Здесь $\Phi_0(z_1)$ — произвольная функция, голоморфная в области S_1, получающейся из области S аффинными преобразованиями (2). Постоянная T_k — величина главного вектора внешних усилий $\tau_k(s)$, приложенных к k-й полости, а Ω_k — площадь области S_k, ограниченной контуром L_k. Через z_{1k} обозначен аффикс точки, лежащей внутри граничного контура L_{1k} вспомогательной области S^1.

Из краевых условий

$$w = 0 \quad \text{на } L_0$$

$$\tau_{nz} = \tau_k(s) \qquad \text{на } L_k$$

получаем для искомой функции $\Phi(z_1)$ следующие граничные условия:

$$\Phi(t_{10}) + \overline{\Phi(t_{10})} = -w_1 \tag{3}$$

$$\Phi(t_{1k}) - \overline{\Phi(t_{1k})} = \frac{i}{\beta}\int\limits_0^s (\tau_{nz}^1 - \tau_k)\, ds + iC_k$$

В этих равенствах величины t_{10} и t_{1k} — аффиксы точек внешнего и внутренних контуров L_{10} и L_{1k} области S^1. Значения постоянных интегрирования C_k не влияют на определение перемещений и напряжений, поэтому их можно не определять. По этой же причине можно опускать чисто мнимое постоянное слагаемое в представлении функции $\Phi(z_1)$.

Таким образом, поставленная задача сведена к отысканию аналитической функции комплексного переменного, определенной во вспомогательной области S^1 и удовлетворяющей на ее границах условиям (3).

Определение искомой функции для конкретных видов областей поперечного сечения цилиндра целесообразно проводить приближенными методами [3].

Поступила 12 XII 1974

ЛИТЕРАТУРА

1. *Москвитин В. В.* Сопротивление вязкоупругих материалов применительно к зарядам ракетных двигателей на твердом топливе. М., «Наука», 1972.
2. *Лехницкий С. Г.* Кручение анизотропных и неоднородных стержней. М., «Наука», 1971.
3. *Космодамианский А. С.* Анизотропные многосвязные среды. Изд-во Донецк. ун-та, 1970.

УДК 539.3

УРАВНЕНИЯ ЛУРЬЕ В ГИЛЬБЕРТОВОМ ПРОСТРАНСТВЕ И ИХ РАЗРЕШИМОСТЬ

В. А. Брусин

(Горький)

Приводится новое доказательство разрешимости уравнений А. И. Лурье из теории абсолютной устойчивости, которое одновременно дает возможность обобщить результаты на гильбертовы пространства и неограниченные операторы.

Пусть заданы вещественные матрицы: A, P — $n \times n$-матрицы, B, Q — $n \times m$-матрицы, R — $m \times m$-матрица, причем P, R — симметричные матрицы. Уравнениями А. И. Лурье называются уравнения относительно вещественной симметричной $n \times m$-матрицы M, $(n \times m)$-матрицы L вида

$$MA + A^*M = -P + LL^*, \quad LK = MB + Q, \quad K^*K \equiv R \tag{0.1}$$

Уравнения (0.1) для $m = 1$ и в несколько иной форме были введены А. И. Лурье в связи с исследованием задачи об абсолютной устойчивости [1]. Важная роль этих уравнений здесь обусловлена тем, что коль скоро существует их решение, то будет существовать и глобальная функция Ляпунова исходной нелинейной системы.

Уравнения вида (0.1) для случая произвольного m (называемые еще обобщенными уравнениями А. И. Лурье) были введены в работе [2] в связи с обобщенной задачей об абсолютной устойчивости — задачей со многими нелинейностями.

Впервые достаточные условия разрешимости уравнений (0.1) в замкнутой форме для $m = 1$, A — матрицы Гурвица, $R > 0$ и $R = 0$, $P < 0$ были даны в работе [3]. В дальнейшем [3–7] условия разрешимости были обобщены на случай произвольного $m \geqslant 1$, $R \geqslant 0$ и произвольной матрицы A и усилены до необходимых и достаточных условий: $\Pi(\omega) \geqslant 0$, $\omega \in (-\infty, +\infty)$, где (звездочка — символ операции транспонирования матрицы, E — единичная $n \times n$-матрица, $j = \sqrt{-1}$)

$$\Pi(\omega) = R + 2\mathrm{Re}\,(Q^* (j\omega E - A)^{-1} B) + B^* (-j\omega E - A^*)^{-1} P (j\omega E - A)^{-1} B \tag{0.2}$$

Исследовался также [8] и случай $R \gtrless 0$.

Отметим, что связь между решением уравнения (0.1) и решением вариационной задачи была впервые обнаружена В. М. Поповым (см. [7], § 30). Им было доказано, что из разрешимости уравнений (0.1) следует существование решения соответствующей вариационной задачи. Ниже эта связь установлена в другую сторону, при этом существенно использована идея Лионса о расщеплении гамильтоновых систем [9].

1. Новое доказательство разрешимости уравнений А. И. Лурье в случае $R > 0$. Идея доказательства заключена в следующей теореме. (Утверждение 1° этой теоремы не ново (см. [10]).)

