ЛИТЕРАТУРА

1. *Айзерман М. А., Гантмахер Ф. Р.* Абсолютная устойчивость регулируемых систем. М., Изд-во АН СССР, 1963.
2. *Гантмахер Ф. Р., Якубович В. А.* Абсолютная устойчивость нелинейных регулируемых систем. Тр. II Всес. съезда по теоретической и прикладной механике. М., «Наука», 1965.
3. *Якубович В. А.* Решение некоторых матричных неравенств, встречающихся в теории автоматического регулирования. Докл. АН СССР, 1962, т. 143, № 6.
4. *Якубович В. А.* Абсолютная устойчивость нелинейных регулируемых систем в критических случаях. III. Автоматика и телемеханика, 1964, т. 25, № 5.
5. *Якубович В. А.* Периодические и почти периодические предельные режимы регулируемых систем с несколькими, вообще говоря, разрывными нелинейностями. Докл. АН СССР, 1966, т. 171, № 3.
6. *Kalman R. E.* Liapunov functions for the problem of Lur'e in automatic control. Proc. Nat. Acad. Sci. USA, 1963, vol. 49.
7. *Попов В. М.* Гиперустойчивость автоматических систем. М. «Наука», 1970.
8. *Якубович В. А.* Решение одной алгебраической задачи, встречающейся в теории управления. Докл. АН СССР, 1970, т. 193, № 1.
9. *Лионс Ж.-Л.* Оптимальное управление системами, описываемыми уравнениями с частными производными. М., «Мир», 1972.
10. *Андреев В. А., Казаринов Ю. Ф., Якубович В. А.* Синтез оптимальных управлений для линейных неоднородных систем в задачах минимализации квадратичных функционалов. Докл. АН СССР, 1971, т. 199, № 2.
11. *Иосида К.* Функциональный анализ. М., «Мир», 1967.
12. *Барсук Л. О., Брусин В. А.* Бесконечномерное обобщение леммы Калмана—Якубовича. В сб.: Динамика систем, вып. 8. Изд-во Горьковск. ун-та, 1975.

УДК 539.3

О ПОСТРОЕНИИ ОБЩИХ РЕШЕНИЙ УРАВНЕНИЙ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ ТРАНСВЕРСАЛЬНО ИЗОТРОПНЫХ НЕОДНОРОДНЫХ ТЕЛ

Р. М. Раппопорт

(Ленинград)

Приводится решение трехмерной задачи теории упругости трансверсально изотропных упругих тел, причем упругие характеристики произвольно изменяются вдоль оси симметрии упругих свойств среды. Решение записывается в ортогональных криволинейных цилиндрических координатах и представляется с помощью двух независимых функций. Рассматривается вопрос о разделении граничных условий на плоскости изотропии.

Решению двумерных задач теории упругости неоднородных тел посвящен ряд исследований, которые, главным образом, рассматривают равновесие изотропных тел при экспоненциальном законе изменения модуля упругости и постоянном коэффициенте Пуассона. По-видимому, одной из первых работ этого направления является [1]. В [2] при аналогичных допущениях построено общее решение трехмерной задачи теории упругости трансверсально изотропных и изотропных тел, приспособленное для рассмотрения слоистых сред. Оно также представлено с помощью двух независимых функций, для которых условия на границах слоев разделяются. Полученные зависимости использованы в [2] для общего решения задачи о равновесии полупространства, составленного из слоев, не однородных по глубине при действии поверхностных сил. В [3] приведено решение трехмерной задачи теории упругости неоднородного изотропного тела, построенное по схеме, сходной с изложенной, но без ограничений, накладываемых на упругие характеристики и с учетом объемных сил.

Следуя С. Г. Гутману [4], представим искомое решение как сумму слагаемых первого и второго рода. В решении первого рода, определяемого функцией П, обращается в нуль ω_z, в решении второго рода, определяемой функцией Ψ,— прогиб w, напряжение σ_z и объемное расширение. Имеем

$$(1)\qquad u_\alpha = \frac{1}{H_1}\frac{\partial F}{\partial \alpha} + \frac{1}{H_2}\frac{\partial L}{\partial \beta}, \quad u_\beta = \frac{1}{H_2}\frac{\partial F}{\partial \beta} - \frac{1}{H_1}\frac{\partial L}{\partial \alpha}$$

$$F = \beta_{33}D^2\Pi + \beta_{11}\frac{\partial^2 \Pi}{\partial z^2}, \quad L = \frac{1}{G}\frac{\partial \Psi}{\partial z}$$

