Прикладная математика и механика. Том 40, 1976

УДК 62—50

ПРИНЦИП МАКСИМУМА В ЗАДАЧЕ ОПТИМАЛЬНОГО БЫСТРОДЕЙСТВИЯ С НЕГЛАДКИМИ ОГРАНИЧЕНИЯМИ

Б. Ш. Мордухович

(Минск)

Рассматривается задача оптимального быстродействия [1, 2] с негладкими (вообще говоря, нефункциональными) ограничениями на переменные состояния. На примере данной задачи предлагается метод доказательства необходимых условий оптимальности в задачах оптимального управления с фазовыми ограничениями, основанный на конструктивной аппроксимации исходной задачи с ограничениями последовательностью задач оптимального управления без ограничений на переменные состояния. При этом вариационный анализ аппроксимирующих задач осуществляется с помощью чисто алгебраической методики, связанной с формулами приращения функционала [3, 4], и не использует теорем отделимости выпуклых множеств.

С помощью предельного перехода доказывается сходимость аппроксимирующих задач к исходной задаче с ограничениями, и при весьма общих предположениях выводятся необходимые условия оптимальности типа принципа максимума Л. С. Понтрягина [1] для обобщенных решений исходной задачи. При этом условия трансверсальности в случае негладких (нефункциональных) ограничений выражаются через новое понятие сопряженного конуса к произвольному замкнутому множеству конечномерного пространства, которое обобщает обычные понятия нормали и нормального конуса в случае гладких и выпуклых многообразий.

1. Постановка задачи. Рассмотрим общую задачу оптимального быстродействия для систем обыкновенных дифференциальных уравнений в классе измеримых управлений $u(t)$ и абсолютно непрерывных траекторий $x(t)$, $t_0 \leqslant t \leqslant t_1$

$$\dot{x} = f(x, u, t), \quad x = (x^1, \ldots, x^n)' \in \mathbf{R}^n \tag{1.1}$$

$$u(t) \in U(t) \subset \Omega, \quad t_0 \leqslant t \leqslant t_1 \tag{1.2}$$

$$(x(t_0), x(t_1)) \in G \subset \mathbf{R}^{2n} \tag{1.3}$$

$$I = t_1 - t_0 \to \inf \tag{1.4}$$

где штрих означает транспонирование (x — вектор-столбец), момент времени t_0 для простоты считаем фиксированным. Ограничения на переменные состояния (1.3) задаются с помощью произвольного замкнутого множества $G \subset \mathbf{R}^{2n}$, которое, в частности, может иметь вид

$$\{z \in \mathbf{R}^{2n} : q_i(z) \leqslant 0, \ i = 1, \ldots, l; \ h_j(z) = 0, \ j = 1, \ldots, p\}$$

где $q_i(z)$ — произвольные полунепрерывные снизу, а $h_j(z)$ — произвольные непрерывные функции.

В дальнейшем будем предполагать, что одна из проекций множества G на $\mathbf{R}^n$ ограничена и выполняются следующие общие условия на параметры задачи (1.1) — (1.4):

а) пространство Ω гомеоморфно полному сепарабельному метрическому пространству, а множество $\Gamma_U = \{(u, t) \in \Omega \times [t_0, T]: u \in U(t)\}$ является аналитическим (mod. 0) [5] при некотором T, $\infty > T \geqslant t_1$;

б) функции $f(x, u, t)$ и $\partial f(x, u, t) / \partial x$ непрерывны по x, B-измеримы (mod 0) по (u, t) (это заведомо выполняется, если они непрерывны по (x, u) и измеримы в смысле Лебега по t) и удовлетворяют неравенствам

$$\|f(x, u, t)\| \leqslant \mu(t) g(\|x\|), \quad \|\partial f(x, u, t) / \partial x\| \leqslant \mu_1(t) g_1(\|x\|)$$

где $g(s)$, $g_1(s)$ непрерывны на $[0, \infty)$, $\mu(t)$, $\mu_1(t)$ суммируемы на $[t_0, T]$, $g(s) = O(s)$ при $s \to \infty$;

в) множество $R(x, t) = \{r = (r_1, r_2) : r_1 = f(x, u, t), r_2 = \partial f(x, u, t) / \partial x, u \in U(t)\}$ замкнуто в пространстве $R^{n(n+1)}$.

Условие б) гарантирует равномерную ограниченность множества допустимых траекторий задачи (1.1) — (1.4). Другие общие условия такого типа приведены, например, в [6].