Теорема 1. Пусть A — матрица Гурвица и при некотором $\varepsilon > 0$ выполняется частотное неравенство

$$\Pi(\omega) \geqslant \varepsilon E \tag{1.1}$$

Тогда имеют место утверждения 1°, 2°.

1°. Существует решение вариационной задачи на минимум функционала $I_h[u(t)]$ (h — n-вектор, u — m-вектор)

$$I_n[u(t)] = \int_0^\infty \mu(y(h, u)(t), y(h, u)(t);\ u(t), u(t))\, dt \tag{1.2}$$

по всем $u(t)$, $t \in (0, \infty)$, удовлетворяющим неравенству

$$\rho^2(u) \equiv \int_0^\infty \|u(t)\|_m^2 dt < \infty \tag{1.3}$$

$$\left(\|u(t)\|_m^2 = \langle u(t),\ u(t)\rangle_m = \sum_{i=1}^m u_i^2(t), \quad u = (u_1, \ldots, u_m)\right)$$

где

$$\mu(x, y;\ v, u) = \langle Py,\ x\rangle_n + \langle x,\ Qv\rangle_n + \langle y,\ Qu\rangle_n + \langle Ru,\ v\rangle_m \tag{1.4}$$

$$y(h, u)(t) = e^{At}h + \int_0^t e^{A(t-\tau)} u(\tau)\, d\tau$$

С точностью до значений на множестве оси t меры нуль это решение единственное.

2°. Симметричная матрица M, определяемая соотношением

$$\langle h_1, Mh_2\rangle = \langle Mh_1, h_2\rangle = \int_0^\infty \mu(y(h_1, u_1^\circ), y(h_2, u_2^\circ);\ u_1^\circ, u_2^\circ)\, dt \tag{1.5}$$

где $u_i^\circ(t)$ — решение сформулированной выше вариационной задачи при $h = h_i$ ($i = 1, 2$), существует и удовлетворяет соотношениям (0.1).

В дальнейшем индексы у скалярных произведений и норм, указывающие на размерность пространства, в случаях, когда эта размерность ясна, будем опускать.

Доказательство. 1°. В силу того, что A — матрица Гурвица, функционал $I_h[u]$ определен для всех функций $u(t)$, удовлетворяющих (1.3), и по норме (1.3) непрерывен. Функционал I_h можно записать в следующем виде:

(1.6) $$I_h[u] = \pi_0[u(t), u(t)] - 2L_h[u(t)] + I_h^\circ$$

$$L_h[u] = -\int_0^\infty [\langle Py(u), y(h)\rangle + \langle y(h), Qy(u)\rangle]\,dt$$

$$y(u)(t) = y(\theta, u)(t), \quad y(h)(t) = e^{At}h$$

$$\pi_0[u, v] = \int_0^\infty \mu(y(u), y(v); u, v)\,dt, \quad I_h^\circ = I_h[\theta_m(t)]$$

($\theta_m(t)$ — тождественно нулевая функция из области определения функционала).

Форма $\pi_0[u, v]$ является симметричной непрерывной билинейной формой. Для функций $u(t)$, удовлетворяющих условию (1.3), согласно равенству Парсеваля и условию (1.1) имеем

(1.7) $$\pi_0[u(t), u(t)] = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \langle \Pi(\omega) f_u(\omega), f_u(\omega)\rangle\,d\omega \geqslant$$

$$\geqslant \varepsilon\int_0^\infty \|u(t)\|^2 dt = \varepsilon\rho^2(u), \quad f_u(\omega) \equiv \int_0^\infty u(t)e^{j\omega t}\,dt$$

(форма $\pi_0[u, v]$ обладает свойством коэрцитивности [9]). Отсюда вытекает ([9], гл. I) существование и единственность экстремального элемента $u^\circ(t)$ функционала (1.2) при условии (1.3). Единственность экстремального элемента $u^\circ(t)$ понимается в смысле нормы $\rho(u)$.

2°. Из [9] следует также, что экстремальная функция $u^\circ(t)$ должна при всех $u(t)$, удовлетворяющих условию (1.3), удовлетворять уравнению

(1.8) $$\pi_0[u^\circ(t), u(t)] = L_h[u(t)]$$

которое с учетом (1.4), (1.6) может быть преобразовано к виду

(1.9) $$\int_0^\infty [\langle Py^\circ, y\rangle + \langle y^\circ, Qu\rangle + \langle y, Qu^\circ\rangle + \langle Ru^\circ, u\rangle]\,dt = 0$$

$$(y^\circ(t) = y(h, u^\circ)(t),\ y(t) = y(u)(t) = y(\theta, u)(t))$$

Обратно, решением $u^\circ(t)$ уравнения (1.9) при условии (1.7) может быть только экстремальный элемент функционала I_h (с точностью до значений на множестве меры нуль).

