

ОБ ИГРОВОЙ ЗАДАЧЕ О ДОЛИХОБРАХИСТОХРОНЕ

С. А. Чигирь

(Москва)

Для игровой задачи о долихобрахистохроне, рассматриваемой в рамках позиционной формализации, аналогичной [1], определяются множества захвата и уклонения, оптимальные стратегии игроков и цена игры. При этом проявляются особенности, присущие игре на минимакс — максимум времени до встречи [1, 2], определяющиеся в данной задаче специфическим поведением оптимальных траекторий вблизи целевого множества.

Игровая задача о долихобрахистохроне, являющаяся игровым аналогом классической вариационной задачи о брахистохроне [3], рассматривалась Айзексом [4]. Однако, как показано в работе [5], решение, предложенное Айзексом, содержит ошибочные утверждения.

1. В игровой задаче о долихобрахистохроне точка m может двигаться в полуплоскости x, y ($y \geq 0$) в соответствии с уравнениями

$$(1.1) \quad x' = \sqrt{y} \cos u + w(v + 1) / 2, \quad y' = \sqrt{y} \sin u + w(v - 1) / 2$$

Здесь w — положительная постоянная, u и v — управляющие параметры, подчиненные первому и второму игрокам соответственно и стесненные ограничениями

$$(1.2) \quad 0 \leq u \leq 2\pi, \quad -1 \leq v \leq 1$$

Цель первого игрока — быстреее сближение точки m с целевым множеством

$$(1.3) \quad M = \{p = \{x, y\} \mid x = 0, y \geq 0\}$$

являющимся положительной частью оси ординат.

Второй игрок стремится не допустить попадания точки m на множество M или, по крайней мере, отсрочить его. В постановке задачи предполагается, что в начальный момент времени точка m находится в первом квадранте плоскости.

В [4] утверждается, что для начальных точек x_0, y_0 , удовлетворяющих условиям $x_0 > 0, 0 \leq y_0 < w^2$, второй игрок может предотвратить сближение с целевым множеством M вопреки любым усилиям первого игрока. Данное утверждение обосновывается в [4] следующим образом: в области $y < w^2$ второй игрок, попеременно применяя крайние векторы своей вектограммы, т. е. попеременно используя крайние значения параметра v , может передвинуть точку m как угодно далеко от M (см. [4], стр. 123).

В работе [5] построен контрпример, показывающий ошибочность данного утверждения. Оказывается, что и в области $x > 0, 0 \leq y < w^2$ существуют точки, из которых первый игрок способен осуществить сближение с M вопреки любым противодействиям второго игрока и, следовательно, прямая $y = w^2$ не может быть барьером [4].

2. Уточним постановку задачи. Следуя [1], отождествим стратегии первого и второго игроков с функциями $u(p)$, $v(p)$ позиции $p = \{x, y\}$, удовлетворяющими ограничениям (1.2). Стратегия $U \div u(p)$ ($V \div v(p)$) порождает пучок движений $\Pi(p_0, U)$ ($\Pi(p_0, V)$), выходящих из позиции $p_0 = \{x_0, y_0\}$ при $t = 0$. Согласно [1] движение $p[\cdot] \in \Pi(p_0, U)$ определяется как функция $p[t]$, для которой на всяком конечном отрезке $0 \leq t \leq \vartheta$ найдется последовательность ломаных Эйлера $p_{\Delta^{(k)}}[t] = \{x_{\Delta^{(k)}}[t], y_{\Delta^{(k)}}[t]\}$, определяемых условиями

$$(2.1) \quad \begin{aligned} \dot{x}_{\Delta^{(k)}}[t] &= \sqrt{y_{\Delta^{(k)}}[t]} \cos u(p_{\Delta^{(k)}}[\tau_i^{(k)}]) + w(v^{(k)}[t] + 1)/2 \\ \dot{y}_{\Delta^{(k)}}[t] &= \sqrt{y_{\Delta^{(k)}}[t]} \sin u(p_{\Delta^{(k)}}[\tau_i^{(k)}]) + w(v^{(k)}[t] - 1)/2 \\ \tau_i^{(k)} \leq t < \tau_{i+1}^{(k)}, \quad p_{\Delta^{(k)}}[0] &= p_0, \quad \tau_0^{(k)} = 0 \quad (i = 1, 2, \dots) \end{aligned}$$

равномерно сходящаяся к $p[t]$ на отрезке $0 \leq t \leq \vartheta$ и такая, что $\sup_i (\tau_{i+1}^{(k)} - \tau_i^{(k)}) \rightarrow 0$ при $k \rightarrow \infty$.

Отметим, что $\Delta^{(k)}$ в (2.1) обозначает некоторое разбиение полуоси $0 \leq t < \infty$ интервалами $\tau_i^{(k)} \leq t < \tau_{i+1}^{(k)}$, а $v^{(k)}[\cdot]$ — некоторую измеримую функцию, удовлетворяющую условиям (1.2). Аналогично определяются элементы множества $\Pi(p_0, V)$. Подобно [1] можно показать, что множества $\Pi(p_0, U)$, $\Pi(p_0, V)$ не пусты, а все их элементы $p[t] = \{x[t], y[t]\}$ — абсолютно-непрерывные функции, определенные при $0 \leq t < \infty$ и удовлетворяющие условию $y[t] \geq 0$. Кроме того, $\Pi(p_0, U)$ и $\Pi(p_0, V)$ содержат, по крайней мере, один общий элемент.

Для всякого движения $p[t]$ определим $\theta(p[\cdot])$ как наименьшее из чисел $\vartheta \geq 0$, для которых $p[\vartheta] \in M$. Если же $p[\vartheta] \notin M$ при всех $\vartheta \in [0, \infty)$, то будем полагать $\theta(p[\cdot]) = \infty$. Аналогично [1] — пара стратегий U°, V° образует седловую точку для позиции p_0 , если

$$(2.2) \quad \theta(p[\cdot]) \leq T(p_0) < \infty$$

для всякого движения $p[\cdot] \in \Pi(p_0, U^\circ)$ и

$$(2.3) \quad \theta(p[\cdot]) \geq T(p_0)$$

для всякого движения $p[\cdot] \in \Pi(p_0, V^\circ)$. Величина $T(p_0)$ называется при этом ценой игры для позиции p_0 . Если же для позиции p_* существует стратегия U^* , такая, что $\theta(p[\cdot]) < \infty$ для всякого движения $p[\cdot] \in \Pi(p_*, U^*)$, то будем согласно [1] говорить, что для позиции p_* разрешима задача сближения. Если же для позиции p_* найдется стратегия V^* и некоторая открытая окрестность $H(M)$ множества M , такие, что $p[t] \notin H(M)$ при $t \in [0, \infty)$ для всех $p[\cdot] \in \Pi(p_*, V^*)$, то будем говорить, что для позиции p_* разрешима задача уклонения. Ниже на основе метода динамического программирования определяются множества захвата и уклонения, т. е. множества позиций, для которых разрешимы задачи сближения и уклонения соответственно, а также цена игры на множестве захвата.