Обобщенным решением задачи (1.1) — (1.4) будем называть оптимальный набор $\{x^\circ(t), \alpha_i^\circ(t), u_i^\circ(t),\ i = 1, \ldots, n+1\}$ в расширенной [7] задаче минимизации функционала (1.4) при ограничениях на переменные состояния (1.3) в следующих связях:

$$\dot{x} = \sum_{i=1}^{n+1} \alpha_i f(x, u_i, t), \quad x = (x^1, \ldots, x^n)' \in \mathbf{R}^n \tag{1.5}$$

$$\alpha_i(t) \geqslant 0, \quad \sum_{i=1}^{n+1} \alpha_i(t) \equiv 1, \quad u_i(t) \in U(t), \quad t_0 \leqslant t \leqslant t_1,\ i = 1, \ldots, n+1 \tag{1.6}$$

2. Аппроксимирующие задачи. Обозначим через $\tau^\circ = t_1^\circ - t_0$ минимальное значение функционала (1.4) в расширенной задаче (1.3) — (1.6), которое достигается при условиях а) — в) и совпадает с минимальным значением функционала в исходной задаче (1.1) — (1.4) для широкого класса корректных по расширению задач [5,8]. Рассмотрим произвольную числовую последовательность $\{t_{1k}\}$, $k = 1, 2, \ldots$, удовлетворяющую условиям: $t_{1k} \to t_1^\circ$, $t_{1k} < t_1^\circ$, $k = 1, 2, \ldots$. Такую последовательность можно эффективно построить с помощью дискретных (конечно-разностных) аппроксимаций корректных по расширению задач (1.1) — (1.4) (для подобных задач доказана сходимость дискретных аппроксимаций по функционалу [1]).

Для каждого натурального k введем функционал

$$I_k = \Phi(x(t_0), x(t_{1k})) = \rho(x(t_0), x(t_{1k}); G) \to \inf, \quad k = 1, 2, \ldots \tag{2.1}$$

$$\rho(x(t_0), x(t_{1k}); G) = \min_{(y^\circ, y^1)} [(x(t_0) - y^\circ)'(x(t_0) - y^\circ) + (x(t_{1k}) - y^1)'(x(t_{1k}) - y^1)]^{1/2}$$

---

[1] *Мордухович Б. Ш.* Сходимость дискретных аппроксимаций в задачах оптимального управления. IV Республ. конф. матем. Белоруссии (тезисы докладов), ч. I. Минск, 1975.

где ρ — расстояние граничной точки $z_k = (x(t_0), x(t_{1k}))$ от множества G. Рассмотрим последовательность аппроксимирующих задач минимизации функционала (2.1) на множестве наборов $\{x(t), \alpha_i(t), u_i(t), i = 1, \ldots, n+1\}$, удовлетворяющих связям (1.5), (1.6) с $t_1 = t_{1k}$, $k = 1, 2, \ldots$. Аппроксимирующая задача оптимального управления (1.5), (1.6), (2.1) при каждом $k = 1, 2, \ldots$ представляет собой задачу минимизации негладкого функционала типа Майера без дополнительных ограничений на переменные состояния. При выполнении условий а) — в) в задачах (1.5), (1.6), (2.1) всегда существуют решения [8] — оптимальные наборы $\{x_k^\circ(t), \alpha_{ik}^\circ(t), u_{ik}^\circ(t), i = 1, \ldots, n+1\}$, $k = 1, 2, \ldots$. Следующая теорема уточняет характер аппроксимации задачами (1.5), (1.6), (2.1) исходной задачи с ограничениями на переменные состояния.

Теорема 2.1. Пусть выполняются предположения а) — в). Тогда множество оптимальных в задачах (1.5), (1.6), (2.1) траекторий $\{x_k^\circ(t)\}$, $t_0 \leqslant t \leqslant t_{1k}$, $k = 1, 2, \ldots$, непрерывно продолженных на весь отрезок $[t_0, t_1^\circ]$, относительно компактно в пространстве $C[t_0, t_1^\circ]$ и его предельные точки являются оптимальными траекториями расширенной задачи (1.3) — (1.6). При этом найдется такое число $c > 0$, что при всех $k = 1, 2, \ldots$ справедливо неравенство

$$\rho(x_k^\circ(t_0), \quad x_k^\circ(t_{1k}); G) \leqslant c \int_{t_{1k}}^{t_1^\circ} \mu(t)\, dt \tag{2.2}$$

Доказательство. Рассмотрим произвольную последовательность оптимальных в задачах (1.5), (1.6), (2.1) траекторий $\{x_k^\circ(t)\}$, $k = 1, 2, \ldots$, непрерывно продолженных на отрезок $[t_0, t_1^\circ]$. В силу условия б) можно, следуя [9], указать число $r > 0$, такое, что

$$\|x_k^\circ(t)\| \leqslant r, \quad t_0 \leqslant t \leqslant t_1^\circ, \quad k = 1, 2, \ldots$$

Запишем неравенство

$$\|x_k^\circ(\tau_1) - x_k^\circ(\tau_2)\| \leqslant c \int_{\tau_1}^{\tau_2} \mu(t)\, dt \tag{2.3}$$

$$\tau_1, \tau_2 \in [t_0, t_1^\circ], \quad \tau_1 \leqslant \tau_2, \quad k = 1, 2, \ldots, \quad c = \max_{\|x\| \leqslant r} g(\|x\|)$$