Определим теперь непрерывную функцию $\Psi(t)$

(1.10) $$\Psi(t) = \int_t^\infty e^{-A^*(t-\tau)}(Py^\circ(\tau) + Qu^\circ(\tau))\,d\tau$$

Очевидно, что $\Psi(t)$ удовлетворяет соотношениям (1.11)

(1.11) $$\frac{d}{dt}\Psi = -A^*\Psi - Py^\circ(t) - Qu^\circ(t)$$

(1.12) $$\int_0^\infty \|\Psi(t)\|^2 dt < \infty, \quad \lim_{t\to\infty}\|\Psi(t)\| = 0$$

В силу (1.6), (1.9) — (1.12) имеем

$$0=\int_0^\infty\left\langle\frac{d}{dt}\Psi+A^*\Psi+Py^\circ+Qu^\circ,y(u)\right\rangle dt=\int_0^\infty\left\langle\frac{d}{dt}\Psi+A^*\Psi,\ y(u)\right\rangle dt-$$
$$-\int_0^\infty[\langle y^\circ,Qu\rangle+\langle Ru^\circ,u\rangle]\,dt=\int_0^\infty\left\langle-\frac{d}{dt}y(u)+Ay(u),\Psi\right\rangle dt-$$
$$-\int_0^\infty\langle Q^*y^\circ+Ru^\circ,u\rangle\,dt=\int_0^\infty\langle -Bu,\ \Psi\rangle\,dt-\int_0^\infty\langle Q^*y^\circ+Ru^\circ,u\rangle\,dt=$$
$$=-\int_0^\infty\langle B^*\Psi+Q^*y^\circ+Ru^\circ,u\rangle\,dt \tag{1.13}$$

Так как $u(t)$ в этих равенствах — любая функция, удовлетворяющая (1.3), то отсюда вытекает равенство $B^*\Psi(t)=-Ru^\circ(t)-Q^*y^\circ(t)$. В силу условия (1.1) $R>0$, поэтому соотношение (1.13) можно записать в виде

$$u^\circ(t)=-R^{-1}(B^*\Psi(t)+Q^*y^\circ(t)) \tag{1.14}$$

(Отсюда, в частности, получаем непрерывность $u^\circ(t)$.)

Рассмотрим отображение, ставящее в соответствие n-вектору h функцию Ψ. Это отображение в силу (1.9), (1.10) линейное. Таким образом, существует $n\times n$-матрица M, такая, что $Mh=\Psi(0)$. Более того, оказывается, что эта матрица M будет удовлетворять уравнению

$$My^\circ(t)=\Psi(t),\qquad t\geqslant 0 \tag{1.15}$$

Доказательство равенства (1.15) основано на идеях, изложенных в гл. 3 монографии [9]. Рассмотрим функционал

$$I_h^s[u]=\int_s^\infty\mu\,(y_s(h,u),\ y_s(h,u);\ u,u)\,dt,\ \ s\geqslant 0 \tag{1.16}$$
$$y_s(h,u)(t)=e^{A(t-s)}h+\int_s^t e^{A(t-\tau)}u(\tau)\,d\tau$$

Повторяя все изложенные рассуждения по отношению к этому функционалу и обозначая через $u_s^\circ(h,t)$ экстремальный элемент соответствующей вариационной задачи, а через $y_s^\circ(h,t)$, $\Psi_s(h,t)$ — функции вида

$$y_s^\circ(h,t)=y_s(h,u_s^\circ)(t),\quad \Psi_s(h,\ t)=\int_t^\infty e^{-A^*(t-\tau)}\times$$
$$\times[Py_s^\circ(h,\tau)+Qu_s^\circ(h,\tau)]\,d\tau,\quad t\geqslant s$$

получаем, что существует матрица M_s, удовлетворяющая соотношению

$$M_sy_s^\circ(g,s)=\Psi_s(g,s)\quad(g\in R^n,\ s\geqslant 0) \tag{1.17}$$

Возьмем в равенстве (1.17) в качестве g вектор $g=y^\circ(h,s)$ — значение функции $y^\circ(t)$ исходной вариационной задачи ($s=0$) в момент $t=s$. Тогда ввиду стационарности задачи имеем

$$y_s^\circ(g,t)=y_0^\circ(g,t-s)=y^\circ(g,\ t-s),\quad \Psi_s(g,t)=\Psi_0(g,t-s)$$

и, следовательно, в (1.17) оператор M_s не зависит от s. Далее, в силу известного принципа оптимальности из экстремальности функций $u^\circ(t)$ и $u_s^\circ(t)$ следует

$$y_s^\circ(g,\ t)=y_0^\circ(h,t),\quad \Psi_s(g,t)=\Psi_0(h,t)\quad g=y_0^\circ(h,s),\quad h\in R^n,$$
$$t\geqslant s$$

Отсюда и из (1.17) (с учетом того, что оператор M_s там не зависит от s, а s — произвольное число) и вытекает (1.15).

