

В обоих рассмотренных примерах форма разрыва задавалась стационарной, менялась лишь ее длина. Это позволило особенно просто получить точные решения.

Автор благодарит А. А. Никольского за постановку основных вопросов работы и помощь в ее осуществлении.

Поступила 12 VIII 1974

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Седов Л. И. Плоские задачи гидродинамики и аэродинамики. М., «Наука», 1966.
2. Никольский А. А. О «второй» форме движения идеальной жидкости около обтекаемого тела (исследование отрывных вихревых потоков). Докл. АН СССР, 1957, т. 116, № 2.
3. Никольский А. А. О силовом воздействии «второй» формы гидродинамического движения на плоские тела (динамика плоских отрывных потоков). Докл. АН СССР, 1957, т. 116, № 3.
4. Никольский А. А. Закон подобия для трехмерного стационарного отрывного обтекания тел жидкостью и газами. Уч. зап. ЦАГИ, 1970, т. 1, № 1.
5. Никольский А. А. Нелинейный закон подобия для отрывного обтекания идеальным газом прямоугольного крыла со сверхзвуковой скоростью. Уч. зап. ЦАГИ, 1972, т. 3, № 6.

УДК 532.72

### ДИФФУЗИЯ К ЧАСТИЦЕ ПРИ БОЛЬШИХ ЧИСЛАХ ПЕКЛЕ В СЛУЧАЕ ПРОИЗВОЛЬНОГО ОСЕСИММЕТРИЧНОГО ОБТЕКАНИЯ ВЯЗКОЙ ЖИДКОСТЬЮ

Ю. П. Гупало, А. Д. Полянин, Ю. С. Рязанцев

(Москва)

Получено выражение для диффузионного притока вещества на поверхность твердой или жидкой частицы в случае произвольного осесимметричного обтекания с любым числом критических линий, что является обобщением результатов работ [1,2], где на поле течения налагались разного рода ограничения. Полученные формулы позволяют вычислять распределение концентрации и коэффициенты массообмена по данным о поле скоростей вблизи частицы. Приведены формулы для расчета диффузионного массообмена твердой сферической частицы, находящейся в потоке с параболическим профилем скорости, и эллипсоида вращения в равномерном поступательном потоке.

При анализе предполагаем, что концентрация вещества, растворенного в потоке, постоянна вдали от частицы, а на поверхности происходит полное его поглощение. В сферической системе координат, связанной с частицей, уравнение конвективной диффузии и граничные условия имеют вид

$$(1) \quad v_r \frac{\partial c}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r} \frac{\partial c}{\partial \theta} = D \left[ \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left( r^2 \frac{\partial c}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \sin \theta \frac{\partial c}{\partial \theta} \right) \right]$$

$$c|_{r=R(\theta)} = 0, \quad c|_{r \rightarrow \infty} = c_0$$

$$v_r = \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial \psi}{\partial \theta}, \quad v_\theta = - \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial \psi}{\partial r}$$

Здесь  $c$  — концентрация,  $r = R(\theta)$  — уравнение поверхности частицы,  $v_r$ ,  $v_\theta$  — составляющие скорости жидкости,  $\psi$  — функция тока. Предполагая, что число Пекле  $P = aU | D \gg 1$  ( $D$  — коэффициент диффузии,  $a$  — характерный размер частицы,  $U$  — характерная скорость потока), пренебрегаем диффузионным переносом вещества вдоль поверхности частицы в сравнении с переносом по нормали. В общем случае осесимметричного обтекания частицы ламинарным потоком вязкой жидкости функцию

тока вблизи поверхности частицы можно представить в виде

$$(2) \quad \psi_n = (r - R(\theta))^n f_n(\theta), \quad f_n(\theta) = \frac{1}{n} \frac{\partial^n \varphi_n}{\partial r^n} \Big|_{r=R(\theta)} = \\ = - \frac{1}{n} \sin \theta R(\theta) \frac{\partial^{n-1} v_\theta}{\partial r^{n-1}} \Big|_{r=R(\theta)}$$

Здесь  $n = 1$  соответствует капле,  $n = 2$  — твердой частице. В диффузионном пограничном слое в переменных  $\psi$ ,  $\theta$  из соотношений (1), (2) получим

$$(3) \quad \frac{\partial c}{\partial \theta} = - Dn (R^2 + R_\theta'^2) |f(\theta)|^{1/n} \sin \theta \operatorname{sign} f(\theta) \frac{\partial}{\partial |\psi|} |\psi|^{(n-1)/n} \frac{\partial c}{\partial |\psi|} \\ c|_{\psi=0} = 0, \quad c|_{|\psi| \rightarrow \infty} = c_0$$

Здесь и далее индекс  $n$  у функций  $\psi$  и  $f$  опускается.