3. Основное уравнение метода динамического программирования [4] в рассматриваемой задаче имеет вид

$$(3.1) \quad \min_{u \in [0, 2\pi]} \max_{v \in [-1, 1]} [(\sqrt{y} \cos u + w(v+1)/2) T_x + (\sqrt{y} \sin u + w(v-1)/2) T_y] + 1 = 0$$

Здесь T_x, T_y — частные производные от функции $T(x, y)$ по x, y . Вычисляя экстремальные значения в (3.1), получим

$$(3.2) \quad \cos u^\circ = -T_x / \rho, \quad \sin u^\circ = -T_y / \rho, \quad \rho = (T_x^2 + T_y^2)^{1/2}$$

$$(3.3) \quad v^\circ = \text{sign } A, \quad A = T_x + T_y$$

С использованием (3.2), (3.3) уравнение (3.1) принимает вид

$$(3.4) \quad -\sqrt{y}\rho + w(A \text{ sign } A + T_x - T_y) / 2 + 1 = 0$$

В соответствии с методикой [4] граничное условие для уравнения (3.4) задается на допустимом множестве, которое обозначим через $M_F \subset M$ и которое определяется соотношением (см. [4], стр. 110)

$$(3.5) \quad \min_{u \in [0, 2\pi]} \max_{v \in [-1, 1]} [\sqrt{y} \cos u + w(v+1)/2] = -\sqrt{y} + w < 0$$

Из (3.5) получаем

$$(3.6) \quad M_F = \{p = \{x, y\} \mid x = 0, y > w^2\}$$

По смыслу цены игры имеем

$$(3.7) \quad T(p) = 0 \text{ при } p \in M_F$$

Уравнения характеристик для (3.4) имеют вид

$$(3.8) \quad \begin{aligned} x^\circ &= \sqrt{y} T_x / \rho - w(\text{sign } A + 1) / 2, & T_x^\circ &= 0 \\ y^\circ &= \sqrt{y} T_y / \rho - w(\text{sign } A - 1) / 2, & T_y^\circ &= -\rho / (2\sqrt{y}) \\ (z^\circ &= dz / d\tau, & \tau &= -t) \end{aligned}$$

Из (3.4), (3.7) находятся T_x, T_y на множестве M_F , которые вместе с параметрическим представлением M_F задают начальные условия для уравнений (3.8)

$$(3.9) \quad x(0) = 0, y(0) = s, T_x(0) = (\sqrt{s} - w)^{-1}, T_y(0) = 0, s > w^2$$

Уравнения (3.8) с начальными условиями (3.9) проинтегрированы в [1]. Полученное решение имеет вид

$$(3.10) \quad x = \frac{\tau \sqrt{s}}{2} + \frac{s}{2} \sin \frac{\tau}{\sqrt{s}}, \quad T_x = (\sqrt{s} - w)^{-1}$$

$$(3.11) \quad y = \frac{s}{2} \left(1 + \cos \frac{\tau}{\sqrt{s}} \right), \quad T_y = \frac{\sqrt{s/y - 1}}{\sqrt{s} - w}, \quad \tau \in \left[0, \frac{\pi \sqrt{s}}{2} \right]$$

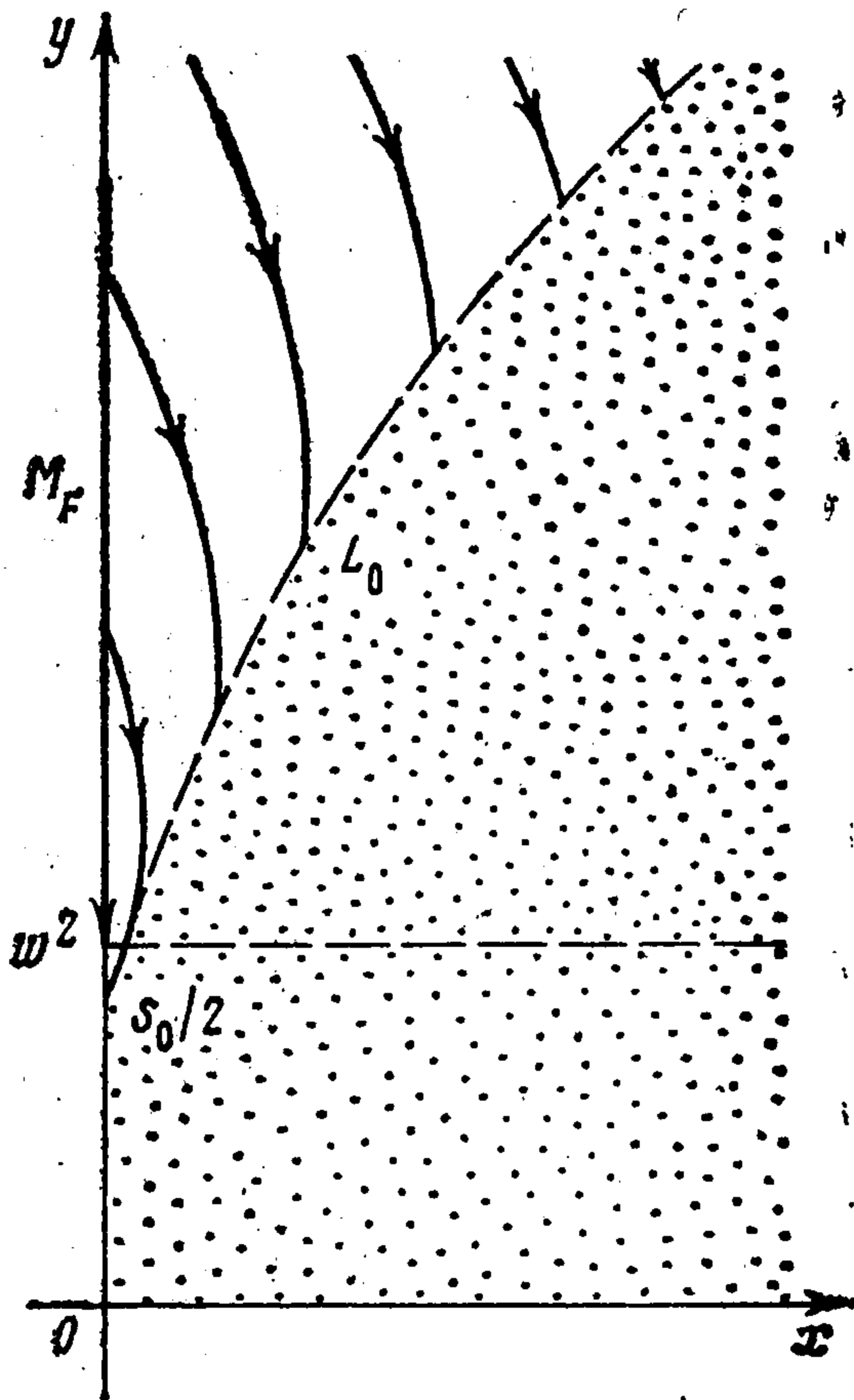
На каждой из характеристик с параметром s величина A монотонно убывает, оставаясь при этом положительной, до момента $\tau_0(s) = \pi \sqrt{s}/2$, в который она обращается в нуль. Точки характеристик, отвечающие этому моменту, образуют параболу L_0 , параметрическое уравнение которой