Из соотношений (1.4), (1.11), (1.12), (1.14), (1.15) для любых h_1, $h_2 \in R^n$ в свою очередь вытекает следующая цепочка равенств:

$$(1.18) \qquad \langle Mh_1, h_2\rangle = \langle \Psi(h_1, 0), y^\circ(h_2, 0)\rangle = -\int_0^\infty \left[\left\langle \frac{d}{dt}\Psi(h_1, t), y^\circ(h_2, t)\right\rangle + \right.$$

$$\left. + \left\langle \Psi(h_1, t), \frac{d}{dt} y^\circ(h_2, t)\right\rangle\right] dt = \int_0^\infty \mu\,(y^\circ(h_1, t), y^\circ(h_2, t); u^\circ(h_1, t)$$

$$u^\circ(h_2, t))dt = \langle y^\circ(h_1, 0), \Psi(h_2, 0)\rangle = \langle h_1, Mh_2\rangle$$

т. е. соотношение (1.5). Наконец, из (1.11), (1.14), (1.4), (1.15) следует

$$\theta_n = M\frac{d}{dt}y^\circ(t) - \frac{d}{dt}\Psi(t) = M(Ay^\circ(t) + Bu^\circ(t) + A^*\Psi(t) +$$

$$+ Py^\circ(t) + Qu^\circ(t) = (MA + A^*M)\,y^\circ(t) + (MB + Q)\,u^\circ(t) + Py^\circ(t)$$

откуда с учетом (1.5), (1.14) получаем

$$(1.19) \qquad Sy^\circ(h, t) = \theta_n, \quad S = MA + A^*M + P - (MB + Q)R^{-1}(MB + Q)^*$$

Устремляя в равенстве (1.19) $t \to 0$ и учитывая, что h — произвольный n-вектор, получаем, что S — нулевая $n \times n$-матрица. А это при $R > 0$ эквивалентно соотношениям (0.1). Теорема доказана.

Теорема 2. Пусть для матриц A и B, причем A не имеет спектра на мнимой оси, существует $m \times n$-матрица F, такая, что $A_1 = A + BF$ — матрица Гурвица. Тогда, если при некотором $\varepsilon > 0$ выполнено соотношение

$$(1.20) \qquad \Pi(\omega) \geqslant \varepsilon\,(E - B^*(-j\omega E - A^*)^{-1}F^*)(E - F(j\omega E - A)^{-1}B)$$

то будет существовать симметричная матрица M, удовлетворяющая соотношениям (0.1).

Доказательство. Можно заметить, что

$$\langle \Pi(\omega; A_1, B, P_1, Q_1, R)f_{u_1}, f_{u_1}\rangle = \langle \Pi(\omega; A, B, P, Q, R)f_u, f_u\rangle$$

$$(u_1(t) = u(t) - Fy(t), \quad P_1 = P + F^*RF + F^*Q^* + QF, \quad Q_1 = Q + $$
$$+ F^*R)$$

Поэтому при выполнении условия (1.20) для матриц A_1, B, P_1, Q_1 и R будет справедлива теорема 1, и, значит, будет существовать матрица M, удовлетворяющая уравнениям (0.1) при этих, измененных значениях входящих туда матриц. Переходя в соотношениях (0.1) к исходным матрицам A, P, Q, получим, что M будет удовлетворять и исходным соотношениям (0.1).

Следствие. Пусть пара матриц (A, B) полностью управляема [7], матрица A не имеет спектра на мнимой оси и выполняется условие (1.1). Тогда существует симметричная матрица M, удовлетворяющая соотношениям (0.1).

Согласно [7], если пара (A, B) полностью управляема, то матрица F из теоремы 2 будет существовать. Кроме того, можно заметить, что $\sup_\omega \| F(j\omega E - A)^{-1}B \| < \infty$. Отсюда из теоремы 2 вытекает сформулированное утверждение.

2. Достаточные условия разрешимости уравнений А. И. Лурье в гильбертовом пространстве. Доказательство теоремы 1 допускает обобщение на произвольные гильбертовы пространства и на случай неограниченного оператора A. Такое обобщение полезно при исследовании нелокальной устойчивости и неустойчивости динамических систем, описываемых уравнениями в частных производных.

Будем использовать в дальнейшем следующие обозначения. Если H — некоторое гильбертово пространство над полем вещественных чисел, то $\langle . , . \rangle_H$ — скалярное произведение в нем, θ_H — нулевой элемент H; V^* — пространство, двойственное [11] пространству V; $\langle f, g\rangle$, $g \in V$, $f \in V^*$ — значение функционала f на элементе g; $T : H_1 \to H_2$ — линейный оператор, действующий из H_1 в H_2, $\theta\,(H_1 \to H_2)$ — нулевое отображение $H_1 \to H_2$ (или его класс эквивалентности в смысле соответствующей нормы); $L^2(\tau, T; H)$, $\tau < T$ — гильбертово пространство абсолютно интегрируемых с квадратом отображений $(\tau, T) \to H$ с естественно введенным скалярным произведением; $L^2(\tau; H) = L^2(\tau, \infty; H)$. Понадобится также пространство $W(\tau, T; V)$ типа С. Л. Соболева [9]

$$W(\tau, T; V) = \left\{ y(t) \mid y(t) \in L^2(\tau, T; V), \frac{d}{dt} \in L^2(\tau, T; V^*) \right\}$$

$$\| y(t) \|_W^2 = \int_\tau^T \left(\| y(t) \|_V{}^2 + \left\| \frac{d}{dt} y(t) \right\|_{V^*}^2 \right) dt$$

Итак, пусть H, V, U — гильбертовы пространства над полем вещественных чисел [11], причем имеет место включение $V \subset H = H^* \subset V^*$, вложение $V \to H$ непрерывно и множество элементов пространства V всюду плотно в пространстве H. (Отсюда, в частности, вытекает, что $\langle f, g \rangle = \langle f, g \rangle_H$, если $f \in H$, $g \in H$.) Пусть A — линейный непрерывный оператор $V \to V^*$, замкнутый в пространстве H и с областью определения $D(A)$, плотной в пространстве V.