Поток жидкости вдоль траекторий, выходящих из бесконечности и заканчивающихся в некоторых точках поверхности частицы (точках зарождения диффузионного пограничного слоя), максимально обогащен диффундирующим веществом. (Ниже считаем, что отсутствуют области замкнутой циркуляции.) Поэтому, для завершения формулировки задачи в новых переменных, концентрацию на траекториях натекания следует положить равной концентрации на бесконечности. Необходимо иметь в виду, что такое условие носит предельный характер и выполняется при  $P \rightarrow \infty$ .

Рассмотрим подробнее локальную (в диффузионном пограничном слое) геометрию течения. Нули функции  $f(\theta)$  определяют критические точки и отделяют области, в которых постоянен знак функции тока. Определим углы  $\theta_i^-$  и  $\theta_i^+$  так, что  $f(\theta_i^-) = 0$ ,  $(f'_\theta(\theta) / \sin \theta)_{\theta=\theta_i^-} < 0$  и  $f(\theta_i^+) = 0$ ,  $(f'_\theta(\theta) / \sin \theta)_{\theta=\theta_i^+} > 0$ . Тогда конусы  $\theta = \theta_i^-$  будут траекториями натекания, а  $\theta = \theta_i^+$  — траекториями вытекания. При этом, в силу закона сохранения массы, траектории натекания и вытекания должны чередоваться. Так как обтекание частицы осесимметрично, то  $\theta = 0$  и  $\theta = \pi$  — нули  $f(\theta)$ . Для определенности полагаем, что  $\theta_1^- = 0$  — траектория натекания. Разлагая  $f(\theta_1^+ + \theta)$  в ряд по  $\theta$ , получаем, что в области  $0 < \theta < \theta_1^+$  функция тока отрицательна. Аналогично устанавливаются знаки функции тока между любыми другими корнями  $f(\theta)$ .

Рассмотрим область

$$\sigma_i = \begin{cases} 0 \leq \theta \leq \theta_1^+, & i = 1 \\ \theta_{i-1}^+ \leq \theta \leq \theta_i^+, & i > 1 \end{cases}$$

Тогда дополнительное граничное условие для концентрации в  $\sigma_i$  может быть записано в виде

$$(4) \quad c_i|_{\theta=\theta_i^-} = c_0$$

Введем в  $\sigma_i$  новую переменную

$$(5) \quad t_i = - Dn \operatorname{sign} f(\theta) A_n(\theta, \theta_i^-), \quad A_n(\alpha, \beta) = \int_\beta^\alpha \sin \theta (R^2 + R_\theta'^2) |f(\theta)|^{1/n} d\theta$$

Задача (3), (4) о распределении концентрации в диффузионном пограничном слое (в  $\sigma_i$ ) имеет вид

$$(6) \quad \frac{\partial c_i}{\partial t_i} = \frac{\partial}{\partial |\psi|} |\psi|^{(n-1)/n} \frac{\partial c_i}{\partial |\psi|} \\ c_i|_{\psi=0} = 0, \quad c_i|_{|\psi| \rightarrow \infty} = c_0, \quad c_i|_{t_i=0} = c_0$$

Решение задачи (6)

$$(7) \quad c_i = c_0 K_n \int_0^{\eta_i} \exp \left[ - \left( \frac{2}{n+1} \right)^2 \tau^{n+1} \right] d\tau$$

$$\eta_i = \frac{n}{2} |\psi|^{1/n} t_i^{-1/(n+1)}, \quad K_n = \begin{cases} 2/\sqrt{\pi}, & n=1 \\ (2/3)^{2/3} \Gamma(4/3), & n=2 \end{cases}$$

Формула (7) вместе с (2), (5) описывает распределение концентрации вокруг частицы. Диффузионный поток на частицу равен

$$(8) \quad j_i(\theta) = D \frac{\partial c_i}{\partial n} \Big|_{r=R(\theta)} = 2^{-(n+2)/3} n K_n c_0 D^{n/(n+1)} \times$$

$$\times |f(\theta)|^{1/n} A_n^{-1/(n+1)}(\theta, \theta_i^-) \left| \frac{\sqrt{R^2(\theta) + R_{\theta'}^2(\theta)}}{R(\theta)} \right|$$