из которого вытекает равностепенная непрерывность последовательности $\{x_k^\circ(t)\}$, $t_0 \leqslant t \leqslant t_1^\circ$, $k = 1, 2, \ldots$. По теореме Арцела — Асколи [10] из данной последовательности выделим подпоследовательность, которая равномерно на $[t_0, t_1^\circ]$ сходится к некоторой абсолютно непрерывной (в силу (2.3)) функции $x^\circ(t)$, $t_0 \leqslant t \leqslant t_1^\circ$. Воспользовавшись выпуклостью множества допустимых скоростей в расширенной задаче и теоремами измеримого выбора [6,8], найдем измеримые функции $\alpha_i^\circ(t)$, $u_i^\circ(t)$, $t_0 \leqslant t \leqslant t_1^\circ$, $i = 1, 2, \ldots$, такие, что набор $\{x^\circ(t), \alpha_i^\circ(t), u_i^\circ(t), i = 1, \ldots, n+1\}$, $t_0 \leqslant t \leqslant t_1^\circ$ удовлетворяет связям (1.5), (1.6). Теперь утверждение теоремы будет полностью следовать из неравенства (2.2). Для доказательства этого неравенства заметим [8], что в задаче (1.3) — (1.6) существует оптимальная траектория $x^*(t)$, $t_0 \leqslant t \leqslant t_1^\circ$, для которой $\rho(x^*(t_0),\ x^*(t_1^\circ);\ G) = 0$ и выполняется (2.3) при $\tau_2 = t_1^\circ$, $\tau_1 = t_{1k}$, $k = 1, 2, \ldots$. В силу оптимальности траекторий $x_k^\circ(t)$, $t_0 \leqslant t \leqslant t_{1k}$ в задачах (1.5), (1.6), (2.1), $k = 1, 2, \ldots$ можно записать

$$\rho(x_k^\circ(t_0),\ x_k^\circ(t_{1k});\ G) \leqslant \rho(x^*(t_0),\ x^*(t_{1k}):\ G) \leqslant \| x^*(t_{1k}) - x^*(t_1^\circ) \|$$

откуда и вытекает искомое неравенство. Теорема 2.1 доказана.

Из доказанной теоремы следует, что процесс построения и решения аппроксимирующих задач (1.5), (1.6), (2.1) можно рассматривать как конструктивный алгоритм приближенного решения расширенной (а в случае корректности по расширению — и исходной) задачи с произвольными ограничениями типа (1.3). При этом неравенство (2.2) характеризует степень аппроксимации ограничений типа (1.3) в зависимости от скорости сходимости $t_{1k} \to t_1^\circ$.

3. Принцип максимума в аппроксимирующих задачах. Получим необходимые условия оптимальности первого порядка в аппроксимирующих задачах (1.5), (1.6), (2.1) с использованием алгебраических конструкций метода приращения функционала [3,4] и результатов теории измеримых многозначных отображений [6,8].

Обозначим через m_k минимальное значение функционала в задаче (1.5), (1.6), (2.1), которое всегда положительно в силу выбора последовательности $\{t_{1k}\}$, $k = 1, 2, \ldots$. Введем функцию Гамильтона $H(x, \psi, u, t) = \psi' f(x, u, t)$ для системы (1.1) и рассмотрим соответствующее (1.5) уравнение для сопряженных переменных

$$\dot\psi = -\sum_{i=1}^{n+1} \alpha_i\, \partial H(x, \psi, u_i, t) / \partial x \tag{3.1}$$

Теорема 3.1. Пусть выполняются условия а), б). Тогда для любого оптимального в (1.5), (1.6), (2.1) набора $\{x_k^\circ(t),\ \alpha_{ik}^\circ(t),\ u_{ik}^\circ(t),\ i = 1, \ldots, n+1\}$, $t_0 \leqslant t \leqslant t_{1k}$ при почти всех $t \in T_{ik} = \{t \in [t_0, t_{1k}],\ \alpha_{ik}^\circ(t) \neq 0\}$ справедлив следующий принцип максимума:

$$H(x_k^\circ(t), \psi_k^\circ(t), u_{ik}^\circ(t), t) = \sup_{u \in U(t)} H(x_k^\circ(t), \psi_k^\circ(t), u, t), \quad i = 1, \ldots, n+1 \tag{3.2}$$

где $\psi_k^\circ(t)$, $t_0 \leqslant t \leqslant t_{1k}$ — соответствующее абсолютно непрерывное решение системы (3.1) с граничными условиями

$$\psi_k^\circ(t_0) = \frac{1}{m_k}(x_k^\circ(t_0) - y_k^\circ), \quad \psi_k^\circ(t_{1k}) = \frac{1}{m_k}(y_k^1 - x_k^\circ(t_{1k})) \tag{3.3}$$

$y_k = (y_k^\circ, y_k^1)$ — любой вектор из множества

$$M_k = \{y_k = (y_k^\circ, y_k^1) \in G : \rho(x_k^\circ(t_0),\ x_k^\circ(t_{1k});\ y_k^\circ,\ y_k^1) = \rho(x_k^\circ(t_0),\ x_k^\circ(t_{1k});\ G\}$$