Заметим, что $D(A)$ — множество элементов h пространства V, удовлетворяющих условию $Ah \in H$ [9, 11]. Оператор A, следовательно, будет неограниченным (вообще говоря) оператором на пространстве H. Ограниченность A будет иметь место, если $V = H$.

Рассмотрим линейное эволюционное уравнение [9] вида

$$\frac{d}{dt} y(t) = Ay(t) + f(t) \tag{2.1}$$

Под решением $y(t)$ уравнения (2.1) на некотором интервале (τ, T) будем согласно [9] понимать функцию пространства $W(\tau, T; V)$, такую, что для любой гладкой и финитной на отрезке (τ, T) функции $\xi(t)$, $\xi \in V$ справедливо равенство

$$\int_\tau^T \left[\left\langle y(t), \frac{d}{dt} \xi(t) \right\rangle + \langle Ay(t), \xi(t) \rangle + \langle f(t), \xi(t) \rangle \right] dt = 0 \tag{2.2}$$

Предположение 1. При любых $h \in H$, $T > 0$, $f(t) \in L^2(0, T; V^*)$ существует единственное решение $y(t)$ уравнения (2.1), удовлетворяющее начальному условию

$$y(0) = h \tag{2.3}$$

Решение непрерывно зависит от начальных данных $f(t)$ и h в том смысле, что $(h, f) \to y(t)$ — непрерывное отображение пространства $H \times L^2(0, T; V^*)$ в пространство $W(0, T; V)$.

Предположение 2. Для заданной функции $g(t) \in L^2(0; H)$ существует и будет единственной H-непрерывная функция $\Psi(t) \in W(0; V)$ со значениями в пространстве V, которая удовлетворяет (в смысле равенства (2.2), где $T = \infty$, $f = g$ и вместо оператора A стоит $[-A^*]$) уравнению

$$\frac{d}{dt} \Psi = -A^* \Psi + g(t) \tag{2.4}$$

где A^* — оператор $V \to V^*$, сопряженный к A [11].

Замечание 1. Существует теорема о том, что любая функция пространства $W(0, T; V)$, надлежащим образом измененная на множестве меры нуль, будет непрерывной функцией $[0, T] \to H$ [9]. Поэтому равенство (2.3) имеет смысл. Отсюда же следует, что функция $\Psi(t) \in W(0; V)$, как непрерывное отображение $[0, \infty] \to H$, имеет при $t \to \infty$ нулевой предел θ_H [9].

Определение 1. Оператор A назовем L^2-устойчивым, если для него справедливо предположение 1 при $T = \infty$.

Пусть B — линейный ограниченный оператор $U \to V^*$. Обозначим через $y(h, u)(t)$ решение уравнения

$$dy/dt = Ay + Bu(t), \quad u(t) \in L^2(0; U) \tag{2.5}$$

при начальном условии (2.3). Если $h = \theta_H$, то такое решение будем обозначать $y(u)(t)$, а если $u(t) = \theta\ (R^1 \to U)$, то — $y(h)(t)$.

Предположение 3. Существует множество $V_1, D(A) \subset V_1 \subset V$, такое, что если $h \in V_1$ функция $u(t)$ непрерывна по t, то $y(h, u)(t)$ — непрерывная функция $(0, \infty) \to V$.

Сформулируем теорему, аналогичную в конечномерном случае теореме 1.

Теорема 3. Пусть A — L^2-устойчивый оператор и справедливы предположения 2 и 3. Пусть P, Q, R, B — линейные ограниченные операторы $H \to H$, $U \to H$, $U \to U$, $U \to V^*$ соответственно, и при некотором $\varepsilon > 0$ для всех $u(t) \in L^2(0; U)$ выполняется неравенство

$$\int_0^\infty [\langle Ru(t), u(t)\rangle_U + 2\langle y(u)(t), Qu(t)\rangle_H + \langle Py(u)(t), y(u)(t)\rangle_H]\, dt \geqslant \varepsilon \int_0^\infty \|u(t)\|_U^2\, dt \tag{2.6}$$

Тогда будут справедливы утверждения 1°, 2°.

1°. Для любого $h \in H$ существует функция $u^\circ(t) \in L^2(0; U)$, удовлетворяющая равенству

$$I_h[u^\circ(t)] = \inf_{u(t)\in L^2} I_h[u(t)] \tag{2.7}$$

$$I_h[u(t)] \equiv \int_0^\infty \mu(y(h, u)(t), y(h, u)(t); u(t), u(t))\, dt$$

$$\mu(x, y;\ v, u) \equiv \langle Py, x\rangle_H + \langle x, Qv\rangle_H + \langle y, Qu\rangle_H + \langle Ru, v\rangle_U$$

Как элемент пространства $L^2(0; U)$ функция $u^\circ(t)$ определяется единственным образом.