$$w = -\frac{1}{G_1}\frac{\partial}{\partial z}D^2\Pi - \frac{\partial}{\partial z}\left(\beta_{13}D^2\Pi + \beta_{11}\frac{\partial^2\Pi}{\partial z^2}\right)$$

$$(2)\qquad \tau_{\alpha z} = \frac{1}{H_1}\frac{\partial \tau}{\partial \alpha} + \frac{1}{H_2}\frac{\partial s}{\partial \beta}, \quad \tau_{\beta z} = \frac{1}{H_2}\frac{\partial \tau}{\partial \beta} - \frac{1}{H_1}\frac{\partial s}{\partial \alpha}$$

$$\tau = -\frac{\partial}{\partial z}D^2\Pi, \quad s = -D^2\Psi, \quad \sigma_z = D^4\Pi$$

$$D^2 = \frac{1}{H_1H_2}\left[\frac{\partial}{\partial \alpha}\left(\frac{H_2}{H_1}\frac{\partial}{\partial \alpha}\right) + \frac{\partial}{\partial \beta}\left(\frac{H_1}{H_2}\frac{\partial}{\partial \beta}\right)\right]$$

$$\beta_{11} = \frac{1-\nu^2}{E}, \quad \beta_{13} = -\frac{\nu_1(1+\nu)}{E_1}, \quad \beta_{33} = \frac{1}{E_1}\left(1 - \frac{\nu_1^2 E}{E_1}\right), \quad G = \frac{E}{2(1+\nu)}$$

Здесь α, β — криволинейные координаты в плоскости изотропии, ось z совмещена с осью симметрии среды, H_1, H_2 — коэффициенты Ляме, β_{11}, β_{13}, β_{33} — приведенные упругие постоянные, введенные С. Г. Лехницким, E, ν — модуль упругости и коэффициент Пуассона в плоскости изотропии, E_1 — модуль упругости в направлении z, ν_1 — коэффициент Пуассона, учитывающий влияние e_z на деформации в плоскости изотропии, G_1 — модуль сдвига в плоскости, перпендикулярной плоскости изотропии.

Функции Π и Ψ удовлетворяют уравнениям

$$(3)\qquad \beta_{33}D^4\Pi + D^2\left\{\frac{\partial}{\partial z}\left[\left(2\beta_{13} + \frac{1}{G_1}\right)\frac{\partial \Pi}{\partial z}\right] + \Pi\frac{\partial^2\beta_{13}}{\partial z^2}\right\} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}\left(\beta_{11}\frac{\partial^2\Pi}{\partial z^2}\right) = 0$$

$$D^2\Psi + G_1\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{1}{G}\frac{\partial \Psi}{\partial z}\right) = 0$$

Далее аналитически выражаются лишь деформации, определяемые дифференцированием в плоскости изотропии по формулам

$$e_\alpha = \frac{1}{H_1}\frac{\partial u_\alpha}{\partial \alpha} + \frac{u_\beta}{H_1H_2}\frac{\partial H_1}{\partial \beta}, \quad e_\alpha + e_\beta = D^2F$$

$$\gamma_{\alpha\beta} = \frac{H_1}{H_2}\frac{\partial}{\partial \beta}\left(\frac{u_\alpha}{H_1}\right) + \frac{H_2}{H_1}\frac{\partial}{\partial \alpha}\left(\frac{u_\beta}{H_2}\right)$$

Напряжения σ_α, σ_β, $\tau_{\alpha\beta}$ и деформация e_z вычисляются по формулам закона Гука, которые преобразуются к виду

$$\sigma_\alpha = \alpha_{11}e_\alpha + \alpha_{12}e_\beta + \alpha_{13}\sigma_z, \quad \sigma_\beta = \alpha_{12}e_\alpha + \alpha_{11}e_\beta + \alpha_{13}\sigma_z$$

$$e_z = \alpha_{31}(e_\alpha + e_\beta) + \alpha_{33}\sigma_z$$

$$\alpha_{11} = \frac{E}{1-\nu^2}, \quad \alpha_{12} = \nu\alpha_{11}, \quad \alpha_{13} = -\alpha_{31} = \frac{\nu_1 E}{E_1(1-\nu)}$$

$$\alpha_{33} = \frac{1}{E_1}\left[1 - \frac{2\nu_1^2 E}{(1-\nu)E_1}\right]$$

Покажем, что для слоя, ограниченного плоскостями изотропии, решения первого и второго рода могут рассматриваться независимо. То же относится к многослойному полупространству.