Доказательство. Оптимальный в задаче (1.5), (1.6), (2.1) набор $\{x_k^\circ(t),\ \alpha_{ik}^\circ(t),\ u_{ik}^\circ(t),\ i = 1, \ldots, n+1\}$, $t_0 \leqslant t \leqslant t_{1k}$ будет оптимальным и в задаче минимизации функционала типа Майера

$$J_k = F(x(t_0),\ x(t_{1k})) = [(x(t_0) - y_k^\circ)'(x(t_0) - y_k^\circ) + (x(t_{1k}) - y_k^1)'(x(t_{1k}) - y_k^1)]^{1/2} \to \inf \tag{3.4}$$

с гладкой функцией $F(x^\circ, x^1)$, $(x^\circ, x^1) \notin G$ на траекториях системы (1.5), (1.6) при любом выборе вектора $y_k = (y_k^\circ, y_k^1) \in M_k$. Пользуясь методом приращения [3, 4], можно записать следующую формулу приращения функционала в задаче (1.5), (1.6), (3.4):

$$\Delta J_k = (\partial F(x_k^\circ(t_0)) / \partial x^\circ - \psi_k^\circ(t_0))' \Delta x(t_0) - \tag{3.5}$$
$$- \int_{t_0}^{t_{1k}} \Big[\sum_{i=1}^{n+1} \alpha_i(t) H(x_k^\circ(t), \psi_k^\circ(t), u_i(t), t) -$$
$$- \sum_{i=1}^{n+1} \alpha_{ik}^\circ(t) H(x_k^\circ(t), \psi_k^\circ(t), u_{ik}^\circ(t), t) \Big] dt -$$
$$- \int_{t_0}^{t_{1k}} \Big[\sum_{i=1}^{n+1} \alpha_i(t) \partial H(x_k^\circ(t), \psi_k^\circ(t), u_i(t), t) / \partial x -$$
$$- \sum_{i=1}^{n+1} \alpha_{ik}^\circ(t) \partial H(x_k^\circ(t), \psi_k^\circ(t), u_{ik}^\circ(t), t) / \partial x]' \Delta x(t) dt -$$
$$- \int_{t_0}^{t_{1k}} o(\| \Delta x(t) \|) dt + o(\| \Delta x(t_{1k}) \|) + o(\| \Delta x(t_0) \|)$$

где набор $\{x(t), \alpha_i(t), u_i(t), i = 1, \ldots, n+1\}$, $t_0 \leqslant t \leqslant t_{1k}$ удовлетворяет связям (1.5), (1.6) $\Delta x(t) = x(t) - x_k^\circ(t)$, функция $\psi_k^\circ(t)$ удовлетворяет уравнению (3.1) с правым из граничных условий (3.2) вдоль оптимального набора $\{x_k^\circ(t), \alpha_{ik}^\circ(t), u_{ik}^\circ(t), i = 1, \ldots, n+1\}$, $t_0 \leqslant t \leqslant t_{1k}$.

Докажем, что для функции $\psi_k^\circ(t)$ справедливо и левое из граничных условий (3.3). Предположим противное, т. е.

$$\frac{1}{m_k}(x_k^\circ(t_0) - y_k^\circ) - \psi_k^\circ(t_0) = \partial F(x_k^\circ(t_0)) / \partial x^\circ - \psi_k^\circ(t_0) = b \neq 0 \tag{3.6}$$

Рассмотрим решение $x_k(t)$, $t_0 \leqslant t \leqslant t_{1k}$ системы (1.5) с начальным условием $x_k(t_0) = x_k^\circ(t_0) + b\varepsilon$, соответствующее управляющему набору $\{\alpha_{ik}^\circ(t), u_{ik}^\circ(t), i = 1, \ldots, n+1\}$. В силу условия б) и леммы Беллмана — Гронуолла [4] справедливо неравенство

$$\| x_k(t) - x_k^\circ(t) \| \leqslant \varepsilon \| b \| \exp\Big(c_1 \int_{t_0}^{t_{1k}} \mu_1(t) dt\Big), \quad t_0 \leqslant t \leqslant t_{1k},$$
$$c_1 = \max_{\|x\| \leqslant r} g_1 \| x \|$$

По формуле (3.5) имеем

$$\Delta J_k = \varepsilon \| b \|^2 + o(\varepsilon) \tag{3.7}$$

Выбрав в (3.7) достаточно малые ε, получим противоречие с оптимальностью набора $\{x_k^\circ(t), \alpha_{ik}^\circ(t), u_{ik}^\circ(t), i = 1, \ldots, n+1\}$, $t_0 \leqslant t \leqslant t_{1k}$ в задаче (1.5), (1.6), (3.4). Таким образом, предположение (3.6) не имеет места, и функция $\psi_k^\circ(t)$ удовлетворяет граничным условиям (3.3).

Для оптимального набора $\{x_k^\circ(t),\ \alpha_{ik}^\circ(t),\ u_{ik}^\circ(t),\ i=1,\ldots,n+1\}$ при почти всех $t\in[t_0, t_{1k}]$ справедливо следующее соотношение:

$$\sum_{i=1}^{n+1}\alpha_{ik}^\circ(t)H(x_k^\circ(t),\psi_k^\circ(t),u_{ik}^\circ(t),t)= \tag{3.8}$$

$$=\sup_{(\alpha_i,u_i)}\sum_{i=1}^{n+1}\alpha_i H(x_k^\circ(t),\psi_k^\circ(t),u_i,t)$$

$$\left(\sum_{i=1}^{n+1}\alpha_i=1,\ \alpha_i\geqslant 0,\ u_i\in U(t),\ i=1,\ldots,n+1\right)$$

где операция sup берется по всем (α_i, u_i), удовлетворяющим условиям в скобках.

