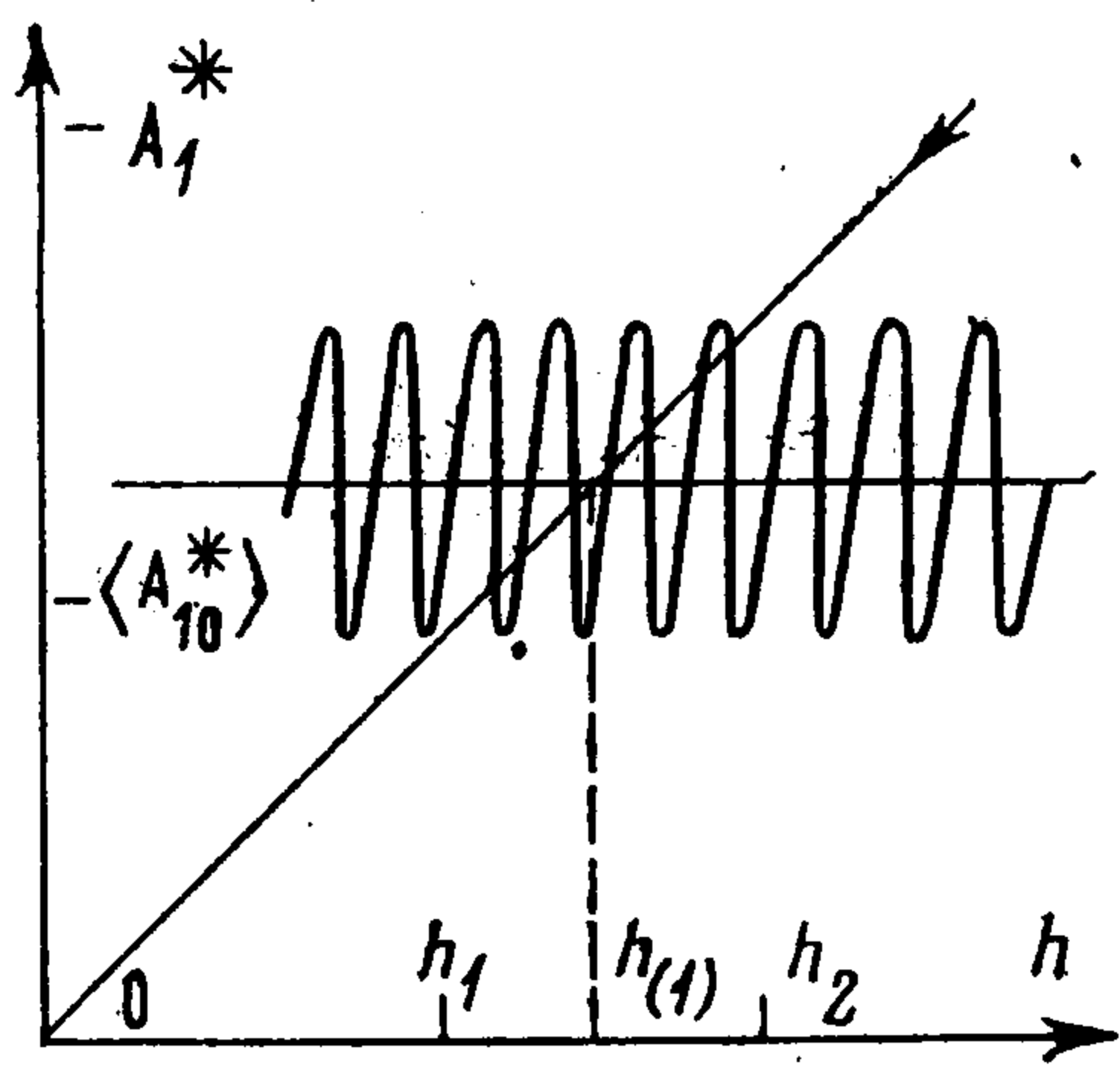
Подстановка найденных выражений в (1.6) позволяет построить приближенный закон управления