Толщина диффузионного пограничного слоя оценивается по формуле

$$\delta_i = D c_0 / j_i$$

Величина  $\delta \rightarrow \infty$  при  $\theta \rightarrow \theta_i^+$  ( $f(\theta_i^+) = 0$ ). В окрестности этих углов толщина диффузионного пограничного слоя не мала по сравнению с характерным размером частицы. Поэтому вблизи  $\theta_i^+$  использованный метод не применим. Из (5), (8) видно, что эти области тем меньше, чем больше число Пекле, а их вклады в полный диффузионный поток на частицу несущественны. Для полного потока на поверхность частицы получим

$$(9) \quad I = \sum_i \int_{\sigma_i} j_i d\sigma = 2\pi \sum_i \int_{\theta_i^+}^{\theta_{i+1}^+} \sin \theta R^2(\theta) j_i(\theta) d\theta =$$

$$= N_n \sum_i \int_{\theta_i^+}^{\theta_{i+1}^+} \sin \theta R^2(\theta) |f(\theta)|^{1/n} A_n^{-1/(n+1)}(\theta, \theta_i^-) \left| \frac{\sqrt{R^2(\theta) + R_{\theta'}^2(\theta)}}{R(\theta)} \right| d\theta$$

$$N_n = 2\pi n K_n 2^{-(n+2)/3} c_0 D^{n/(n+1)}$$

Отметим, что выражение для полного диффузионного потока на частицу в случае произвольного трехмерного обтекания получено в [3] через некоторую вспомогательную функцию, определение которой сводится к решению уравнения в частных производных первого порядка с коэффициентами, зависящими от геометрии течения вблизи тела.

Формула (9) для полного диффузионного потока значительно упрощается, если частица имеет форму, близкую к сферической

$$(10) \quad R(\theta) = a(1 + \lambda \xi(\theta)), \quad \lambda \ll 1$$

Подставляя (10) в (9) и разлагая по  $\lambda$ , с учетом (5) получаем

$$(11) \quad I_0 = N_n \sum_i \int_{\theta_i^+}^{\theta_{i+1}^+} \sin \theta R^2(\theta) |f(\theta)|^{1/n} |A_n(\theta, \theta_i^-)|^{-1/(n+1)} d\theta + O(\lambda^2) =$$

$$= N_n \sum_i \int_{\theta_i^+}^{\theta_{i+1}^+} |A_n(\theta, \theta_i^-)|^{-1/(n+1)} A_{\theta'}(\theta, \theta_i') d\theta + O(\lambda^2) =$$

$$= N_n \sum_i \left( \int_{\theta_i^+}^{\theta_i^-} + \int_{\theta_i^-}^{\theta_{i+1}^+} \right) = 2\pi (n+1) 2^{-(n+2)/3} c_0 K_n D^{-n/(n+1)} \times$$

$$\times \sum_{k=1}^{N-1} A_n^{n/(n+1)}(\theta_{k+1}, \theta_k) + O(\lambda^2)$$

Здесь  $\theta_k < \theta_{k+1}$  ( $k = 1, \dots, N$ ) — корни функции  $f(\theta)$ .