имеет вид

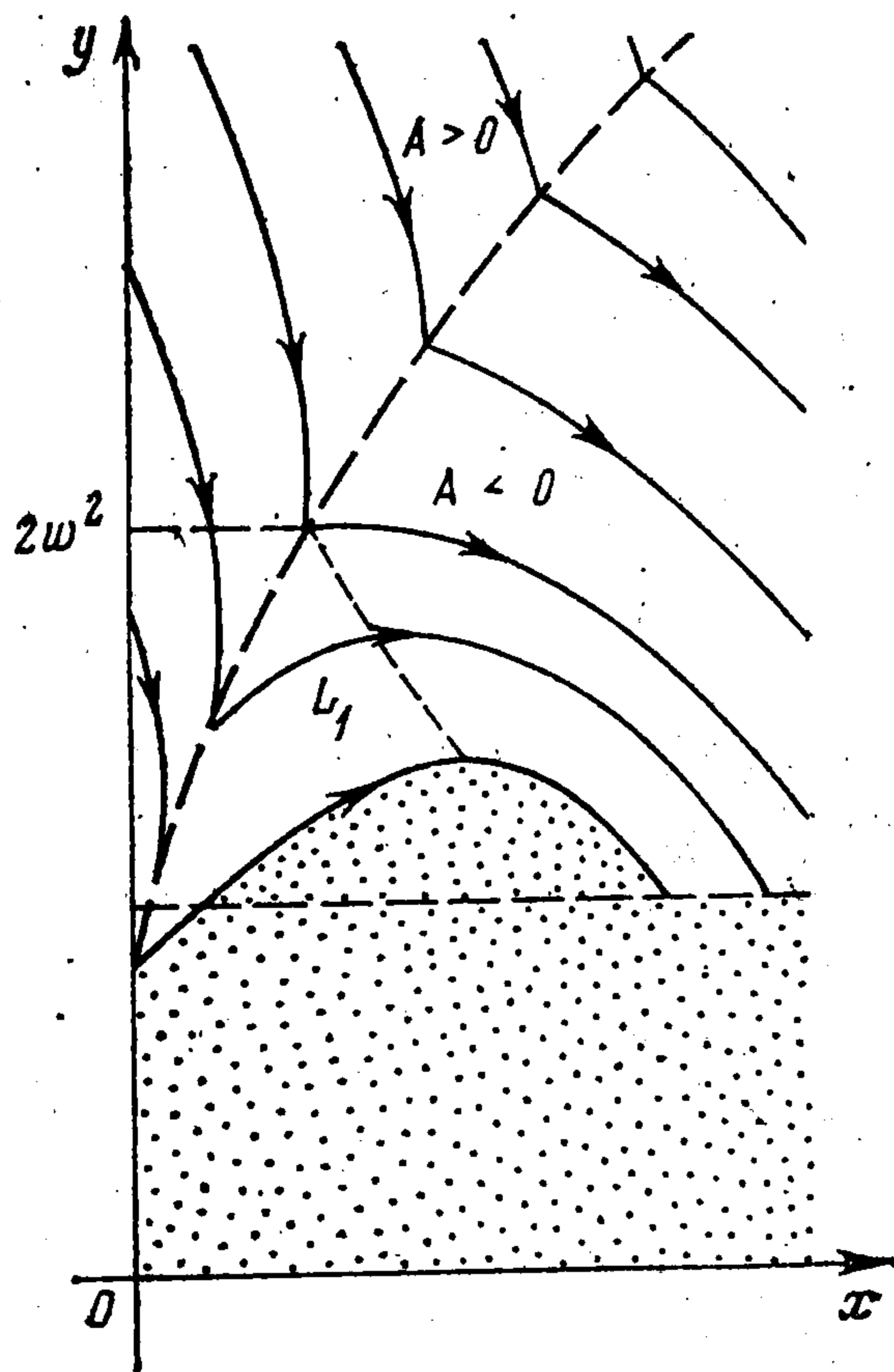
$$(3.12) \quad x = \left(\frac{\pi}{4} + \frac{1}{2} \right) s + \frac{\pi w}{2} \sqrt{s}, \quad y = \frac{s}{2}$$

Парабола L_0 и характеристики (3.10) изображены на фиг. 1.

При $s \geq s_0 = 4\pi^2 w^2 / (\pi + 2)^2$ всякая характеристика удовлетворяет условию $x(\tau, s) \geq 0$ для $\tau \in [0, \tau_0(s)]$. При $s \in (w^2, s_0)$ лишь часть каждой характеристики удовлетворяет условию $x(\tau, s) \geq 0$. По условию задачи начальная позиция x_0, y_0 лежит в первом квадранте, поэтому для на-



Фиг. 1



Фиг. 2

хождения цены игры на основе решения уравнения (3.4) следует использовать лишь участки характеристик, удовлетворяющие условию $x \geq 0$.

Чтобы продолжить интегрирование уравнений (3.8), положим $A < 0$ в (3.8). В качестве начальных условий для получившихся уравнений возьмем значения на характеристиках (3.10), (3.11) в момент $\tau_0(s)$ выхода характеристик (3.10) на L_0 и координаты параболы L_0 . В итоге имеем

$$(3.13) \quad x(\tau_0(s)) = \left(\frac{\pi}{4} + \frac{1}{2} \right) s - \frac{w\pi}{2} \sqrt{s}, \quad y(\tau_0(s)) = \frac{s}{2}$$

$$T_x(\tau_0(s)) = -T_y(\tau_0(s)) = 1 / (\sqrt{s} - w), \quad s \in [s_0, \infty)$$

Уравнение (3.4) используем для разделения переменных в (3.8). Решая (3.4) относительно T_y и учитывая, что $T_x = (\sqrt{s} - w)^{-1}$, получаем для T_y два значения

$$(3.14) \quad T_y = \frac{w \pm Q(y, s)}{w^2 - y}, \quad Q(y, s) = \left[y \left(\frac{w^2 - y}{(\sqrt{s} - w)^2} + 1 \right) \right]^{1/2}$$

Отметим, что величина T_y , определенная формулой (3.14), в которой выбран знак минус, может быть доопределена при $y = w^2$ по непрерывно-

сти значением $T_y = (1 - w^2 T_x^2)/(2w)$, что и будем предполагать выполненным.

Из (3.4) с учетом $A < 0$ находим $\rho = (1 - wT_y)\sqrt{y}$. Используя выражение для величины ρ и формулы (3.14), уравнения характеристик (3.8) можно преобразовать к виду

$$(3.15) \quad x^\circ = \frac{y(y - w^2)}{(y \pm wQ(y, s))(\sqrt{s} - w)}, \quad y^\circ = \pm \frac{Q(y, s)(w^2 - y)}{y \pm wQ(y, s)}$$

Здесь верхние (нижние) знаки соответствуют верхнему (нижнему) знаку в формуле (3.14). При выборе знака минус правые части уравнений (3.15) будем вновь считать доопределенными по непрерывности при $y = w^2$.