2°. Существует линейный ограниченный оператор $M : H \to V$, удовлетворяющий при любых $h_i \in H$ соотношению (1.5), где $u_i^\circ(t)$ — решение вариационной задачи (2.7) при $h = h_i$, и удовлетворяющий соотношению

$$\langle (M^*A + A^*M + P)\xi, \eta\rangle = \langle LL^*\xi, \eta\rangle, \quad L = (M^*B + Q)K^{-1}, \quad K^*K = R;\ \xi, \eta \in V \tag{2.8}$$

где M^* — оператор $V^* \to H$, сопряженный к M [11]. (Оператор M^*, действующий из V^* в H, определяется равенством $\langle M^*f, h\rangle = \langle f, Mh\rangle$, справедливым для всех $f \in V^*$, $h \in V$.)

Соотношения (2.8) являются обобщенными соотношениями (0.1): вместо векторных пространств R^n, R^m и матриц здесь фигурируют гильбертовы пространства H, V, U и действующие в них линейные операторы (причем оператор A — неограниченный оператор в пространстве H). Последнее обстоятельство позволяет использовать уравнения (2.8) для исследования нелинейных распределенных систем в том плане, в каком уравнения (0.1) использовались (В. А. Якубовичем и его сотрудниками) при исследовании систем, описываемых обыкновенными дифференциальными уравнениями. Поэтому соотношения (2.8) естественно назвать уравнениями Лурье в гильбертовых пространствах.

Замечание 2. Теореме 2 дает достаточные условия разрешимости уравнений Лурье при условии, что A — устойчивый оператор, а оператор R — положительно определенный. Рассматриваемым здесь методом в [12] исследован и случай $R \geqslant 0$, но для ограниченных операторов A.

Замечание 3. В случае, если Фурье-образ $f_y(\omega)$ функции $\{y(u)(t)$ при $t > 0$; θ_H при $t < 0\}$ связан с Фурье-образом $f_u(\omega)$ функции $\{u(t)$ при $t \geqslant 0$; θ_u при $t < 0\}$ соотношением

$$f_y(\omega) = (j\omega E - A)^{-1}Bf_u(\omega) \tag{2.9}$$

(которое будет справедливо, если $Bu \in H$, а также в ряде задач, где $Bu \in V^*$, например, при исследовании управляемых систем, описываемых уравнениями в частных производных, с управлением в граничных условиях [9]), условие (2.7) можно записать в частотной форме

$$\langle \Pi(\omega)u, u\rangle \geqslant \varepsilon \| u \|^2, \quad \Pi(\omega) \equiv R + Q^*(j\omega E - A)^{-1}B + B^*(-j\omega E - A^*)^{-1}Q + B^*(-j\omega E - A^*)^{-1}P(j\omega E - A)^{-1}B \tag{2.10}$$

В случае, когда оператор B имеет левый обратный оператор B_-, вместо условия (2.6) можно требовать выполнения следующего условия:

$$\langle[(-j\omega E - A^*)B_-^*(R - \varepsilon E)B_-(j\omega E - A) + 2\operatorname{Re} QB_-(j\omega E - A) + P]f_y(\omega), f_y(\omega)\rangle \geqslant 0, \quad \omega \in (-\infty, +\infty) \tag{2.11}$$

В отличие от условия (2.10) в условии (2.11) участвует не резольвента оператора A, а сам оператор A. Для дифференциальных операторов A это помогает при рассмотрении конкретных уравнений в частных производных находить соотношения между параметрами, при которых справедливо условие (2.6).

Доказательство теоремы 3. 1°. Функционал $I_h[u]$, как и в конечномерном случае, представим в виде (1.6). Но теперь $\pi_0[u, u]$ и $L_h[u]$ — это функционалы $U \times U \to R^1$ и $H \times U \to R^1$, в которых μ, P, Q, R — операторы из условия теоремы 3, а $y(u)(t)$, $y(h)(t)$ — соответствующие решения уравнения (2.5). Форма $\pi_0[u, v]$: $L^2(0, U) \times L^2(0, U) \to R^1$ является непрерывной симметричной формой, а при условии (2.6) и коэрцитивной [9]. Отсюда в силу теоремы 1.1 гл. 1 работы [9] вытекает существование и единственность элемента $u^\circ(t) \in L^2(0; U)$, удовлетворяющего соотношению (2.7).

