К ВОПРОСУ О ВЗАИМОДЕЙСТВИИ РЕЗОНАНСОВ

Г. Г. Хазина

(Москва)

Изучается устойчивость положения равновесия системы, нейтральной в линейном приближении и обладающей двумя зацепленными по двум частотам резонансами, каждый из которых в отдельности не вызывает неустойчивости во втором приближении. Показано, что в отличие от случая независимых и зацепленных по одной частоте резонансов устойчивость может (в том же порядке) нарушиться.

Рассматривается система обыкновенных дифференциальных уравнений с действительными коэффициентами

(1) $$dx_\alpha / dt = A_\alpha^\beta x_\beta + A_\alpha^{\beta\gamma} x_\beta x_\gamma + O(|x|^3), \quad \alpha, \beta, \gamma = 1, \ldots, n$$

Собственные значения линеаризованной системы предполагаются чисто мнимыми и простыми. Изучается устойчивость положения равновесия $x_d = 0$ относительно вариации начальных данных, если система обладает двумя резонансами третьего порядка. Устойчивость понимается по Биркгофу.

Частично этот вопрос рассмотрен в [1]: показано, что взаимодействие двух резонансов, каждый из которых неустойчивости не вызывает (для краткости здесь их называем несущественными), не приводит к неустойчивости, если резонансы независимы или зацеплены по одной частоте. Случай зацепления по двум частотам намного сложнее предыдущих. В [1] приведены примеры конкретных систем, показывающих, что в результате такого взаимодействия несущественных резонансов устойчивость может потеряться.

Ниже рассматривается более подробно взаимодействие таких резонансов. Это исследование не охватывает всех возможных вариантов, но включает в себя, как частный случай, пример из работы [1].

Итак, пусть система (1) имеет следующие (несущественные) резонансы:

$$\lambda_2 - 2\lambda_1 = 0, \quad \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 0$$

Выпишем нормальную форму исследуемой системы во втором приближении

(2) $$y_1^{\cdot} = \lambda_1 y_1 + B_1 y_1^* y_2 + C_1 y_2^* y_3^*$$

$$y_2^{\cdot} = \lambda_2 y_2 + B_2 y_1^2 + C_2 y_1^*, \; y_3^*, \; \dot{y}_3 = \lambda_3 y_3 + C_3 y_1^* y_2^*$$

$$y_j^{\cdot} = \lambda_j y_j, \; j = 4, \ldots, l, \; 2l = n$$

(уравнения для сопряженных величин аналогичны). Введем полярные координаты $y_\alpha = \rho_\alpha e^{i\varphi_\alpha}$, $\alpha = 1, \ldots, l$. Тогда (2) примет вид (уравнения для φ_α не выписаны)

(3) $$d\rho_i^2/dt = 2P_j(\psi_1)\rho_1^2\rho_2 + 2Q_j(\psi_2)\rho_1\rho_2\rho_3, \; j = 1, 2$$

$$d\rho_3^2/dt = 2Q_3(\psi_2)\rho_1\rho_2\rho_3$$

$$\frac{d\psi_1}{dt} = 2\rho_1^2\rho_2\left(\frac{P_1'}{\rho_1^2} + \frac{P_2'}{2\rho_2^2}\right) + 2\rho_1\rho_2\rho_3\left(-\frac{Q_1'}{\rho_1^2} + \frac{Q_2'}{2\rho_2^2}\right)$$

$$\frac{d\psi_2}{dt} = \rho_1^2\rho_2\left(-\frac{P_1'}{\rho_1^2} + \frac{P_2'}{\rho_2^2}\right) + \rho_1\rho_2\rho_3\left(\frac{Q_1'}{\rho_1^2} + \frac{Q_2'}{\rho_2^2} + \frac{Q_3'}{\rho_3^2}\right)$$

$$2P_j = \beta_j \cos\psi_1 + \alpha_j \sin\psi_1, \quad j = 1, 2$$

$$2Q_k = \mu_k \cos\psi_2 + \gamma_k \sin\psi_2, \quad k = 1, 2, 3$$

$$\beta_1 = 2\mathrm{Re}\, B_1, \quad \alpha_1 = -2\mathrm{Im} B_1, \quad \beta_2 = 2\mathrm{Re} B_2, \quad \alpha_2 = 2\mathrm{Im} B_2$$

$$\mu_k = 2\mathrm{Re} C_k, \; \gamma_k = 2\mathrm{Im} C_k, \quad k = 1, 2, 3, \; \psi_1, = \varphi_2 - 2\varphi_1, \quad \psi_2 = \varphi_1 + \varphi_2 + \varphi_3$$

Рассмотрим класс систем (3), для которых $\beta_j = \mu_k = 0$, $j = 1, 2$, $k = 1, 2, 3$, так что