Из (3.14) видно, что функция $Q(y, s)$ определена лишь при

$$(3.16) \quad y \in [0, w^2 + (\sqrt{s} - w)^2]$$

Пусть $W(s)$ — множество на плоскости x, y , определяемое условием (3.16), а $\Gamma(s)$ — его верхняя граница. Чтобы определить, какие знаки в уравнениях (3.15) следует выбрать для продолжения интегрирования, отметим, что величина $T_y(y, s)$ при $y = s/2$ должна совпадать с начальными условиями (3.13). Из (3.14) имеем

$$(3.17) \quad T_y\left(\frac{s}{2}, s\right) = \frac{2w(\sqrt{s} - w) \pm \sqrt{s}|\sqrt{s} - 2w|}{(2w^2 - s)(\sqrt{s} - w)}$$

Из соотношения (3.17) видно, что для выполнимости условия $T_y(s/2, s) = T_y(\tau_0(s)) = (\sqrt{s} - w)^{-1}$ в формуле (3.14) и соответствующих ей уравнениях (3.15) следует выбирать знак плюс, если $s \in [4w^2, \infty)$, и знак минус, если $s \in [s_0, 4w^2)$. Заметим, что несмотря на то, что при $s = 4w^2$ величина T_y , определяемая формулой (3.14), не зависит от выбора знака в (3.14), в уравнениях (3.15) следует выбирать знак плюс, так как решения этих уравнений с начальными условиями (3.13) при выборе знака минус в них не существует.

Используя уравнения (3.15), можно построить семейство характеристик для $s \in (s_0, \infty)$. Примерный вид характеристик (3.8) с начальными условиями (3.13) показан на фиг. 2. При $s \in [4w^2, \infty)$ характеристики, представляющие собой решения уравнений (3.15), в которых выбран знак плюс, с течением времени τ «опускаются вниз». При $s \in [s_0, 4w^2)$ характеристики, представляющие собой решения уравнений (3.15), в которых теперь уже выбран знак минус, с течением времени τ «поднимается вверх» вплоть до момента $\tau_1(s)$, в который они выходят на верхнюю границу $\Gamma(s)$ области $W(s)$, гладко касаясь ее. Момент выхода $\tau_1(s)$ определяется из условия

$$(3.18) \quad y(\tau_1(s), s) = w^2 + (\sqrt{s} - w)^2$$

Концы характеристик, отвечающие моменту $\tau_1(s)$, образуют гладкую кривую L_1 , изображенную на фиг. 2. При этом решение уравнений (3.15) при выборе знака минус в них не может быть продолжено для $\tau \in (\tau_1(s), \infty)$. Однако для построения характеристик при $\tau \in (\tau_1(s), \infty)$ мож-

но использовать уравнения (3.15), вновь выбрав в них знак плюс и подобрав подходящим образом начальные условия для этих уравнений на кривой L_1 , так, чтобы сохранить непрерывность функций $x(\tau, s)$, $y(\tau, s)$, $T_x(\tau, s)$, $T_y(\tau, s)$. При этом оказывается, что все построенные таким образом характеристики приближаются к прямой $y = w^2$ неограниченно долго.

Построенное семейство характеристик не заполняет полностью область $y > w^2$, как ошибочно предполагается в [4]. В то же время из уравнений (1.1) нетрудно видеть, что для любой точки из области $y > w^2$ разрешима задача сближения. Для осуществления сближения первому игроку достаточно, например, использовать стратегию U^* , определяемую функцией $u^*(p)$: $u^*(p) = \pi/2$ при $y < 4w^2$, $u^*(p) = 3\pi/4$ при $y \geq 4w^2$. Между тем функция $T(x, y) = \tau(x, y)$, получающаяся разрешением уравнений характеристик $x = x(\tau, s)$, $y = y(\tau, s)$ относительно τ, s , не определена во всей области $y > w^2$ и, следовательно, в соответствии с рецептами динамического программирования не может использоваться для определения оптимальных стратегий в области $y > w^2$. В [4] отмечается, что наличие такой ситуации в дифференциальной игре часто свидетельствует о существовании особых решений — универсальных траекторий. Однако непосредственная проверка условий (7.13.2) из [4] показывает, что в данной игре таких универсальных кривых не существует, и, следовательно, методика дальнейшего интегрирования уравнения (3.4), разработанная в [4] для случая существования универсальных кривых, здесь не применима.

Чтобы продолжить интегрирование уравнения (3.4), рассмотрим некоторые вспомогательные эвристические соображения, с помощью которых получим дополнительные граничные условия для уравнения (3.4). Эти условия позволят завершить интегрирование уравнения (3.4) и использовать полученную в результате такого интегрирования функцию $T(x, y)$ для построения стратегий U°, V° .

4. Во вспомогательных построениях будем полагать, что число $\Theta(p[\cdot])$, фигурирующее в условиях (2.2), (2.3), определяется не первым моментом ϑ , в который выполняется включение $p[\vartheta] \in M$, а задается соотношением

$$(4.1) \quad \Theta(p[\cdot]) = \inf \{ \vartheta \geq 0 \mid x[\vartheta] < 0 \}$$

и определяет, стало быть, первый момент, когда движение $p[\cdot]$ «пересекает» множество M . Отметим, что условие достижения движениями целевого множества M , трактуемое как пересечение, рассматривалось в [4].

Предположим далее, что функция $T(x, y) = \tau(x, y)$, получающаяся разрешением уравнений характеристик $x = x(\tau, s)$, $y = y(\tau, s)$ относительно τ, s , является ценой игры. Из формул (3.8), (3.10), (3.11) видно, что величина $A = T_x + T_y$ положительна в области, расположенной выше параболы L_0 , и отрицательна в области, расположенной ниже L_0 , и уже заполненной характеристиками (см. фиг. 2). Так как $A^\circ = -\rho / (2\sqrt{y}) < 0$, то величина A убывает вдоль каждой характеристики. Но тогда естественно ожидать, что неравенство $A < 0$ сохраняется во всей области, лежащей ниже L_0 , в которой существует цена игры. Обозначим через N_0 точку с координатами $\{0, s_0/2\}$, являющуюся точкой пересечения L_0 с осью

ординат, а через M_0 часть целевого множества M , определяемую условием

$$(4.2) \quad M_0 = \{p = \{x, y\} \mid x = 0, y \in [0, s_0 / 2]\}$$

Пусть далее для начальной позиции $p_0 = \{x_0, y_0\} \in M_0$ существуют стратегии U°, V° , удовлетворяющие условиям (2.2), (2.3), где величина $\Theta(p[\cdot])$ определена соотношением (4.1), причем в области, в которой существует цена игры, эти стратегии определяются формулами (3.2) и (3.3) по функции $T(x, y)$. Тогда для всякого движения $p[\cdot] = \{x[\cdot], y[\cdot]\} \in \Pi(p_0, U^\circ) \cap \Pi(p_0, V^\circ)$ выполняется условие $p[t] \in M_0$ при всех t , для которых $y[t] \leq s_0 / 2$.