2°. Введем в рассмотрение функцию $\Psi(t) \in W(0; V)$, определив ее согласно предположению 2 как единственное решение уравнения

$$\frac{d}{dt}\Psi(t) = -A^*\Psi(t) - Py^\circ(t) - Qu^\circ(t), \quad y^\circ(t) = y(h, u^\circ)(t) \tag{2.12}$$

Ввиду (2.12) и предположений 1, 2 действия в (1.13) остаются законными и здесь, при этом B^* и Q^* — операторы $V \to U$ и $H \to U$, сопряженные к операторам B и Q. Таким образом, приходим к соотношению

$$u^\circ(t) = -R^{-1}(B^*\Psi(t) + Q^*y^\circ(t)) \tag{2.13}$$

Далее, функции $y^\circ(t)$ и $\Psi(t)$ (а в силу (2.13) также и функцию $u^\circ(t)$ можно считать непрерывными функциями на отрезке $[0, \infty]$ (после возможного изменения их значений на множестве меры нуль), поэтому существует отображение $M: h \to \Psi(0)$, которое по тем же причинам, что и в конечномерном случае, будет линейным. Действительно, отображение M — произведение линейных отображений $H \in h \to (u^\circ(t), y^\circ(t)) \to \Psi(0) \in V$. Линейность первого отображения вытекает из бесконечномерного аналога соотношения (1.9). Существование второго отображения обеспечивается предположением 2.

Рассмотрим для произвольного $s \geqslant 0$ функционал $I_g^s(u)$ вида (1.16), в котором $u(t) \in L^2(s; U)$, $y_s(g, u)(t) \in W(s; V)$ — решение уравнения (2.5) на интервале (s, ∞), удовлетворяющее начальному условию $y_s(g, u)(s) = g \in H$. (Такое решение существует и единственно в силу предположения 1 и независимости от времени операторов A и B). Ввиду стационарности операторов A, B, P, Q, R экстремальный элемент $u_s^\circ(g, t)$ этого функционала может быть получен из экстремального элемента $u^\circ(g, t)$ функционала (2.7) сдвигом по времени: $u_s^\circ(g, t) = u^\circ(g, t - s)$. Отсюда будет справедливо также $y_s^\circ(g, u_s^\circ)(t) = y^\circ(g, u^\circ)(t - s)$.

Введем в рассмотрение функцию $\Psi_s(g, t) \in W(s; V)$ как решение уравнения

$$\frac{d}{dt}\Psi_s = -A^*\Psi_s - Py_s^\circ(t) - Qu_s^\circ(t), \quad t > s$$

$$(\Psi_s \in W(s, V), \; y_s^\circ(t) = y_s^\circ(g, u_s^\circ)(t))$$

Очевидно, что $\Psi_0(t) = \Psi(t)$, $\Psi_s(g, t) = \Psi_0(g, t - s)$.

Из этих соотношений следует, что линейный оператор, ставящий в соответствие элементу $g \in H$ элемент $\Psi_g(g, s)$, есть определенный выше оператор M. Отсюда теми же, базирующимися на принципе оптимальности рассуждениями, что и в теореме 1 (размерность пространств здесь роли не играет), получаем равенство

$$My^\circ(t) = \Psi(t), \quad t \geqslant 0 \tag{2.14}$$

Далее, согласно определению функций $y^\circ(t)$ и $\Psi(t)$ все преобразования в (1.18) остаются в силе и, следовательно, оператор M будет удовлетворять соотношению (1.5) в пространстве H. В частности, получаем, что $\langle Mh_1, h_2\rangle = \langle h_1, Mh_2\rangle$ для любых $h_i \in H$. Отсюда [11] вытекает эрмитовость оператора M как оператора $H \to H$.

С другой стороны, согласно предположению $2Mh = \Psi(0) \in V$, так что M будет линейным отображением $H \to V$. По теореме о замкнутом графике [11] (поскольку $D(M) = H$ и отображение M замкнуто) получаем, что отображение M непрерывно и как отображение $H \to V$. Отсюда же вытекает и существование непрерывного оператора $M^* : V^* \to H$, сопряженного к $M : H \to V$. Заметим, что $M^*h = Mh$ при $h \in H$.

Рассмотрим теперь соотношение

$$\int_0^T \left[\left\langle \frac{d}{dt}\Psi + A^*\Psi + Py^\circ + Qu^\circ, \xi\right\rangle - \left\langle \frac{d}{dt}y^\circ - Ay^\circ - Bu^\circ, M\xi\right\rangle\right] dt = 0 \tag{2.15}$$

$$(\xi(t) \in W(0, T;\ V))$$

Справедливость (2.15) следует из определений функций $y^\circ(t)$, $\Psi(t)$ и оператора M Из этого соотношения с учетом соотношений (2.13), (2.14) получаем

$$\int_0^T \langle Sy^\circ(t), \xi(t)\rangle\, dt = 0, \quad \forall \xi(t) \in W(0, T;\ V) \tag{2.16}$$

$$S \equiv M^*A + A^*M + P + (M^*B + Q)R^{-1}(B^*M + Q^*)$$

Оператор S является непрерывным оператором $V \to V^*$. Поэтому из (2.16) (с учетом предположения 3) вытекает, что $Sh = \theta$, если $h \in V_1$. Ввиду произвольности элемента $h \in V_1$ и плотности V_1 в V это эквивалентно соотношению (2.8). Теорема 3 доказана.

Замечание 4. Из доказательства теоремы следует, что предположение 2 можно ослабить. Достаточно потребовать его выполнения только для функций $g(t)$ вида $Py^\circ(t) + Qu^\circ(t)$.

