УДК 539.3

УПРУГОЕ РАВНОВЕСИЕ АНИЗОТРОПНОГО ЦИЛИНДРА С ПРОДОЛЬНЫМИ ПОЛОСТЯМИ ПРИ ДЕЙСТВИИ ОСЕВЫХ НАГРУЗОК

Г. М. Иванов, А. С. Космодамианский

(Донецк)

Определяются напряжения и перемещения в длинном анизотропном цилиндре с продольными полостями. Задача сводится к отысканию аналитической функции комплексного переменного, которая определена в области, получающейся аффинным преобразованием из области поперечного сечения цилиндра. Для указанной функции получены граничные условия и общее представление.

Рассматривается ослабленный продольными полостями длинный цилиндр, который изготовлен из однородного линейно-упругого материала, имеющего в каждой точке одну плоскость упругой симметрии, перпендикулярную оси цилиндра. По наружной поверхности цилиндр скреплен без натяжения с жестким массивом. К поверхностям полостей приложены осевые касательные усилия, не изменяющиеся вдоль оси цилиндра. Кроме того, на цилиндр действуют осевые объемные силы тяжести.

Введем прямоугольную систему координат xyz, направив ось z по оси цилиндра вниз. Пусть S — область, занятая поперечным сечением в плоскости xy, L_0 и L_k — ее внешний и внутренние контуры ($k = 1, 2, \ldots, N$), γ — удельный вес материала, $\tau_k(s)$ — интенсивности внешних усилий, приложенных к k-й полости.

Следуя В. В. Москвитину [1] и используя уравнения закона Гука в форме, записанной в [2], для функции осевых перемещений найдем уравнение

$$A_{44}Dw = A_{55}\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + 2A_{45}\frac{\partial^2 w}{\partial x\,\partial y} + A_{44}\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = -\gamma \tag{1}$$

Здесь A_{44}, A_{45}, A_{55} — упругие постоянные материала.

Общее решение уравнения (1) представим в виде [2]

$$A_{44}w = w_1 + 2\operatorname{Re}\Phi(z_1)$$

Здесь w_1 — какое-либо частное решение неоднородного уравнения $Dw_1 = -\gamma$, а $\Phi(z_1)$ — аналитическая функция вспомогательного комплексного переменного $z_1 = x_1 + iy_1$, где

$$x_1 = x + \alpha y, \quad y_1 = \beta y \tag{2}$$
$$\alpha = -A_{45}/A_{44}, \quad \beta = \sqrt{\beta_1 - \alpha^2}, \quad \beta_1 = A_{55}/A_{44}$$

Если функция $\Phi(z_1)$ найдена, напряжения можно вычислять по формулам

$$\tau_{xz} = \tau_{xz}^1 + 2\beta\operatorname{Im}[(\alpha + i\beta)\Phi'(z_1)]$$
$$\tau_{yz} = \tau_{yz}^1 - 2\beta\operatorname{Im}\Phi'(z_1)$$
$$\left(\tau_{xz}^1 = \beta_1\frac{\partial w_1}{\partial x} - \alpha\frac{\partial w_1}{\partial y}, \quad \tau_{yz}^1 = \frac{\partial w_1}{\partial y} - \alpha\frac{\partial w_1}{\partial x}\right)$$

Здесь τ_{xz}^1, τ_{yz}^1 — компоненты напряжений, соответствующие частному решению w_1. Они определяются равенствами, приведенными в скобках. Остальные компоненты напряжений, а также поперечные перемещения u, v равны нулю.

Осевые перемещения и напряжения должны быть однозначными функциями в области S. Любой коаксиальный цилиндр, мысленно выделяемый в рассматриваемом цилиндре, должен находиться в равновесии. Удовлетворяя этим требованиям, получаем следующее общее выражение для введенной функции:

$$\Phi(z_1) = \sum_{k=1}^{N}\frac{T_k - \gamma\Omega_k}{4\pi\beta}\ln(z_1 - z_{1k}) + \Phi_0(z_1)$$

Здесь $\Phi_0(z_1)$ — произвольная функция, голоморфная в области S_1, получающейся из области S аффинными преобразованиями (2). Постоянная T_k — величина главного вектора внешних усилий $\tau_k(s)$, приложенных к k-й полости, а Ω_k — площадь области S_k, ограниченной контуром L_k. Через z_{1k} обозначен аффикс точки, лежащей внутри граничного контура L_{1k} вспомогательной области S^1.

Из краевых условий

$$w = 0 \quad \text{на } L_0$$

$$\tau_{nz} = \tau_k(s) \qquad \text{на } L_k$$

получаем для искомой функции $\Phi(z_1)$ следующие граничные условия:

$$\Phi(t_{10}) + \overline{\Phi(t_{10})} = -w_1 \tag{3}$$

$$\Phi(t_{1k}) - \overline{\Phi(t_{1k})} = \frac{i}{\beta}\int_0^s (\tau_{nz}^1 - \tau_k)\,ds + iC_k$$

В этих равенствах величины t_{10} и t_{1k} — аффиксы точек внешнего и внутренних контуров L_{10} и L_{1k} области S^1. Значения постоянных интегрирования C_k не влияют на определение перемещений и напряжений, поэтому их можно не определять. По этой же причине можно опускать чисто мнимое постоянное слагаемое в представлении функции $\Phi(z_1)$.

Таким образом, поставленная задача сведена к отысканию аналитической функции комплексного переменного, определенной во вспомогательной области S^1 и удовлетворяющей на ее границах условиям (3).

Определение искомой функции для конкретных видов областей поперечного сечения цилиндра целесообразно проводить приближенными методами [3].

Поступила 12 XII 1974

ЛИТЕРАТУРА

1. *Москвитин В. В.* Сопротивление вязкоупругих материалов применительно к зарядам ракетных двигателей на твердом топливе. М., «Наука», 1972.
2. *Лехницкий С. Г.* Кручение анизотропных и неоднородных стержней. М., «Наука», 1971.
3. *Космодамианский А. С.* Анизотропные многосвязные среды. Изд-во Донецк. ун-та, 1970.

УДК 539.3

УРАВНЕНИЯ ЛУРЬЕ В ГИЛЬБЕРТОВОМ ПРОСТРАНСТВЕ И ИХ РАЗРЕШИМОСТЬ

В. А. Брусин

(Горький)

Приводится новое доказательство разрешимости уравнений А. И. Лурье из теории абсолютной устойчивости, которое одновременно дает возможность обобщить результаты на гильбертовы пространства и неограниченные операторы.

Пусть заданы вещественные матрицы: A, P — $n \times n$-матрицы, B, Q — $n \times m$-матрицы, R — $m \times m$-матрица, причем P, R — симметричные матрицы. Уравнениями А. И. Лурье называются уравнения относительно вещественной симметричной $n \times m$-матрицы M, $(n \times m)$-матрицы L вида

$$MA + A^*M = -P + LL^*, \quad LK = MB + Q, \quad K^*K \equiv R \tag{0.1}$$