В самом деле, движение $p[t]$ не может попасть в область $x < 0$, ибо это противоречит оптимальности действий второго игрока, имеющего возможность не допустить пересечения движениями $p[\cdot] \in \Pi(p_0, V^\circ)$ множества M_0 при $y[t] \leq s_0 / 2$. С другой стороны, из того, что $A < 0$ в области, расположенной ниже параболы L_0 и соотношения (3.3), следует, что $v^\circ(p) = -1$, ($V^\circ \div v^\circ(p)$), если точка p лежит ниже L_0 . Из уравнений (1.1), в свою очередь, видно, что если движение $p[\cdot] \in \Pi(p_0, U^\circ) \cap \Pi(p_0, V^\circ)$ попадает в область $x > 0$, то вынужденное двигаться в этой области в отрицательном направлении оси ординат, оно вообще не достигает множества M , что противоречит оптимальности действий первого игрока.

В силу условия $p[t] \{x[t], y[t]\} \in M_0$ при $y[t] \leq s_0 / 2$ всякое движение $p[\cdot] \in \Pi(p_0, U^\circ) \cap \Pi(p_0, V^\circ)$ удовлетворяет условиям

$$(4.3) \quad x^*[t] = 0, y^*[t] \in [-\sqrt{2y[t]} - w, \sqrt{2y[t]} + w]$$

для всех t , для которых $y[t] \leq s_0 / 2$. Естественно предположить, что движения $p[\cdot] \in \Pi(p_0, U^\circ)$, порождаемые стратегией U° среди всех решений (4.3), характеризуются тем, что, во-первых, $y^*[t] > 0$ при $y[t] \leq s_0 / 2$, а, во-вторых, движения $p[\cdot]$ достигают точки $N_0 \in M_0$ за минимальное время по сравнению со всеми решениями $p(\cdot)$ включения (4.3). Но это означает, что движения $p[\cdot]$, порождаемые стратегиями U°, V° , удовлетворяют уравнению

$$(4.4) \quad x^* = 0, y^* = \sqrt{2y} - w, x[0] = 0, y[0] = y_0$$

Из (4.4) видно, что при $y_0 > w^2 / 2$ движение точки $m = \{x, y\}$, описываемое уравнениями (4.4), происходит в положительном направлении оси y , а при $y_0 < w^2 / 2$ — в отрицательном. Точка $y_0 = w^2 / 2$ соответствует положению равновесия уравнения (4.4). Ниже выясним, что через эту точку на оси ординат проходит барьер, т. е. кривая, разделяющая области, в которых разрешимы задачи сближения и уклонения. Интегрируя второе из уравнений (4.4) в пределах от y до $s_0 / 2$, находим время движения из точки $p = \{0, y\}$ до N_0

$$(4.5) \quad \omega_0(y) = \sqrt{s_0} - \sqrt{y} + w \ln \frac{\sqrt{s_0} - w}{\sqrt{2y} - w}$$

$$s_0 = 4\pi^2 w^2 / (\pi + 2)^2, \quad y \in (w^2 / 2, s_0 / 2]$$

Естественно ожидать, что после достижения точки N_0 точка m движется до множества M_F по характеристике с параметром s_0 , так что полное время движения равно

$$(4.6) \quad w(y) = \omega_0(y) + \pi^2 w / (\pi + 2)$$

5. Используя функцию $\omega(y)$ в качестве краевого условия для уравнения (3.4), продолжим формальное интегрирование этого уравнения методом характеристик. Приведенные в п. 4 эвристические соображения в дальнейшем нигде не используются.

В соответствии с методикой [4] начальные условия для уравнения (3.8) определяются по функции $\omega(y)$ и уравнению (3.4) следующим образом:

$$(5.1) \quad T_x(\tau_*(s)) = -T_y(\tau_*(s)) = (\sqrt{s} - w)^{-1}$$

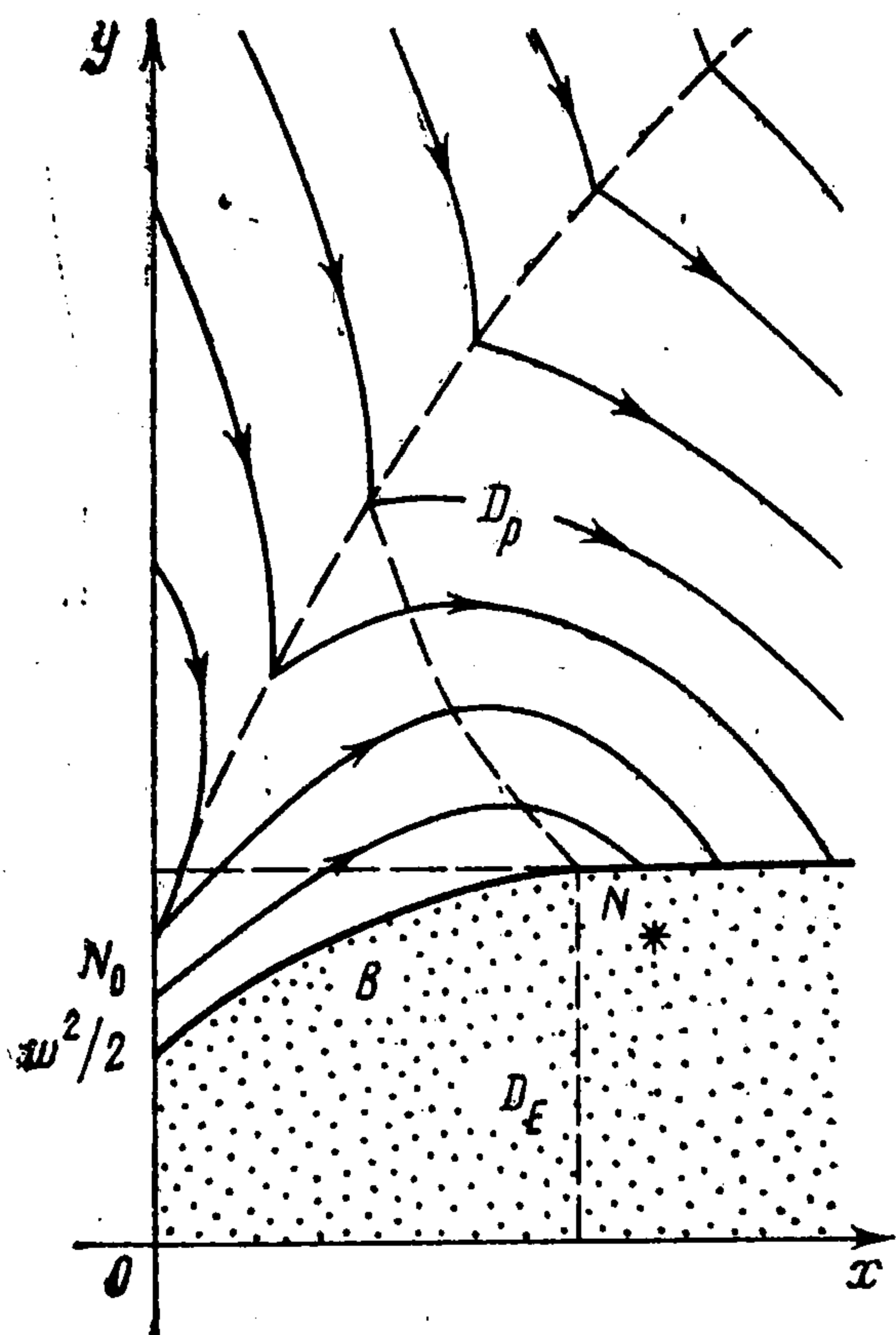
$$(5.2) \quad x(\tau_*(s)) = 0, \quad y(\tau_*(s)) = s/2, \quad \tau_*(s) = \omega(s/2)$$

