УДК 532.527

ПРОСТЕЙШИЙ ТИП ТЕЧЕНИЙ С ОБРАЗОВАНИЕМ ТАНГЕНЦИАЛЬНЫХ РАЗРЫВОВ

В. Ф. Молчанов

(Москва)

Для некоторых задач о нестационарном отрывном обтекании тела плоским потоком идеальной жидкости, предлагается метод решения в аналитических рядах. Найден вид разложения искомых функций, при котором уравнения разделяются и оказывается возможным вычислять коэффициенты разложения последовательно, один за другим. Дается постановка обратной задачи и строятся точные решения. В реальных отрывных течениях существенную роль играет вязкость, и, как указано в работе [1], нет единого мнения о возможности возникновения отрыва в идеальной жидкости. Точные решения подтверждают такую возможность.

Работа представляет собой попытку дальнейшего развития аналитических методов исследования [2–5].

1. Элементы общей теории. В идеальной жидкости отрыв сопровождается образованием поверхности разрыва тангенциальных компонент скорости. Циркуляция скорости Γ по контуру, который пересекает эту поверхность лишь в одной точке W, в общем случае не равна нулю, и в плоском отрывном течении поверхность тангенциального разрыва можно представлять как функцию $W(t, \Gamma)$, $0 \leqslant \Gamma \leqslant \Gamma_0$. Здесь W — точка комплексной плоскости, t — время, Γ_0 — циркуляция по контуру, охватывающему весь разрыв. В такой параметризации скорость движения точек тангенциального разрыва равна полусумме скоростей движения частиц жидкости по обеим сторонам разрыва.

Символом U обозначим комплексную скорость безотрывного обтекания тела. Поверхность тангенциального разрыва в присутствии данного тела индуцирует дополнительную комплексную скорость V, которая терпит разрыв, и в точках разрыва определена средняя скорость $\langle V\rangle$.

Постановку задачи и ее решение удобно проводить с использованием вспомогательных комплексных плоскостей. Пусть, например, $z(W)$ — конформное отображение, переводящее внешность тела на правую полуплоскость z. Тогда

$$\langle V\rangle = \langle v\rangle \frac{dz}{dW}, \quad \langle v\rangle = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{-\Gamma_0}^{+\Gamma_0} \frac{d\Gamma_*}{z - z_*}$$

Здесь интегрирование проводится на плоскости z по отображенной поверхности разрыва и ее отражению относительно оси ординат, Γ_* — переменная интегрирования, $z_* = z(t, \Gamma_*)$.

Если отрыв происходит только с острых кромок тела, то между безотрывными обтеканиями тел и отрывными имеется взаимнооднозначное соответствие, и задача сводится к нахождению ограниченной комплексной скорости отрывного обтекания $U + V$ по заданной комплексной скорости безотрывного обтекания U. Для этого необходимо решить следующую систему относительно неизвестных $W(t, \Gamma)$ и $\Gamma_0(t)$ (верхняя звездочка справа означает комплексно-сопряженную величину):

$$(U + \langle V\rangle)^* = \frac{dW}{dt}, \quad |U + V| < \infty$$

Написанное неравенство является обобщением постулата Жуковского и может быть сведено к равенствам различного вида. Если, например, острая кромка тела оканчивается отрезком прямой $(-\varepsilon, 0)$, то постулат может быть записан в виде

$$\operatorname{Im}(U + V) = 0, \quad \Gamma = \Gamma_0$$

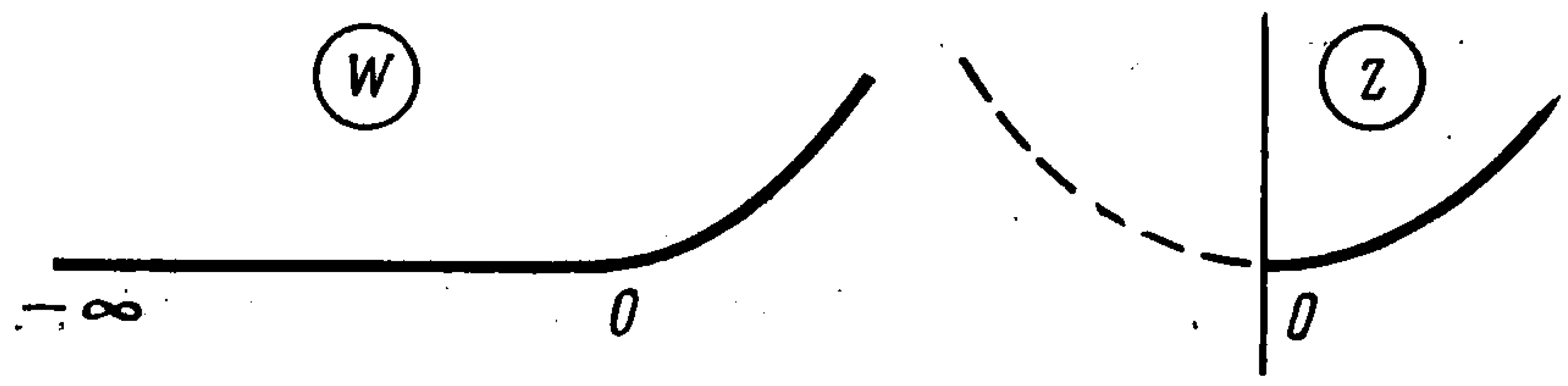
Вместо параметра Г удобно использовать время τ, прошедшее с момента возникновения данной точки тангенциального разрыва. В этом случае Г — неизвестная величина, зависящая от разности $t - \tau$. Выражение для $\langle v \rangle$ приобретает следующий вид:

$$\langle v \rangle = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{-t}^{+t} \frac{d\tau_*}{z - z_*} \frac{\partial \Gamma_*}{\partial \tau_*}, \quad \Gamma_* = \Gamma(t - |\tau_*|)$$

2. Случай полубесконечной пластины. Рассмотрим отрывное обтекание полубесконечной пластины $(-\infty, 0)$, соответствующее безотрывному обтеканию с комплексной скоростью

(2.1) $$U = 1 + A(t)/(2iW^{1/2})$$

$(A(t)$ — аналитическая функция, удовлетворяющая условию $A(0) = 0)$. В этом слу-



Фиг. 1

чае функция $z = \sqrt{W}$ дает конформное отображение внешности полупластины на правую полуплоскость z, и задача сводится к решению системы

(2.2) $$\left(1 + \frac{A(t)}{2iz} + \frac{\langle v \rangle}{2z}\right)^* = \frac{dz^2}{dt}$$

(2.3) $$\frac{A(t)}{i} + \langle v(t, 0) \rangle = 0, \quad v(t, \tau) = \frac{1}{2\pi t} \int \frac{\partial \Gamma}{\partial \tau_*} \frac{d\tau_*}{z - z_*}$$

Здесь также интегрирование производится по разрыву и его отражению (отмеченному на фиг. 1 штриховой линией) $z_* = z(t, \tau_*)$. Задача построения поля течения сводится к решению системы (2.2), (2.3) относительно неизвестных $z(t, \tau)$, $\Gamma_0(t)$.

После исключения $A(t)$ из (2.1) и замены переменных $t = t_1^2$, $\tau = \tau_1^2$, $z = \tau_1(1 + \eta)$ система (2.2), (2.3) приводится к виду

(2.4) $$\eta^* = \left[1 + \tau_1^{-2} \int\limits_{\Gamma} (\langle v(t_1, \tau_1) \rangle - \langle v(t_1, 0) \rangle) \frac{d\tau_1}{1 + \eta}\right]^{1/2} - 1$$

(2.5) $$\frac{A(t)}{i} + \langle v(t_1, 0) \rangle = 0$$

$$v(t_1, \tau_1) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{-t_1}^{+t_1} \frac{\partial \Gamma}{\partial \tau_{1*}} \frac{d\tau_{1*}}{\tau_1(1 + \eta) - \tau_{1*}(1 + \eta_*)}$$

Интегрирование в подкоренном выражении производится на плоскости переменных t_1, τ_1 вдоль линии $\Gamma = \mathrm{const}$ по переменной τ_1 в интервале $(0, \tau_1)$.

Метод решения удобно пояснить на примере полуобратной задачи, когда суммарная циркуляция сошедших вихрей задается в виде $M(t)$ — аналитическая функция, величина $A(t)$ считается неизвестной.

(2.6) $$\Gamma_0(t) = t^{2/3} M(t)$$

Решение может быть найдено итерационным процессом, в котором $(n + 1)$-я итерация η_{n+1}^* дается правой частью равенства (2.4), где величина v заменена на v_n, η — на η_n $(\eta_0 = 0)$, причем v_n определяется правой частью второго равенства (2.5), где функция Г заменена на $\Gamma_0(t_1^2 - \tau_{1*}^2)$, η — на η_n, η_* — на η_{n*}. Указанный итерационный процесс имеет следующее свойство: если величина $\eta_n = M_1(t_1^2, \tau_1)$ представима в виде сходящего ряда по возрастающим степеням t_1^2 и τ_1, то $\eta_{n+1} = M_2(t_1^2, \tau_1)$ также представима в виде ряда по степеням t_1^2 и τ_1.