Теорема 4. Предположим, что выполнены предположения 1—3 и существует линейный ограниченный оператор $F : H \to U$, удовлетворяющий следующим условиям: оператор $A_1 = A + BF$ L^2-устойчив, при некотором $\varepsilon > 0$ выполняется неравенство

$$\int_0^\infty [\langle Rv(t), v(t)\rangle + 2\langle y(v)(t), Qv(t)\rangle + \langle Py(v)(t), y(v)(t)\rangle]\, dt \geqslant \tag{2.17}$$

$$\geqslant \varepsilon \int_0^\infty \|v(t) - Fy(v)(t)\|^2 dt, \quad v(t) - Fy(v)(t) \in L^2(0, U)$$

Тогда будет существовать непрерывный линейный оператор $M : H \to V$, удовлетворяющий соотношениям (2.8).

Доказательство аналогично доказательству теоремы 2 и проводится переходом к теореме 3 с помощью замены $u = v - Fy$.

Если для операторов A_1, B имеет место соотношение (2.9), то неравенство (2.17) можно представить в частотной форме

$$\langle \Pi(\omega)v, v\rangle \geqslant \varepsilon \| v - F(j\omega E - A)^{-1}Bv\|^2,$$

Поступила 29 XII 1972

ЛИТЕРАТУРА

1. *Айзерман М. А., Гантмахер Ф. Р.* Абсолютная устойчивость регулируемых систем. М., Изд-во АН СССР, 1963.
2. *Гантмахер Ф. Р., Якубович В. А.* Абсолютная устойчивость нелинейных регулируемых систем. Тр. II Всес. съезда по теоретической и прикладной механике. М., «Наука», 1965.
3. *Якубович В. А.* Решение некоторых матричных неравенств, встречающихся в теории автоматического регулирования. Докл. АН СССР, 1962, т. 143, № 6.
4. *Якубович В. А.* Абсолютная устойчивость нелинейных регулируемых систем в критических случаях. III. Автоматика и телемеханика, 1964, т. 25, № 5.
5. *Якубович В. А.* Периодические и почти периодические предельные режимы регулируемых систем с несколькими, вообще говоря, разрывными нелинейностями. Докл. АН СССР, 1966, т. 171, № 3.
6. *Kalman R. E.* Liapunov functions for the problem of Lur'e in automatic control. Proc. Nat. Acad. Sci. USA, 1963, vol. 49.
7. *Попов В. М.* Гиперустойчивость автоматических систем. М. «Наука», 1970.
8. *Якубович В. А.* Решение одной алгебраической задачи, встречающейся в теории управления. Докл. АН СССР, 1970, т. 193, № 1.
9. *Лионс Ж.-Л.* Оптимальное управление системами, описываемыми уравнениями с частными производными. М., «Мир», 1972.
10. *Андреев В. А., Казаринов Ю. Ф., Якубович В. А.* Синтез оптимальных управлений для линейных неоднородных систем в задачах минимализации квадратичных функционалов. Докл. АН СССР, 1971, т. 199, № 2.
11. *Иосида К.* Функциональный анализ. М., «Мир», 1967.
12. *Барсук Л. О., Брусин В. А.* Бесконечномерное обобщение леммы Калмана—Якубовича. В сб.: Динамика систем, вып. 8. Изд-во Горьковск. ун-та, 1975.

УДК 539.3

О ПОСТРОЕНИИ ОБЩИХ РЕШЕНИЙ УРАВНЕНИЙ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ ТРАНСВЕРСАЛЬНО ИЗОТРОПНЫХ НЕОДНОРОДНЫХ ТЕЛ

Р. М. Раппопорт

(Ленинград)

Приводится решение трехмерной задачи теории упругости трансверсально изотропных упругих тел, причем упругие характеристики произвольно изменяются вдоль оси симметрии упругих свойств среды. Решение записывается в ортогональных криволинейных цилиндрических координатах и представляется с помощью двух независимых функций. Рассматривается вопрос о разделении граничных условий на плоскости изотропии.

Решению двумерных задач теории упругости неоднородных тел посвящен ряд исследований, которые, главным образом, рассматривают равновесие изотропных тел при экспоненциальном законе изменения модуля упругости и постоянном коэффициенте Пуассона. По-видимому, одной из первых работ этого направления является [1]. В [2] при аналогичных допущениях построено общее решение трехмерной задачи теории упругости трансверсально изотропных и изотропных тел, приспособленное для рассмотрения слоистых сред. Оно также представлено с помощью двух независимых функций, для которых условия на границах слоев разделяются. Полученные зависимости использованы в [2] для общего решения задачи о равновесии полупространства, составленного из слоев, не однородных по глубине при действии поверхностных сил. В [3] приведено решение трехмерной задачи теории упругости неоднородного изотропного тела, построенное по схеме, сходной с изложенной, но без ограничений, накладываемых на упругие характеристики и с учетом объемных сил.

Следуя С. Г. Гутману [4], представим искомое решение как сумму слагаемых первого и второго рода. В решении первого рода, определяемого функцией П, обращается