При интегрировании (3.8) с начальными условиями (5.1), (5.2) следует воспользоваться уравнениями (3.15), подбирая подходящим образом знаки плюс и минус в этих уравнениях подобно тому, как это делалось выше. Характеристики, получающиеся подобным интегрированием, показаны на фиг. 3. При этом оказывается, что при $s \rightarrow w^2$ характеристики сходятся к некоторой кривой B_* , уравнение которой может быть получено из (3.15) и имеет вид

$$(5.3) \quad x(y) = -[y(w^2 - y)]^{1/2} - w^2 \arcsin \frac{\sqrt{y}}{w} + w^2 \left(\frac{1}{2} - \frac{\pi}{4} \right)$$

$$y \in [w^2/2, w^2]$$

Обозначим через B гладкую кривую, получающуюся склейкой кривой B_* с частью прямой $y = w^2$, лежащей в области $x > w^2 / (\pi/4 + 1/2)$, а че-



Фиг. 3

рез D_P и D_E — области, на которые кривая B делит первый квадрант плоскости, как показано на фиг. 3. Пользуясь уравнениями (3.10), (3.15), можно проверить, что построенное семейство характеристик при $s \in (w^2, \infty)$ однозначно покрывает область D_P . Так как $x(\tau, s)$, $y(\tau, s)$ непрерывны по τ , s при $\tau > 0$, $s > w^2$, то функция $T(x, y) = \tau(x, y)$, получающаяся решением уравнений характеристик относительно τ , будет непрерывно дифференцируемой в области D_P . Кроме того, полученная функция является решением уравнения (3.1) в области D_P и удовлетворяет краевым условиям (3.7) и

$$(5.4) \quad T(0, y) = \omega(y) \quad \text{при} \\ y \in (w^2/2, s_0/2]$$

Отметим также, что $T(p) \rightarrow \infty$, когда $p \rightarrow p_* \in B$, $p \in D_P$. Построенную функцию $T(x, y)$ можно использовать для решения задач сближения — уклонения и построения стратегий U° , V° .

Обратимся сперва к задаче об уклонении. Используя уравнение (8.3.1) из [4], можно показать, что для уравнений (1.1) существует семейство кри-

вых, названных в [4] полупроницаемыми и описываемых уравнением

$$(5.5) \quad x(y, c) = -[y(w^2 - y)]^{1/2} - w^2 \arcsin \frac{\sqrt{y}}{w} + c$$

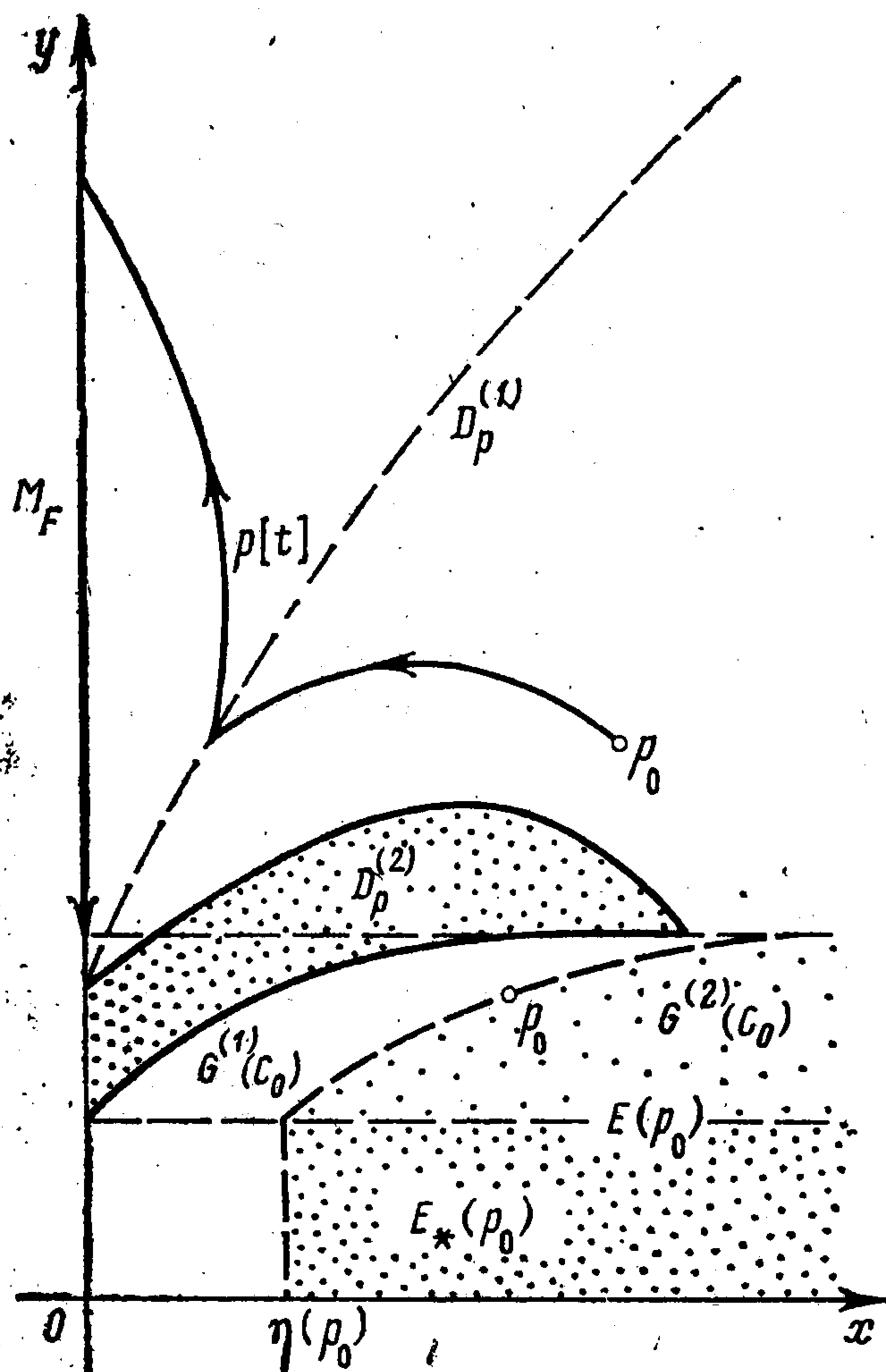
$$y \in [w^2/2, w^2], c \in (-\infty, \infty)$$

Полупроницаемые кривые (5.5) изображены на фиг. 4.