Поэтому члены ряда M_2 функции членов ряда M_1. Но члены ряда M_2, имеющие порядок j, т. е. члены вида $at_1^{2k}\tau_1^{j-2k}$, зависят только от тех членов ряда M_1, порядок которых строго меньше j.

Таким образом, поскольку член первого порядка ряда M_2 не зависит от членов ряда M_1, то он неизменный при всех итерациях, начиная с первой. По этой причине члены второго порядка не меняются, начиная со второй итерации, ибо они зависят только от члена первого порядка, и т. д. Члены n-го порядка не меняются, начиная с n-й итерации. Естественно, что важны только эти члены.

Например, при $\Gamma_0 = {}^1/_3 t^{3/2}$ получаем

$$\eta = \frac{i}{12}\tau_1 - \frac{5}{288}\tau_1^2 + \frac{1}{96}t_1^2 + i\frac{29}{8640}\tau_1^3 - i\frac{7}{2304}t_1^2\tau_1 + \ldots$$

Переходя к координатам x, y, можно показать, что форма разрыва на плоскости W имеет вид

$$y(x, t) = x^{3/2}M_3(x, t) = \frac{1}{6}x^{3/2} - \frac{11}{1152}tx^{3/2} + \frac{41}{2880}x^{5/2} + \ldots$$

Координата x конца разрыва движется по закону

$$x = t - \frac{1}{48}t^2 + \ldots$$

Форма разрыва в окрестности его конца аналитична, но распределение завихренности имеет вид $\Gamma = \rho^{3/2}M_4(t, \rho)$, где ρ — расстояние от конкретной точки разрыва до его конца, M_4 — аналитическая функция. Можно также найти функцию $A(t)$. В рассмотренном примере имеем

$$A(t) = \frac{1}{4}t - \frac{1}{512}t^2 + \ldots$$

При решении прямой задачи в итерационный процесс вовлекается и уравнение (2.4). Оно всякий раз определяет суммарную циркуляцию сошедших вихрей Γ_{0n}, которая при выполнении условий на функцию $A(t)$ (1.1) представима в форме (2.6). Затем применяется такая же итерация, как и в полуобратной задаче. Если, например, $A(t) = t$, то

$$\eta = \frac{i}{3}\tau_1 - \frac{5}{18}\tau_1^2 + \frac{1}{6}t_1^2 + i\frac{4}{27}\tau_1^3 - i\frac{1}{9}t_1^2\tau_1 + \ldots$$

$$\Gamma_0 = \frac{4}{3}t^{3/2} + \frac{2}{15}t^{5/2} + \ldots$$

Можно заметить, что приведенный итерационный процесс основан на выделении линеаризованной части в качестве главного члена. Его можно применять и для отыскания отрывного течения около профиля, если, однако, последний оканчивается отрезком прямой так, что безотрывное течение в окрестности кромки имеет разложение с главными членами (2.1). В этом случае внешность профиля отображается на правую полуплоскость z так, что точка $z = 0$ соответствует кромке, и задача сводится к рассмотренной.

3. Постановка обратных задач. Доказательство теоремы существования процесса образования разрыва можно провести через доказательство сходимости рядов $\eta = M_5(t_1^2, \tau_1)$. Однако это весьма сложная задача. Здесь предлагается обходной путь с использованием обратных задач. Их постановка заключается в следующем. Около известного тела задается процесс образования разрыва $W(t, \alpha)$, $\Gamma(t, \alpha)$, где α — параметр. Требуется найти безвихревое обтекание тела, при котором

$$(U + \langle V\rangle)^* = dW/dt \tag{3.1}$$

Затем необходимо отыскать источники данного движения. Такими источниками могут быть, например, движущиеся тела.

Для решения обратных задач необходимо предварительно отыскать dW/dt и $\langle V\rangle$, после чего из уравнения (3.1) найти функцию на линии разрыва и продолжить ее аналитически на комплексную плоскость, если это возможно.