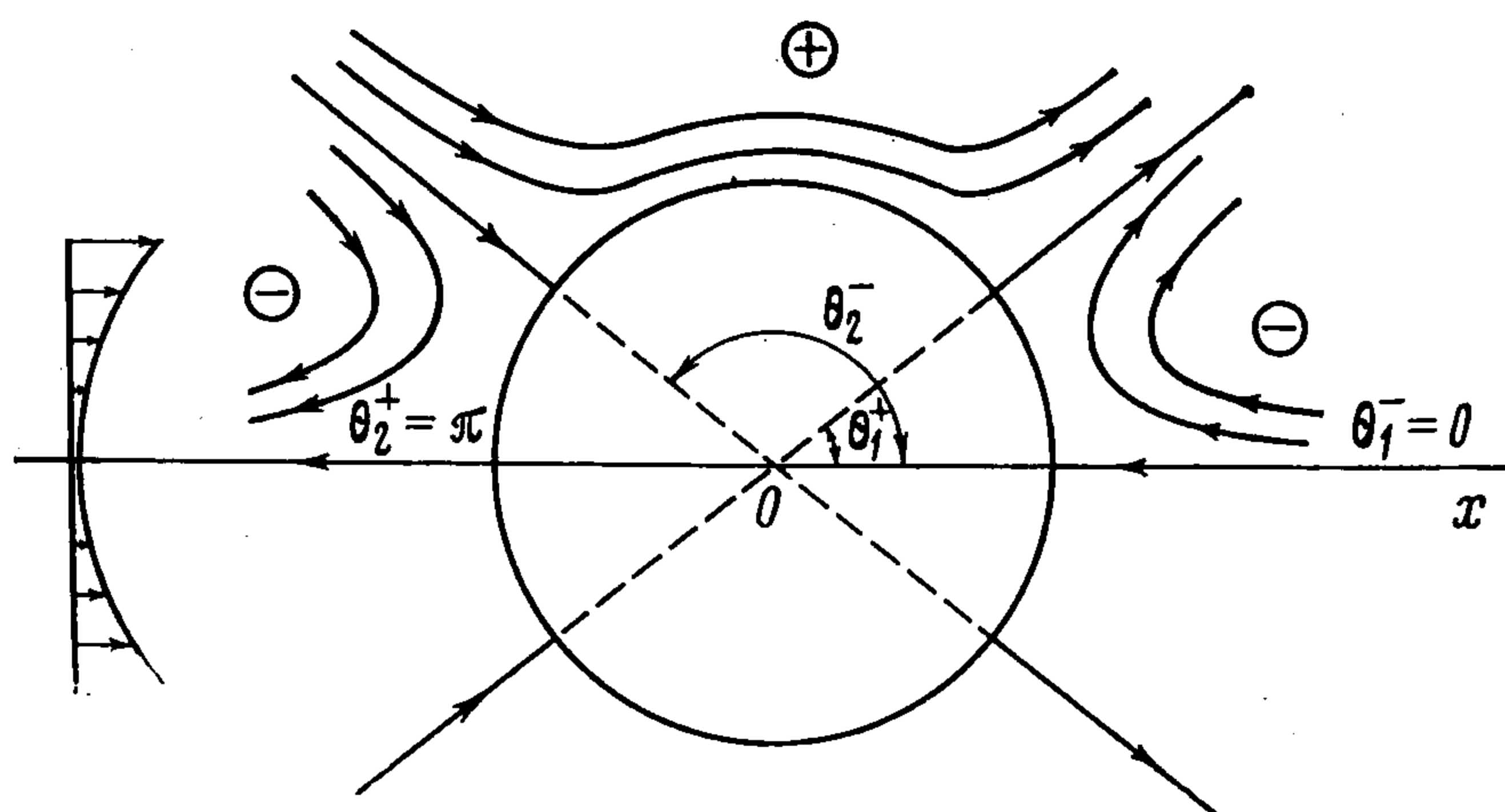
Выражения для сферических частиц в некоторых частных случаях были получены в [2, 4-9].

Используя формулы (9) — (11), рассмотрим два частных случая, дополняющих результаты [2, 4-9].

1°. Диффузия к поверхности твердой сферической частицы в случае параболического профиля скоростей натекающего потока. Поле скоростей на больших расстояниях от частицы имеет вид

$$v = 1/2 T e_x (y^2 + z^2)$$

Здесь  $T$  — кривизна профиля скорости на оси симметрии вдали от частицы,  $e_x$  — орт оси  $x$  (в декартовых координатах  $x, y, z$ ). Поле течения в этом случае служит первым приближением в методе «зеркальных» отображений [10] для частицы, находящейся в



поле массовых сил и движущейся по оси трубы (течение Пуазейля), причем плотность частицы такова, что ее скорость совпадает с осевой скоростью жидкости.

Для поля течения воспользуемся результатами [11, 12], полученными в стоксовом приближении

$$(12) \quad f(\theta) = -\frac{Ta^2}{4} \sin^2 \theta \left( 1 - \frac{35}{16} \sin^2 \theta \right)$$

Из (12) видно, что траекториями натекания являются луч  $\theta_1^- = 0$  и конус  $\theta_2^- = \pi - \arcsin(4/\sqrt{35})$ , а траекториями вытекания —  $\theta_1^+ = \arcsin(4/\sqrt{35})$  и  $\theta_2^+ = \pi$  (фигура),  $\sigma_1 = \{0 \leq \theta_1^+\}$ ,  $\sigma_2 = \{\theta_1^+ \leq \theta \leq \theta_2^+\}$  (на фигуре указаны знаки функции тока). Распределение концентрации будет задаваться формулами (2), (5), (7), с  $n = 2$ ,  $R(\theta) = a$ . Используя (11), для полного потока на поверхность сферы получим выражение

$$I_0 = \frac{3^{1/3} \pi a^2 c_0}{2^{11/3} \Gamma(4/3)} T^{1/3} D^{2/3} \sum_{k=1}^3 B^{2/3}(\theta_{k+1}, \theta_k)$$

$$B(\alpha, \beta) = \int_{\beta}^{\alpha} \sin^2 \theta \left| 1 - \left( \frac{35}{16} \right) \sin^2 \theta \right|^{1/2} d\theta$$

$$B(\theta_2, \theta_1) = B(\theta_4, \theta_3) = \frac{1}{6\sqrt{35}} \left[ 27E\left(\frac{4}{\sqrt{35}}\right) - 19F\left(\frac{4}{\sqrt{35}}\right) \right]$$

$$B(\theta_3, \theta_2) = \frac{1}{3\sqrt{35}} \left[ 27E\left(\sqrt{\frac{19}{35}}\right) - 8F\left(\sqrt{\frac{19}{35}}\right) \right]$$