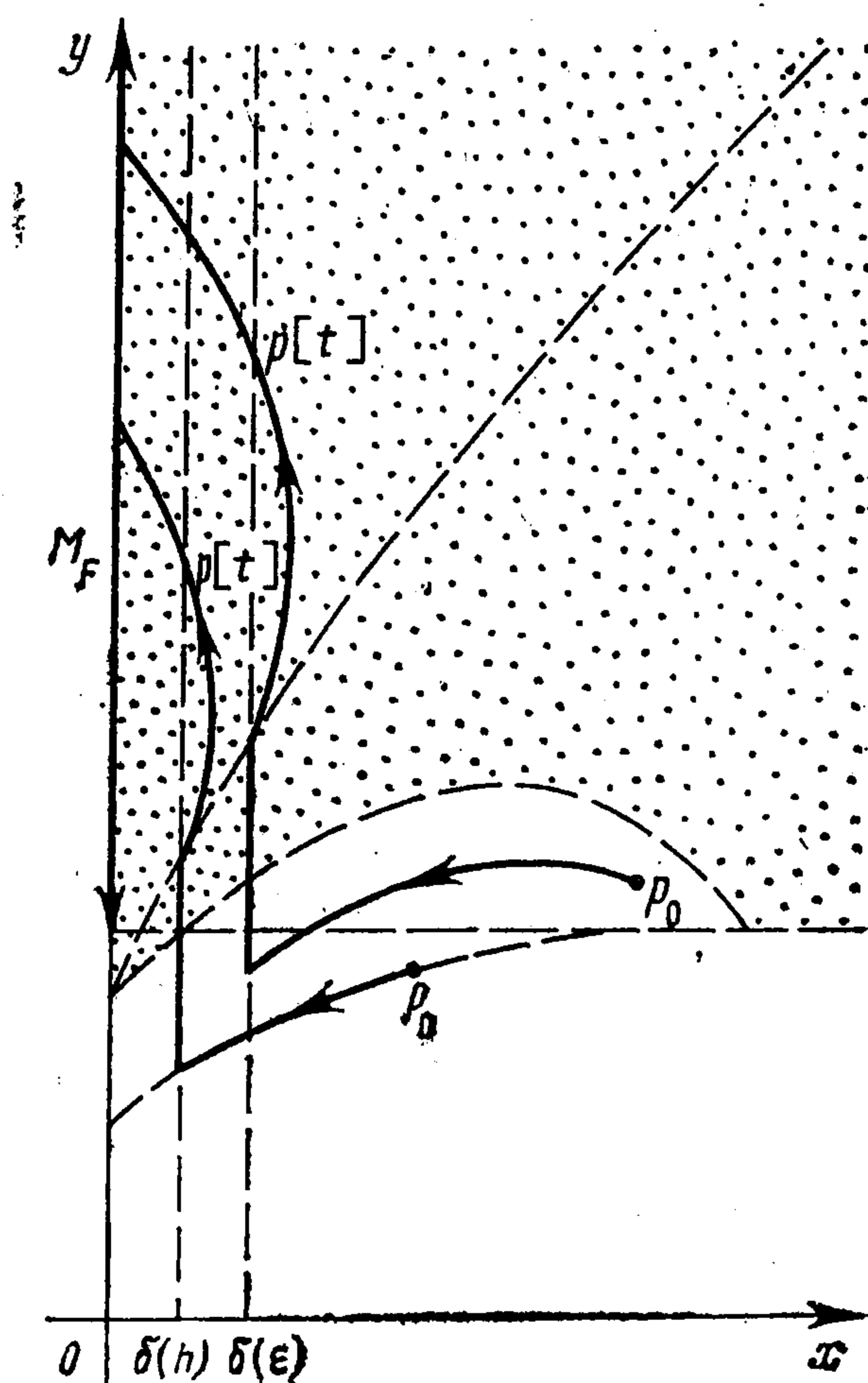
Кривые (5.5) обладают следующим свойством, названным в [4] свойством полупроницаемости. Обозначим через $G_1(c_0), G_2(c_0)$ области, на которые кривая (5.5) с параметром c_0 делит полосу

$$(5.6) \quad G = \{p = \{x, y\} \mid y \in [w^2/2, w^2]\}$$

как это показано на фиг. 4. Тогда, если $p_0 \in G_2(c_0)$, то стратегия



Фиг. 4



Фиг. 5

$V^* \div v^*(p)$, ($v^*(p) = -1$) обеспечивает сохранение всех движений $p[\cdot] = \{x[\cdot], y[\cdot]\} \in \Pi(p_0, V^*)$ во множестве $G_2(c_0)$ при всех t , для которых $y[t] \in [w^2/2, w^2]$.

Используя указанное свойство кривых из семейства (5.5), можно показать, что на множестве $D_E \cup B^*$, где $B^* = B \setminus B_*$, разрешима задача уклонения.

Обозначим через $\eta(p_0)$ абсциссу точки пересечения кривой семейства (5.5), проходящей через точку $p_0 \in D_E \cup B^*$, с прямой $y = w^2/2$ и введем стратегию V_{p_0} , определяемую функцией

$$(5.7) \quad v_{p_0}(p) = v_{p_0}(x, y) = \text{sign}(\eta(p_0) - x)$$

Пусть $E(p_0)$ — замкнутое множество, ограниченное кривой из семейства (5.5), проходящей через точку p_0 и прямыми $y = w^2$, $x = \eta(p_0)$, $y = 0$, как показано на фиг. 4. Тогда, основываясь на свойстве полупроницаемости кривых (5.5), можно пока-

зять, что всякое движение $p[\cdot] \in \Pi(p_0, U_{p_0})$ сохраняется на множестве $E(p_0)$ до первого момента попадания на замкнутое множество

$$E_*(p_0) = \{p = \{x, y\} \mid x \geq \eta(p_0), y \in [0, w^2/2]\}$$

В то же время, обращаясь к соотношению (5.7), можно проверить, что стратегия V_{p_0} обеспечивает выполнение условия $p[t] \in E_*(p_0)$, $t \in [t_*, \infty)$ для всех движений $p[\cdot] \in \Pi(p_0, V_{p_0})$, для которых $p[t_*] \in E_*(p_0)$. Но тогда для всякого движения $p[\cdot] \in \Pi(p_0, V_{p_0})$ эта же стратегия обеспечивает и выполнение включения $p[t] \in E(p_0)$, $t \in [0, \infty)$, которое совместно с условием $E(p_0) \cap M^{(\eta(p_0)/2)} = \emptyset$ означает, что стратегия V_{p_0} уклоняет все движения, порождаемые ею из позиции p_0 от $\eta(p_0)/2$ — окрестности множества M .

Рассмотрим теперь задачу о сближении. Обозначим через N_* точку с координатами $\{w^2/(\pi/4 + 1/2), w^2\}$, по которой склеиваются кривые B_* и B^* , а через $D_P^{(2)}$ замкнутое множество, ограниченное кривой B и характеристикой с параметром $s_0 = 4\pi^2 w^2/(\pi + 2)^2$, как это показано на фиг. 4. Пусть далее $D_P^{(1)} = D_P \setminus D_P^{(2)}$. Зададим стратегии U°, V° функциями $u^\circ(p), v^\circ(p)$, определенными соотношениями (3.2), (3.3) при $p \in D_P$ и продолженными произвольным непрерывным образом для $p \notin D_P$. Например, можно положить $u^\circ(p) = \pi - w^2 \arcsin \sqrt{y}/w$, $v^\circ(p) = -1$ при $p = \{x, y\} \notin D_P$.