Предположив противное и воспользовавшись теоремами измеримого выбора, найдем измеримое множество $T\subset[t_0, t_{1k}]$, $\operatorname{mes} T=\delta>0$ и измеримые функции $\alpha_{ik}(t)$, $u_{ik}(t)$, $t\in T$, $i=1,\ldots,n+1$, для которых

$$\alpha_{ik}(t)>0,\quad u_{ik}(t)\in U(t),\quad \sum_{i=1}^{n+1}\alpha_{ik}(t)\equiv 1,\quad t\in T$$

и выполняется неравенство

$$\sum_{i=1}^{n+1}\alpha_{ik}(t)H(x_k^\circ(t),\psi_k^\circ(t),u_{ik}(t),t)> \tag{3.9}$$

$$>\sum_{i=1}^{n+1}\overset{\circ}{\alpha}_{ik}(t)H(x_k^\circ(t),\psi_k^\circ(t),\overset{\circ}{u}_{ik}(t),t),\quad t\in T$$

Пусть $\theta\in T$ принадлежит множеству точек аппроксимативной непрерывности [10] функции

$$h_k(t)=\sum_{i=1}^{n+1}\alpha_{ik}(t)H(x_k^\circ(t),\psi_k^\circ(t),u_{ik}(t),t)-$$

$$-\sum_{i=1}^{n+1}\alpha_{ik}^\circ(t)H(x_k^\circ(t),\psi_k^\circ(t),u_{ik}^\circ(t),t),\quad t\in T$$

которое по теореме Данжуа [10] имеет полную меру на T. Рассмотрим семейство допустимых в задаче (1.5), (1.6), (3.4) управлений $\{\alpha_{ik}^\varepsilon(t),\ u_{ik}^\varepsilon(t),\ i=1,\ldots,n+1\}$, $t_0\leqslant t\leqslant t_{1k}$, $\varepsilon>0$, полученных игольчатым варьированием оптимального управления $\{\alpha_{ik}^\circ(t),\ u_{ik}^\circ(t),\ i=1,\ldots,n+1\}$, $t_0\leqslant t\leqslant t_{ik}$ на промежутке $T_\varepsilon=[\theta,\theta+\varepsilon)\cap T$

$$(\alpha_{ik}^\varepsilon(t),u_{ik}^\varepsilon(t))t=\begin{cases}(\alpha_{ik}(t))t\ u_{ik}(t), & t\in T_\varepsilon\\ (\alpha_{ik}^\circ(t),\ u_{ik}^\circ(t)), & t\in[t_0,t_{ik}]\setminus T_\varepsilon\end{cases}\qquad i=1,\ldots,n+1 \tag{3.10}$$

Пусть $x_k^\varepsilon(t)$, $t_0\leqslant t\leqslant t_{1k}$ — соответствующая управлению (3.10) траектория системы (1.5) с начальным условием $x_k^\varepsilon(t_0)=x_k^\circ(t_0)$. Нетрудно показать, что

$$\|x_k^\varepsilon(t)-x_k^\circ(t)\|\leqslant 2\varepsilon c\mu(t)\exp\left(c_1\int_{t_0}^{t_{1k}}\mu_1(t)\,dt\right),\quad \theta\leqslant t\leqslant t_{1k} \tag{3.11}$$

В силу (3.11) и выбора точки θ получаем из формулы приращения функционала (3.5) при $\alpha_i(t)=\alpha_{ik}^\varepsilon(t)$, $u_i(t)=u_{ik}^\varepsilon(t)$, $i=1,\ldots,n+1$, $t_0\leqslant t\leqslant t_{1k}$ следующее соотношение:

$$\Delta J_k = -\varepsilon \Big[\sum_{i=1}^{n+1} \alpha_{ik}(\theta) H(x_k^\circ(\theta), \psi_k^\circ(\theta),$$
$$u_{ik}(\theta), \theta) - \sum_{i=1}^{n+1} \alpha_{ik}^\circ(\theta) H(x_k^\circ(\theta), \psi_k^\circ(\theta), u_{ik}^\circ(\theta), \theta\Big] + o(\varepsilon)$$

которое при достаточно малых ε противоречит оптимальности набора $\{x_k^\circ(t), a_{ik}^\circ(t), u_{ik}^\circ(t), i = 1, \ldots, n+1\}$, $t_0 \leqslant t \leqslant t_{1k}$ в задаче (1.5), (1.6), (3.4).

Таким образом, неравенство (3.9) не выполняется, что доказывает справедливость равенства (3.8).

Для завершения доказательства теоремы осталось показать, что из (3.8) вытекает выполнение условия максимума (3.2) при почти всех $t \in T_{ik} = \{t \in [t_0, t_{1k}] : \alpha_{ik}^\circ(t) \neq 0\}$.