Здесь  $F$ ,  $E$  — полные эллиптические интегралы первого и второго рода соответственно. Производя вычисления, получим

$$(13) \quad I_0 = 6.01c_0a^2D^{2/3}T^{1/3}$$

Такой же полный диффузионный поток будет для частицы, находящейся в сдвиговом потоке с коэффициентом сдвига  $\alpha = 0.0503aT$  [9].

2°. Диффузия к поверхности твердого эллипсоида вращения с малым эксцентриситетом в однородном стоксовом потоке. Рассмотрим случай, когда  $e = a/b - 1$ ,  $|e| \ll 1$ , где  $a$  и  $b$  — оси эллипсоида, причем  $a$  — ориентированная по потоку ось симметрии.

Поле обтекания получаем разложением по  $e$  решения, данного в [13]

$$f(\theta) = 3/4 \sin^2 \theta [1 + 4e(\cos^2 \theta - 1/5)]$$

Применение формулы (11) дает с точностью до  $O(e^2)$  следующий результат:

$$I = I^* (1 - 0.044e)$$

Здесь  $I^*$  — полный поток на сферу, объем которой равен объему эллипсоида вращения. Видно, что если у эллипсоида большая ось направлена по (против) потоку, то его полный диффузионный поток меньше (больше), чем у сферы равного объема. Это обусловлено тем, что у эллипсоида меньший (большой) градиент скорости у поверхности по сравнению со сферой.

Следует подчеркнуть, что результаты, полученные для капли ( $n = 1$ ), могут применяться и в случае обтекания частицы невязким или фильтрационным потоком.

Поступила 8 I 1976

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Acrivos A., Goddard J. D. Asymptotic expansions for laminar forced-convection heat and mass transfer, pt. 1. Low speed flows. J. Fluid Mech., 1965, vol. 23, pt. 2, p. 273—291.
2. Дильман В. В., Брандт Б. Б. Об одном классе автомодельных задач конвективной диффузии. Теоретические основы химической технологии, 1974, т. 8, № 4.
3. Волощук В. М. Фундаментальные решения уравнения диффузионного пограничного слоя. Тр. Ин-та экспериментальной метеорологии, 1973, вып. 3 (37).
4. Левич В. Г. Физико-химическая гидродинамика. М., Физматгиз, 1959.
5. Acrivos A., Taylor T. D. Heat and mass transfer from single spheres in Stokes flow. Phys. Fluids, 1962, vol. 5, No. 4, p. 378—394.
6. Гупало Ю. П., Рязанцев Ю. С. Диффузия к твердой сферической частице в потоке вязкой жидкости при конечных числах Рейнольдса. Изв. АН СССР, МЖГ, 1969, № 6.
7. Гупало Ю. П., Рязанцев Ю. С., Улин В. И. Диффузия к частице в однородном поступательно-сдвиговом потоке. ПММ, 1975, т. 39, вып. 3.
8. Гупало Ю. П., Рязанцев Ю. С., Чалюк А. Т. Диффузия к капле при больших числах Пекле и конечных числах Рейнольдса. Изв. АН СССР, МЖГ, 1972, № 2.
9. Гупало Ю. П., Рязанцев Ю. С. Диффузия к частице в случае сдвигового течения вязкой жидкости. Приближение диффузионного пограничного слоя. ПММ, 1972, т. 36, вып. 3.
10. Happel J., Brenner H. Low Reynolds number hydrodynamics. Leyden, Noordhoff Internat. Publishing, 1973.
11. Chwang Allen T., Wu T. Yao-Tsu. Hydrodynamics of low-Reynoldsnumber flow, pt. 2. Singularity method for Stokes flows. J. Fluid Mech., 1975, vol. 67, pt. 4, p. 787—815.
12. Simha R. Untersuchungen über die Viskosität von Suspensionen und Lösungen. Kolloid Z., 1936, Bd. 76, H 1, S. 16—19.
13. Ламб Г. Гидродинамика. М.—Л., Гостехиздат, 1947.