Оказывается, что на множестве $D_P \cup (B_* \setminus N_*)$ разрешима задача сближения, причем в открытом множестве $D_P^{(1)}$ цена игры совпадает с функцией $T(x, y)$, полученной формальным интегрированием уравнения (3.4), а стратегии U°, V° , введенные выше, удовлетворяют условиям (2.2), (2.3), и дают, стало быть, седловую точку для дифференциальной игры (1.1) — (1.3). Вид движений $p[\cdot] \in \Pi(p_0, U^\circ) \cap \Pi(p_0, V^\circ)$ при $p_0 \in D_P^{(1)}$ показан на фиг. 4.

На множестве $D_P^{(2)} \cup (B_* \setminus N_*)$ структура дифференциальной игры (1.1) — (1.3) оказывается несколько иной. Именно, в случае $p_0 \in D_P^{(2)} \setminus B$ стратегия U° гарантирует для всех движений $p[\cdot] \in \Pi(p_0, U^\circ)$ выполнение соотношения $\theta(p[\cdot]) \leq T(p_0)$. В то же время стратегии V , гарантирующей выполнение условия (2.3) для всех движений, порождаемых этой стратегией, не существует. Однако для всякого $\varepsilon > 0$ можно указать стратегию $V_\varepsilon \div v_\varepsilon(p)$, гарантирующую выполнение соотношения $\theta(p[\cdot]) \geq T(p_0) - \varepsilon$ для всех движений $p[\cdot] \in \Pi(p_0, V_\varepsilon)$. Функцию $v_\varepsilon(p)$ можно определить, например, следующим образом:

$$(5.8) \quad v_\varepsilon(p) = -1 \quad \text{при } x \leq \delta, \quad v_\varepsilon(p) = v^\circ(p) \quad \text{при } x > \delta$$

где $\delta = \delta(\varepsilon)$ — достаточно малое положительное число, а $v^\circ(p)$ — функция, определяющая стратегию V° . Таким образом, в случае $p_0 \in D_P^{(2)}$, $p_0 \notin B$ существует оптимальная стратегия U° первого игрока и лишь ε — оптимальная стратегия второго (ср. [1], стр. 83). На фиг. 5 показан вид ε -оптимальных движений $p[\cdot] \in \Pi(p_0, U^\circ) \cap \Pi(p_0, V_\varepsilon)$.

В случае $p_0 \in B_*$, $p_0 \neq N_*$ стратегия U° , определенная выше, разрешает для позиции p_0 задачу сближения, однако множество моментов первой встречи движений $p[\cdot] \in \Pi(p_0, U^\circ)$ с множеством M оказывается в этом случае неограниченным, что, как отмечается в [6], может привести к осложнениям. В данном случае это проявляется в том, что хотя для позиции $p_0 = \{x_0, y_0\}$ разрешима задача сближения (при этом все движе-

ния $p[\cdot] \in \Pi(p_0, U^\circ) \cap \Pi(p_0, V^\circ)$ достигают множества M за время $w \ln(w^2 / (2w^2 - y_0))$, тем не менее для всякого числа h существует стратегия $V_h \div v_h$, гарантирующая для всякого движения $p[\cdot] \in \Pi(p_0, V_h)$ выполнение соотношения $\theta(p[\cdot]) \geq h$.

Функцию $v_h(p)$, определяющую стратегию V_h , можно определить, например, формулами (5.8) при $p \in D_P$, причем $\delta = \delta(h) > 0$ следует выбрать достаточно малым, и соотношением

$$(5.9) \quad v_h(p) = v_h(x, y) = \text{sign}(y + x - w^2 / 2)$$

при $p \notin D_P$. В силу этого для позиций $p_0 \in B_*$, $p_0 \neq N_*$ пропадает описанная выше ситуация ε -равновесия, имеющая место для позиций $p_0 \in D_P^{(2)} \setminus B$. На фиг. 5 показан вид движений $p[\cdot] \in \Pi(p_0, U^\circ) \cap \Pi(p_0, V_h)$.

Наконец, в случае $p_0 = N_*$ для всякой стратегии V второго игрока и всякой открытой окрестности $H(M)$ множества M найдется движение $p[\cdot] \in \Pi(N_*, V)$, попадающее в $H(M)$ при некотором $\vartheta \geq 0$, так, что задача уклонения для позиции N_* оказывается неразрешимой. В то же время для всякой стратегии U существует движение $p[\cdot] \in \Pi(N_*, U)$, удовлетворяющее условию $p[t] \notin M$ при всех $t \in [0, \infty)$, и, стало быть, задача сближения для позиции N_* также неразрешима.

Указанную трудность можно успешно преодолеть, если в задаче уклонения условие уклонения всякого движения от некоторой окрестности $H(M)$ множества M заменить условием уклонения всякого движения от самого множества M . В этом случае для позиции N_* будет разрешима задача уклонения, причем стратегия, разрешающая указанную задачу уклонения, может быть определена функцией (5.14).

Доказательство основных приведенных утверждений проводится оценкой величины изменения функции $T(p)$ на движениях $p[t]$ системы (1.1) подобно [1, 7] с учетом того, что: 1) функция $T(p)$ непрерывно дифференцируема в области D_P и совместно с функциями $u^\circ(p)$, $v^\circ(p)$ удовлетворяет уравнению (3.1) в области D_P ; 2) $T(p) > 0$ при $p \notin M$, $T(p) = 0$ при $p \in M_F$; 3) $p[t] \in D_P$ для всякого движения $p[\cdot] \in \Pi(p_0, U^\circ)$, $p_0 \in D_P$ на всяком отрезке $[0, \vartheta]$, на котором $p[t] \notin M$; 4) в области D_E разрешима задача уклонения.

Автор благодарит А. А. Богоявленского за постановку задачи и внимание к работе.

Поступила 25 XI 1974

ЛИТЕРАТУРА

1. Красовский Н. Н., Субботин А. И. Позиционные дифференциальные игры. М., «Наука», 1974.
2. Красовский Н. Н., Субботин А. И. О структуре игровых задач динамики. ПММ, 1971, т. 35, вып. 1.
3. Иоффе А. Д., Тихомиров В. М. Теория экстремальных задач. М., «Наука», 1974.
4. Айзекс Р. Дифференциальные игры. М., «Мир», 1967.
5. Лидов М. Л. Об одной задаче дифференциальных игр. Автоматика и телемеханика, 1971, № 4.
6. Красовский Н. Н. Дифференциальная игра сближения — уклонения. I. Изв. АН СССР. Техн. кибернетика, 1973, № 2.
7. Байбазаров М. Достаточные условия оптимальности в дифференциальных играх. ПММ, 1971, т. 35, вып. 6.