$$(3.25) \quad u_{(k+1)}^* = V(a, \psi, p_{(k+1)}^*, q_{(k+1)}^*, \varepsilon)$$

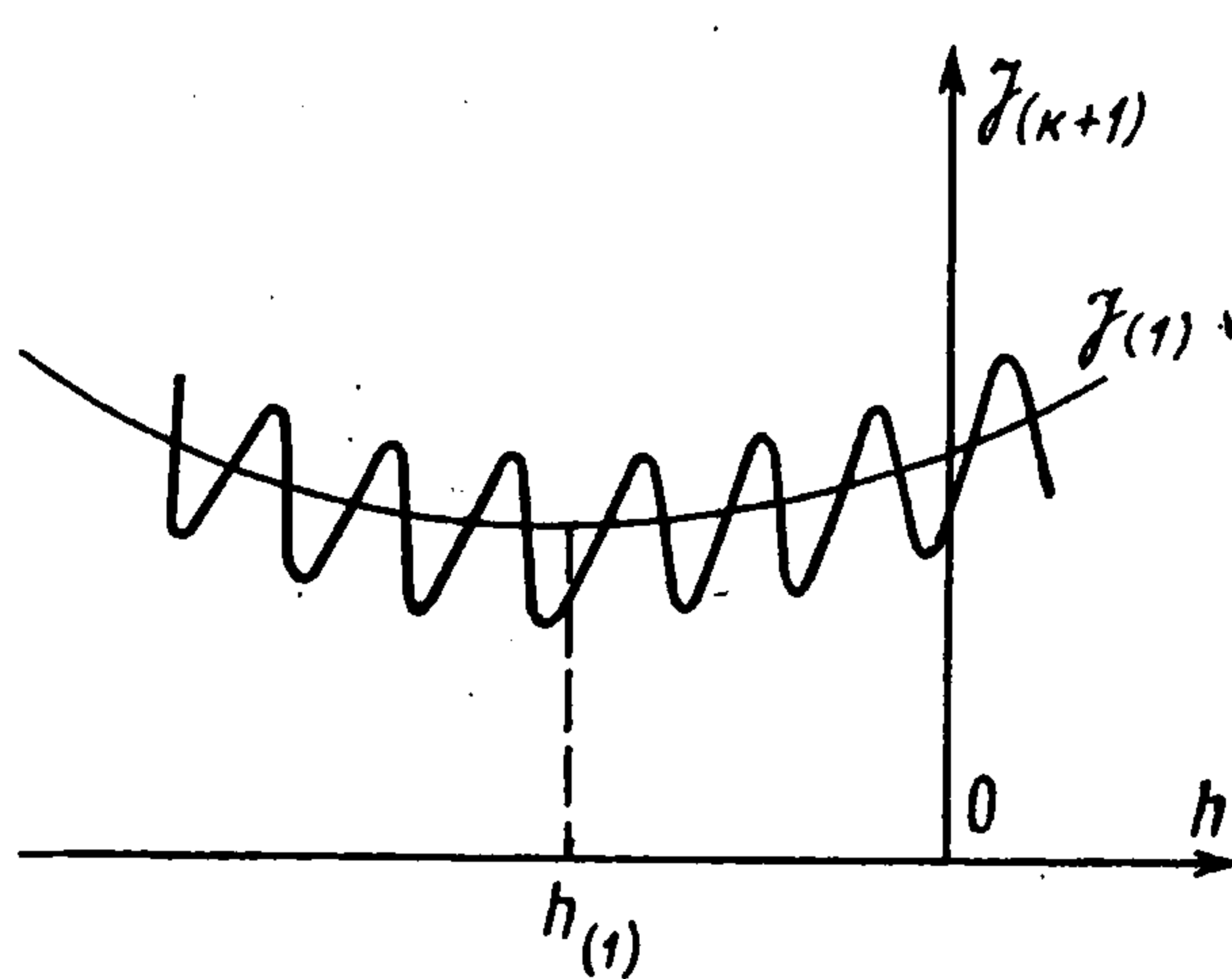
Краткая формулировка изложенного состоит в следующем утверждении.