Предположим, что (3.2) не выполняется для некоторого $t \in T_{ik}$, $i \in \{1, \ldots, n+1\}$. Тогда, воспользовавшись условиями на весовые коэффициенты α_i, $i = 1, \ldots, n+1$, можем записать

$$\sum_{i=1}^{n+1} \alpha_{ik}^\circ(t) H(x_k^\circ(t), \psi_k^\circ(t), u_{ik}^\circ(t), t) < \sup_{u \in U(t)} H(x_k^\circ(t), \psi_k^\circ(t), u, t) \leqslant$$
$$\leqslant \sup_{(\alpha_i, u_i)} \sum_{i=1}^{n+1} \alpha_i H(x_k^\circ(t), \psi_k^\circ(t), u_i, t)$$

что противоречит (3.8). Теорема 3.1 доказана.

4. Сопряженные конусы и обобщенные производные. Для формулировки основного результата введем понятие сопряженного конуса $K_G(e)$ к произвольному непустому замкнутому множеству G конечномерного пространства в точке $e \in G$ и связанное с ним понятие обобщенной производной (D-производной) $D\varphi(x)$ для произвольной полунепрерывной снизу функции $\varphi(x)$ конечного числа вещественных переменных.

Для любой точки s конечномерного пространства рассмотрим множества

$$M(s) = \{z \in G : \rho(s, z) = \rho(s, G)\}, \quad P(s) = \{p : p = \gamma(s - z), z \in M(s), \gamma > 0\} \tag{4.1}$$

Сопряженным конусом $K_G(e)$ к множеству G в точке $e \in G$ назовем замкнутый конус вида

$$K_G(e) = \bigcap_{\delta > 0} \overline{\bigcup_{\|s-e\| \leqslant \delta} P(s)} \tag{4.2}$$

Конус (4.2) является полунепрерывной сверху в смысле Куратовского [8] оболочкой конуса $P(s)$ в точке $s = e$. Можно показать, что для гладких и выпуклых многообразий G понятие сопряженного конуса (4.2) сводится соответственно к обычным понятиям нормали и нормального конуса в смысле выпуклого анализа [11]. Нормальный конус в смысле Кларка [12] является выпуклым замыканием конуса $K_G(e)$.

Пользуясь понятием сопряженного конуса, введем определение D-производной для произвольной полунепрерывной снизу функции $\varphi(x)$, $x \in \mathbf{R}^n$, принимающей значения в расширенной прямой $(-\infty, \infty]$.

Обозначим через $E = \mathrm{epi}\ \varphi = \{(x, \mu) \in \mathbf{R}^{n+1} : \mu \geqslant \varphi(x)\}$ надграфик функции $\varphi(x)$, который является замкнутым множеством в $\mathbf{R}^{n+1}$.

D-производной $D\varphi(x)$ полунепрерывной снизу функции $\varphi : \mathbf{R}^n \to (-\infty, \infty]$ в точке x, $\varphi(x) < \infty$ назовем множество вида

$$(4.3)\qquad D\varphi(x) = \{v \in \mathbf{R}^n : (v, -1) \in K_E(x, \varphi(x))\}$$

где $K_E(x, \varphi(x))$ — сопряженный конус (4.2) к надграфику $E = \mathrm{epi}\ \varphi \subset \mathbf{R}^{n+1}$ в точке $(x, \varphi(x))$.

Таким образом, D-производная полунепрерывной снизу функции на $\mathbf{R}^n$ — это многозначное отображение пространства $\mathbf{R}^n$ во множество его замкнутых подмножеств. Для случая гладких функций $\varphi(x)$ множество (4.3) состоит из одной точки, и понятие D-производной совпадает с обычным понятием производной в классическом анализе. Если $\varphi(x)$ выпукла на $\mathbf{R}^n$, то D-производная (4.3) совпадает с субдифференциалом $\partial\varphi(x)$ в смысле выпуклого анализа [11]. Обобщенный градиент по Кларку [12] получается конструкцией (4.2) при замене сопряженного конуса $K_E(x, \varphi(x))$ его выпуклым замыканием — нормальным конусом в смысле Кларка.

Отметим, что множества $K_G(e)$ и $D\varphi(x)$ могут быть невыпуклыми уже в самых простых случаях. Например, для $\varphi(x) = -|x|$, $x \in \mathbf{R}$ имеем $D\varphi(0) = \{-1; 1\}$.

5. Основной результат. Сформулируем и докажем основной результат статьи — принцип максимума в задаче оптимального быстродействия с негладкими (нефункциональными) ограничениями.