Уравнения для определения функций Π и Ψ разделились. В решении первого рода используются граничные значения функций σ_z и τ (первая задача статики) или w и F (вторая задача статики); в решении второго рода — граничные значения функции s (первая задача статики) или L (вторая задача статики).

Для полного разделения решений требуется определить граничные значения функций τ и s — величины τ_0, s_0 или величины F_0, L_0. Например, для первой задачи статики имеем $\sigma_z = p$, $\tau_{\alpha z} = t_1$, $\tau_{\beta z} = t_2$ при $z = h$.

В соответствии с (2) положим

$$t_1 = \frac{1}{H_1}\frac{\partial \tau_0}{\partial \alpha} + \frac{1}{H_2}\frac{\partial s_0}{\partial \beta}, \quad t_2 = \frac{1}{H_2}\frac{\partial \tau_0}{\partial \beta} - \frac{1}{H_1}\frac{\partial s_0}{\partial \alpha}$$

Отсюда следует

$$D^2\tau_0 = \frac{1}{H_1H_2}\left[\frac{\partial}{\partial\alpha}(H_2t_1) + \frac{\partial}{\partial\beta}(H_1t_2)\right] \tag{4}$$

$$D^2s_0 = \frac{1}{H_1H_2}\left[\frac{\partial}{\partial\beta}(H_1t_1) - \frac{\partial}{\partial\alpha}(H_2t_2)\right]$$

Аналогичным образом записываются граничные значения функций F и L (вторая задача статики).

При расчете слоистого полупространства условия непрерывности напряжений $\tau_{\alpha z}$, $\tau_{\beta z}$ и перемещений u_α, u_β эквивалентны условиям непрерывности функций F и τ (решение первого рода) или s, L (решение второго рода).

Из изложенного также следует, что задача расчета неоднородного слоя или полупространства расчленяется на два самостоятельных этапа, причем на первом этапе определяются инвариантные функции σ_z, w, τ, F, s, L. Отмечается аналогия первого этапа решения двумерных (плоской и осесимметричной) задач о равновесии неоднородного полупространства и трехмерной, записанной в произвольной системе ортогональных криволинейных координат. Эта аналогия обнаруживается также между решениями осесимметричных задач для сплошного слоя (полупространства) и слоя (полупространства) с абсолютно жестким и гладким цилиндрическим включением.

Действительно, ядра интегральных преобразований, используемых при решении указанных задач, удовлетворяют уравнению

$$D^2f = -\gamma^2 f \tag{5}$$

Из (2), (4), (5) следует, что алгоритмы определения трансформант инвариантных функций σ_z, τ, w, F в указанных случаях совпадают. Таким образом, наиболее трудоемкая часть решения может быть использована при рассмотрении серии задач. То же относится к решениям второго рода, представленным в декартовых и криволинейных координатах.

Разумеется, формулы обращения, выражения трансформант нагрузок и результаты расчета для аналогичных задач различаются.

Принятый порядок расчета неоднородных тел используется также в варианте метода конечных полос (интерполяционном методе), предложенном в [5,6] для рассмотрения многослойных тел, и способствует сокращению вычислительных операций.

Поступила 29 IV 1975

ЛИТЕРАТУРА

1. *Тер-Мкртичьян Л. Н.* Некоторые задачи теории упругости неоднородных упругих сред. ПММ, 1961, т. 25, вып. 6.
2. *Раппопорт Р. М.* Равновесие полупространства, составленного из слоев, неоднородных по глубине (трехмерная задача). Тр. Ленингр. лесотехн. акад., 1967, № 109.
3. *Плевако В. П.* Неоднородный слой, сцепленный с полупространством, под воздействием внутренних и внешних сил. ПММ, 1974, т. 38, вып. 5.
4. *Гутман С. Г.* Общее решение задачи теории упругости в обобщенных цилиндрических координатах. Изв. Всес. н.-и. ин-та гидротехники им. Б. Е. Веденеева, 1948, т. 37.
5. *Раппопорт Р. М.* К вопросу о построении решений осесимметричной и плоской задач теории упругости многослойной среды. Изв. Всес. н.-и. ин-та гидротехники им. Б. Е. Веденеева, 1963, т. 73.
6. *Раппопорт Р. М.* Интерполяционные решения теории изгиба слоистых плит. В сб.: Расчет пространственных конструкций, вып. 14. М., Стройиздат, 1971.