*Теорема.* Пусть выполнены условия

1) Задача оптимального управления (1.1), (1.2) имеет единственное решение, принадлежащее допустимой области для  $0 < |\varepsilon| \leq \varepsilon_0$ .



Фиг. 1



Фиг. 2

2) Правые части системы (2.1) обладают непрерывными частными производными по  $a, p, \varepsilon$  до  $k + 1$ -го порядка.

3) Краевая задача (2.1) допускает единственное решение, а краевая задача первого приближения (см. п. 3, 1°) обладает описанным свойством устойчивости.

4) Выполняется условие «быстрой осцилляции» в первом приближении:  $\partial \theta_{T(1)}(h_{(1)}) / \partial h \neq 0$ .

Тогда функции (3.12) дают решение задачи оптимального управления 1.1), (1.2) с погрешностью  $O(\varepsilon^{k+1})$  на интервале времени  $T - t_0 \sim L\varepsilon^{-1}$  по медленной переменной  $a$  и функционалу  $J$ , а приближенное оптимальное управление и минимальное значение функционала имеют вид (3.25), (3.24).

Следует отметить, что развитая методика может быть применена для решения некоторых других задач оптимального управления медленными переменными, например, если в некоторый фиксированный момент времени  $t = T \sim \varepsilon^{-1}$  система (1.1) должна быть переведена на гладкое множество, не зависящее от быстрой переменной.

Автор благодарит Ф. Л. Черноусько за внимание к работе и важные замечания.

## ЛИТЕРАТУРА

1. Волосов В. М., Мореунов Б. И. Метод осреднения в теории нелинейных колебательных систем. Изд-во МГУ, 1971.
  2. Акуленко Л. Д., Черноусько Ф. Л. Метод осреднения в задачах оптимального управления. Ж. вычисл. матем. и матем. физ., 1975, т. 15, № 4.
  3. Понтрягин Л. С., Болтянский В. Г., Гамкрелидзе Р. В., Мищенко Е. Ф. Математическая теория оптимальных процессов. М., «Наука», 1969.
  4. Гродзовский Г. Л., Иванов Ю. Н., Токарев В. В. Механика космического полета с малой тягой. М., «Наука», 1966.
  5. Моисеев Н. Н. Элементы теории оптимальных систем. М., «Наука», 1975.
  6. Красовский Н. Н. Теория управления движением. М., «Наука», 1968.
  7. Черноусько Ф. Л. Некоторые задачи оптимального управления с малым параметром. ПММ, 1968, т. 32, вып. 1.
  8. Евтушенко Ю. Г. Приближенный расчет задач оптимального управления. ПММ, 1970, т. 34, вып. 1.
  9. Акуленко Л. Д. Исследование некоторых оптимальных систем методом усреднения. ПММ, 1974, т. 38, вып. 3.
  10. Powers W. F., Tapley B. D., Canonical transformation applications to optimal trajectory analysis. AIAA Journal, 1969, vol. 7, No. 3.
  11. Jacobson R. A., Powers W. F. Asymptotic solution to the problem of optimal low-thrust energy increase. AIAA, Journal, 1972, vol. 10, No. 12.
  12. Арнольд В. И. Математические методы классической механики. М., «Наука», 1974.
  13. Федорченко А. М. Метод канонического усреднения в теории нелинейных колебаний. Укр. матем. ж., 1957, т. 9, № 2.
  14. Забрейко П. П. и др. Интегральные уравнения. СМБ, М., «Наука», 1968.
-