Теорема 5.1. Пусть выполняются предположения а) — в). Тогда в задаче (1.1) — (1.4) отсутствует обобщенное решение $\{x^\circ(t), \alpha_i^\circ(t), u_i^\circ(t), i = 1, \ldots, n+1\}$, $t_0 \leqslant t \leqslant t_1^\circ$, которое для почти всех $t \in [t_0, t_1^\circ]$ удовлетворяет принципу максимума

$$(5.1)\qquad H(x^\circ(t), \psi^\circ(t), u_i^\circ(t), t) = \sup_{u \in U(t)} H(x^\circ(t), \psi^\circ(t), u, t),\ i = 1, \ldots, n+1$$

где $\psi^\circ(t)$, $t_0 \leqslant t \leqslant t_1^\circ$ — соответствующая абсолютно непрерывная траектория системы (3.1) с граничными условиями (условия трансверсальности)

$$(5.2)\qquad (\psi^\circ(t_0), -\psi^\circ(t_1^\circ)) \in K_G(x^\circ(t_0), x^\circ(t_1^\circ)),\ \|\psi^\circ(t_0)\|^2 + \|\psi^\circ(t_1^\circ)\|^2 = 1$$

Доказательство. Рассмотрим последовательность оптимальных в аппроксимирующих задачах (1.5), (1.6), (2.1) траекторий $x_k^\circ(t)$, $t_0 \leqslant t \leqslant t_{1k}$ и соответствующую последовательность сопряженных траекторий $\psi_k^\circ(t)$, $t_0 \leqslant t \leqslant t_{1k}$, удовлетворяющих соотношениям (3.1) — (3.3), $k = 1, 2, \ldots$ (существование таких функций гарантируется теоремой 3.1). Будем считать функции $x_k^\circ(t)$, $\psi_k^\circ(t)$, $k = 1, 2, \ldots$ непрерывно продолженными на весь отрезок $[t_0, t_1^\circ]$. Из условия (3.3) следует, что

$$(5.3)\qquad \|\psi_k^\circ(t_0)\|^2 + \|\psi_k^\circ(t_{1k})\|^2 = 1,\quad k = 1, 2, \ldots$$

По аналогии с доказательством теоремы 2.1 можно заключить, что последовательность $\{\psi_k^\circ(t)\}$, $t_0 \leqslant t \leqslant t_1^\circ$ относительно компактна в пространстве $C[t_0, t_1^\circ]$. Выделим из последовательности $\{x_k^\circ(t), \psi_k^\circ(t)\}$,

$t_0 \leqslant t \leqslant t_1^\circ$, $k = 1, 2, \ldots$, равномерно сходящуюся подпоследовательность, предел которой $\{x^\circ(t), \psi^\circ(t))\}$ является абсолютно непрерывной на $[t_0, t_1^\circ]$ функцией.

Из соотношений (2.2), (3.3), (5.3) и определения сопряженного конуса K_G непосредственно следует, что предельные функции $x^\circ(t)$, $\psi^\circ(t)$, $t_0 \leqslant t \leqslant t_1^\circ$, удовлетворяют граничным условиям (1.3), (5.2). Используя выпуклость множества

$$Q(x, \psi, t) = \Big\{(q_1, q_2) \in \mathbf{R}^{2n}:\ q_1 = \sum_{i=1}^{n+1} \alpha_i f(x, u_i, t),$$
$$q_2 = \sum_{i=1}^{n+1} \alpha_i \partial H(x, \psi, u_i, t) / \partial x,\ \alpha_i \geqslant 0,\ u_i \in U(t),\ \sum_{i=1}^{n+1} \alpha_i = 1\Big\}$$

и условия а) — в), можно показать [8], что найдутся измеримые функции $\alpha_i^\circ(t)$, $u_i^\circ(t)$, $i = 1, \ldots, n+1$, которые вместе с пределами $x^\circ(t)$, $\psi^\circ(t)$, $t_0 \leqslant t \leqslant t_1^\circ$ удовлетворяют связям (1.5), (1.6); (3.1).

Таким образом, полученный набор $\{x^\circ(t), \alpha_i^\circ(t), u_i^\circ(t), i = 1, \ldots, n+1\}$, $t_0 \leqslant t \leqslant t_1^\circ$ является обобщенным решением исходной задачи (1.1) — (1.4). Для доказательства теоремы осталось показать, что функции $x^\circ(t)$, $\psi^\circ(t)$ $u_i^\circ(t)$, $i = 1, \ldots, n+1$ удовлетворяют при почти всех $t \in [t_0, t_1]$ условию максимума (5.1).

Введем обозначения

$$h_k^\circ(t) = \sum_{i=1}^{n+1} \alpha_{ik}^\circ(t) H(x_k^\circ(t), \psi_k^\circ(t), u_{ik}^\circ(t), t), \quad k = 1, 2, \ldots$$
$$h^\circ(t) = \sum_{i=1}^{n+1} \alpha_i^\circ(t) H(x^\circ(t), \psi^\circ(t), u_i^\circ(t), t)$$

считая, что вся последовательность $\{x_k^\circ(t), \psi_k^\circ(t)\}$, $k = 1, 2, \ldots$ равномерно на $[t_0, t_1]$ сходится к пределу $\{x^\circ(t), \psi^\circ(t)\}$. Воспользовавшись соотношением (3.8), можно показать, что для почти всех $t \in [t_0, t_1^\circ]$

$$\lim_{k\to\infty} h_k^\circ(t) = h^\circ(t) = \sup_{(\alpha_i, u_i)} \sum_{i=1}^{n+1} \alpha_i H(x^\circ(t), \psi^\circ(t), u_i, t) \tag{5.4}$$
$$\sum_{i=1}^{n+1} \alpha_i = 1, \quad \alpha_i \geqslant 0, \quad u_i \in U(t), \quad i = 1, \ldots, n+1$$

Из (5.4) по аналогии с доказательством теоремы 3.1 заключаем, что управление $\{\alpha_i^\circ(t), u_i^\circ(t), i = 1, \ldots, n+1\}$ удовлетворяет условию максимума (5.1) для почти всех $t \in T_i = \{t \in [t_0, t_1^\circ]: \alpha_i^\circ(t) \neq 0\}$, $i = 1, \ldots, n+1$.