(4) $$d\rho_j^2/dt = \alpha_j \rho_1^2\rho_2 \sin\psi_1 + \gamma_j \rho_1\rho_2\rho_3 \sin\psi_2, \; j = 1, 2$$

$$d\rho_3^2/dt = \gamma_3\rho_1\rho_2\rho_3 \sin\psi_2$$

$$\frac{d\psi_1}{dt} = \rho_1^2\rho_2\left(\frac{\alpha_1}{\rho_1^2} + \frac{\alpha_2}{2\rho_2^2}\right)\cos\psi_1 + \rho_1\rho_2\rho_3\left(-\frac{\gamma_1}{\rho_1^2} + \frac{\gamma_2}{2\rho_2^2}\right)\cos\psi_2$$

$$\frac{d\psi_2}{dt} = \rho_1^2\rho_2\left(-\frac{\alpha_1}{2\rho_1^2} + \frac{\alpha_2}{2\rho_2^2}\right)\cos\psi_1 + \rho_1\rho_2\rho_3\left(\frac{\gamma_1}{2\rho_1^2} + \frac{\gamma_2}{2\rho_2^2} + \frac{\gamma_3}{2\rho_3^2}\right)\cos\psi_2$$

Условие несущественности первого резонанса означает, что $\alpha_2 = -k\alpha_1$, $k > 0$ [1]. Требование несущественности второго из изучаемых резонансов означает, что в ряду γ_1, γ_2, γ_3 есть хотя бы одна перемена знака [2]. Будем считать, что $\gamma_1\gamma_2\gamma_3 \neq 0$.

Система (4) имеет интеграл

$$I = k\rho_1^2 + \rho_2^2 - \varkappa\rho_3^2, \quad \varkappa = \frac{k\gamma_1 + \gamma_2}{\gamma_3}$$

Поэтому если $\varkappa < 0$, то положение равновесия устойчиво.

Пусть теперь $\varkappa > 0$. Посмотрим, при каких ограничениях на коэффициенты система (4) имеет растущее решение типа инвариантного луча

$$\rho_1(t) = b(t), \ \rho_2(t) = k_2 b(t), \ \rho_3(t) = k_3 b(t), \ k_2, \ k_3 > 0 \tag{5}$$

$$db^2 / dt > 0, \quad b(0) > 0, \quad \psi_1 = \psi_2 = \pi / 2.$$

Как нетрудно видеть, необходимо потребовать, чтобы γ_3 было положительно, k_3 удовлетворяло квадратному уравнению

$$\gamma_1 z^2 + \alpha_1 z - \gamma_3 = 0 \tag{6}$$

а

$$k_2^2 = k_3(-k\alpha_1 + k_3\gamma_2) / \gamma_3$$

Таким образом, решение вида (5) системы (4) существует при следующих условиях:

$$\gamma_3 > 0, \quad -k\alpha_1 + k_3\gamma_2 > 0, \quad k\gamma_1 + \gamma_2 > 0 \tag{7}$$

где k_3 — положительный корень уравнения (6) (он существует при любом α_1, если $\gamma_1 > 0$, и при $\alpha_1 > 0$, если $\gamma_1 < 0$).

Итак, показано, что положение равновесия системы (4) устойчиво, если $(k\gamma_1 + \gamma_2) / \gamma_3 < 0$, и неустойчиво при выполнении неравенств (7).

Видно, что при

$$\gamma_3 < 0, \quad -k\alpha_1 + k_3\gamma_2 > 0, \quad k\gamma_1 + \gamma_2 < 0$$

положение равновесия также неустойчиво, так как существует растущее решение вида (5), причем $\psi_1 = \psi_2 = -\pi / 2$.

Заметим, что в пространстве коэффициентов системы (4) осталась область, в которой неустойчивость, если и есть, то имеет другой характер. В случае $\gamma_1 > 10$, $\gamma_3 > 0$ имеем: устойчивость при $\gamma_2 < -k\gamma_1$, неустойчивость при $k\alpha_1 / k_3 < \gamma_2 < 0$. При $\gamma_1 < 0$, $\gamma_3 > 0$ (тогда $\gamma_2 > 0$) имеем: устойчивость при $0 < \gamma_2 < -k\gamma_1$, неустойчивость при $\gamma_2 > k\alpha_1 / k_3$. Интервал между зонами устойчивости и неустойчивости тем меньше, чем меньше γ_3, и стягивается в точку для вырожденной системы, в которой $\gamma_3 = 0$.

Поступила 16 X 1975

ЛИТЕРАТУРА

1. *Хазина Г. Г.* Некоторые вопросы устойчивости при наличии резонансов. ПММ, 1974, т. 38, вып. 1.
2. *Куницын А. Л.* Об устойчивости в критическом случае трех пар чисто мнимых корней при внутреннем резонансе. ПММ, 1971, т. 35, вып. 1.

Технический редактор *З. В. Филиппова*

Сдано в набор 23/VII-1976 г. Т-15578 Подписано к печати 17/IX-1976 г. Тираж 2845 экз.
Зак. 880 Формат бумаги 70×108¹/₁₆ Усл. печ. л. 16,8 Бум. л. 6,0 Уч.-изд. л. 16,2

2-я типография издательства «Наука». Москва, Шубинский пер., 10