Для снятия последнего ограничения рассмотрим множество

$$V(t) = \{v \in U(t) : H(x^\circ(t), \psi^\circ(t), v, t) = \sup_{u \in U(t)} H(x^\circ(t), \psi^\circ(t), u, t)\}$$

Из условий а) — в) следует, что множество $V(t)$ непусто для почти всех $t \in [t_0, t_1]$ и его график $\Gamma_V = \{(u, t) \in \Omega \times [t_0, t_1^\circ],\ u \in V(t)\}$ является аналитическим (mod 0) подмножеством пространства $\Omega \times [t_0, t_1^\circ]$. По теоремам измеримого выбора [6,8] найдем измеримую функцию

$u^*(t) \in V(t)$, $t_0 \leqslant t \leqslant t_1^\circ$ и заменим ею управления $u_i^\circ(t)$ на множествах $[t_0, t_1^\circ] \setminus T_i$, $i = 1, \ldots, n+1$. Подправленный таким образом управляющий набор $\{\alpha_i^\circ(t), u_i^\circ(t), i = 1, \ldots, n+1\}$, $t_0 \leqslant t \leqslant t_1^\circ$ удовлетворяет принципу максимума (5.1) для почти всех $t \in [t_0, t_1^\circ]$ и порождает те же траектории $x^\circ(t)$, $\psi^\circ(t)$ в силу систем (1.5), (3.1). Теорема доказана.

Из теоремы 5.1 вытекает принцип максимума для задачи оптимального быстродействия с гладкими и выпуклыми ограничениями и результат Кларка [13] для подобных задач оптимального управления (с фиксированным временем), в котором сопряженный конус K_G в условиях трансверсальности (5.2) заменен своим выпуклым замыканием (нормальным конусом в смысле Кларка). Метод Кларка состоит в редукции исходной задачи (1.1) — (1.4) к обобщенной бивыпуклой задаче Больца, изученной в [14] методами выпуклого анализа. При этом возникают дополнительные предположения о «спокойствии» исходной задачи, которые отсутствуют в рассматриваемом аппроксимационном методе.

Из доказательства теоремы 5.1 нетрудно усмотреть возможность условия основного результата (условий трансверсальности (5.2)) за счет произвольного непустого сужения множества $M(s)$ в конструкции сопряженного конуса (4.1), (4.2).

Поступила 19 II 1976

ЛИТЕРАТУРА

1. *Понтрягин Л. С., Болтянский В. Г., Гамкрелидзе, Р. В., Мищенко Е. Ф.* Математическая теория оптимальных процессов. М., «Наука», 1961.
2. *Красовский Н. Н.* Теория управления движением. М., «Наука», 1968.
3. *Розоноэр Л. И.* Принцип максимума Л С. Понтрягина в теории оптимальных систем. I, II, III. Автоматика и телемеханика, 1959, т. 20, № 10—12.
4. *Габасов Р., Кириллова Ф. М.* Качественная теория оптимальных процессов. М., «Наука», 1971.
5. *Иоффе А. Д., Тихомиров В. М.* Двойственность выпуклых функций и экстремальные задачи. Успехи матем. наук, 1968, т. 23, вып. 6.
6. *Иоффе А. Д., Тихомиров В. М.* Теория экстремальных задач. М., «Наука», 1974.
7. *Гамкрелидзе Р. В.* О скользящих оптимальных режимах. Докл. АН СССР, 1962, т. 143, № 6.
8. *Мордухович Б. Ш.* Существование оптимальных управлений. В сб.: Современные проблемы математики, т. 6. Итоги науки и техники. М., ВИНИТИ, 1976.
9. *Roxin E.* The existence of optimal controls. Michigan Math. J., 1962, vol. 9, No. 2.
10. *Натансон И. П.* Теория функций вещественной переменной. М., «Наука», 1974.
11. *Рокафеллар Р. Т.*, Выпуклый анализ. М., «Мир», 1973.
12. *Clarke F. H.* Generalized gradients and applications. Trans. Amer. Math. Soc., 1975, vol. 205, p. 247—262.
13. *Clarke F. H.* Necessary conditions for nonsmooth variational problems. Lect. Notes Econ. and Math. Syst., 1974, vol. 106, p. 70—91.
14. *Rockafellar R. T.* Conjugate convex functions in optimal control and the calculus of variations. J. Math. Analysis and Appl., 1970, vol. 32, No. 1.