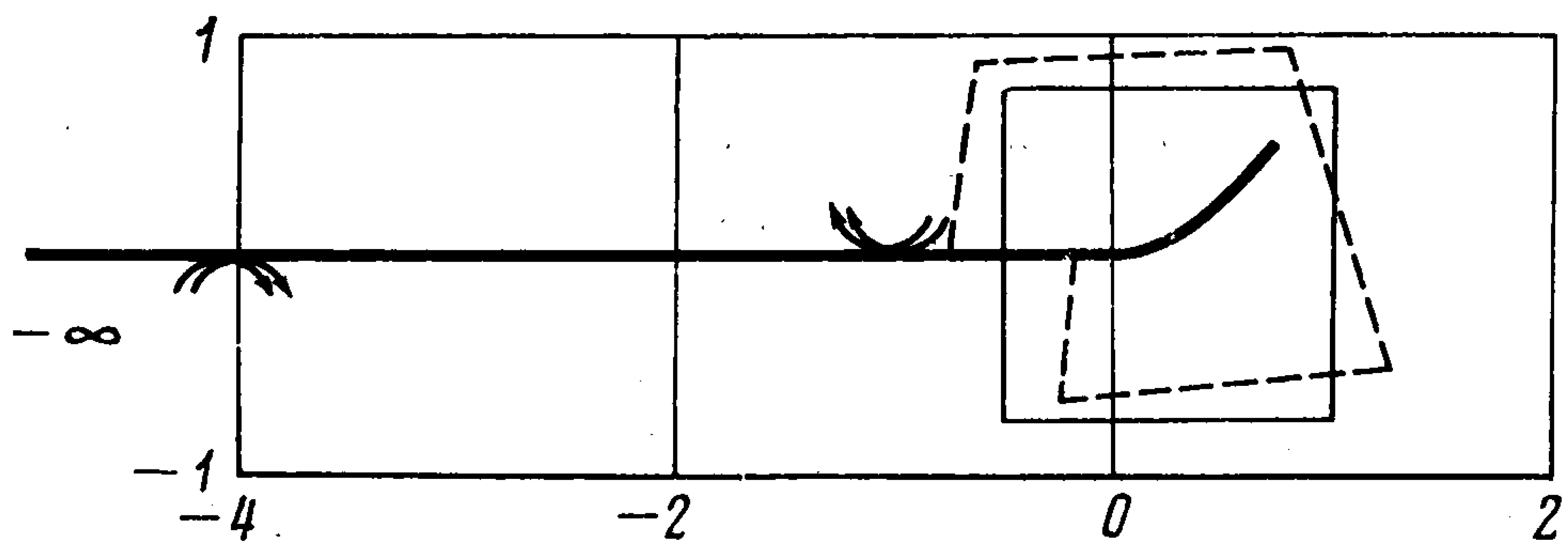
Как и прямую, обратную задачу удобно решать на вспомогательной плоскости. При заданном конформном отображении $W(z)$, уравнение движения на вспомогательной плоскости имеет вид

$$(u+\langle v\rangle)^* = |W|^2 \frac{dz}{dt}, \quad u = UWz$$

$$v = VWz, \quad \langle v\rangle = \langle V\rangle Wz$$

Решение отыскивается аналогично.

Таким образом, решение обратной задачи существует, если существует указанное выше аналитическое продолжение. Изучая задачу 2, можно доказать, что данное аналитическое продолжение всегда существует, если процесс образования разрыва задавать в виде сходящихся рядов



Фиг. 2

$$\eta = M_5(t_1^2, \tau_1), \quad \Gamma_0 = t_1^{3/2} M(t_1)$$

Не разбирая вопрос детально, приведем два точных решения, полученных с использованием этого факта.

4. Случай точного решения задачи с образованием разрыва около полупластины. Около полупластины $(-\infty, 0)$ (см. фиг. 2) зададим процесс образования разрыва в виде

$$W(\alpha) = 4\sin^2\alpha e^{i2\alpha}, \quad \Gamma(\alpha, t) = {}^2/_3 (t - 4\operatorname{tg}^2\alpha)^{3/2},$$

$$0 \leqslant \alpha \leqslant \operatorname{arctg}({}^1/_2 t^{1/2})$$

Вспомогательную плоскость z определим при помощи следующей пары преобразований:

$$\sqrt{W} = z_1, \quad \frac{2z_1}{2+iz_1} = z$$

При этом на плоскости z разрыв будет лежать на координате x. Результирующее конформное отображение получится таким:

$$W(z) = \left(\frac{2z}{2-iz}\right)^2$$

Записывая уравнение движения разрыва на плоскости z, находим

(4.1) $$u = |Wz|^2\, dz/dt - \langle v\rangle$$

При $z = x$ имеем

$$|Wz|^2 = 4x^2(1 + {}^1/_4 x^4)^{-3}, \quad dz/dt = {}^1/_2 x^{-1}$$

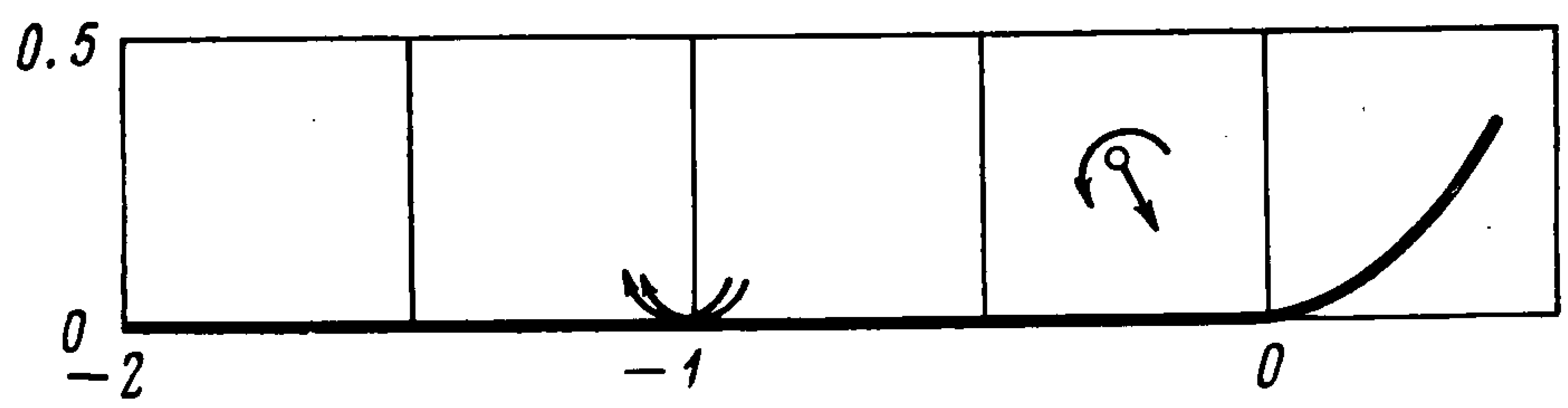
$$\langle v\rangle = -i(x^2 - {}^1/_2 t) \quad (v = i(z^2 - t)^{1/2} z - i(z^2 - {}^1/_2 t))$$

После подстановки этих выражений в формулу (4.1) при $z = x$ находим $u = u(x, t)$. Очевидно, для аналитического продолжения достаточно вместо x подставить z. В результате получаем

$$u = 2z(1 + {}^1/_4 z^4)^{-3} + i(z^2 - {}^1/_2 t)$$

Функция $U + V = (u + v)/Wz$, дающая решение задачи, имеет особенность на верхней поверхности пластины в точке — 1 и на нижней поверхности в точке — 4 (см. фиг. 2, где стрелками показаны траектории частиц жидкости). Внутри квадрата, показанного на фиг. 2, решение ограничено.

Для отыскания источника движения можно поступить следующим образом. Следя за движением частиц жидкости, лежащих в момент времени $t = 0$ на квадратном контуре (см. фиг. 2), найдем закон деформации этого контура. Теперь можно считать, что вне контура течение отсутствует. Сам контур, заполненный идеальной жидкостью, деформируется по найденному закону под действием внешних сил.



Фиг. 3

5. Случай точного решения задачи с образованием разрыва около пластины конечной ширины. Около пластины (—2,0) (см. фиг. 3) зададим процесс образования разрыва в виде

$$W(\alpha) = 2\sin^2\alpha e^{i2\alpha}/(1 - \sin^2\alpha e^{i2\alpha})$$

$$\Gamma(\alpha, t) = {}^2/_3 (t - 2\operatorname{tg}^2\alpha)^{3/2}, \quad 0 \leqslant \alpha \leqslant \operatorname{arctg}(t/2)^{1/2}$$

Следующей цепочкой отображений определяется вспомогательная плоскость z и результирующее конформное отображение:

$$\frac{2W}{2+W} = z_1, \quad \sqrt{z_1} = z_2, \quad \frac{\sqrt{2}\, z_2}{\sqrt{2} + iz_2} = z$$

$$W(z) = z^2/(1 - i\sqrt{2}z - z^2)$$

Как и в предыдущем примере, разрыв лежит на координате x. Соответственно

$$|Wz|^2 = (4x^2 + 2x^4)(x^4 + 1)^{-2}, \quad dz\,/\,dt = {}^1/_2 x^{-1}$$

$$u(z, t) = (2z + z^3)(z^4 + 1)^{-2} + i(z^2 - {}^1/_2 t)$$

Дающая решение функция $U + V$ имеет особенность в точке $-1/4 + 1/4i$, в которой вихрь интенсивности $\pi/2$ и диполь. Направление оси диполя и циркуляции вихря показаны на фиг. 3 стрелками. Имеется также особенность на верхней поверхности пластины в точке — 1 в виде диполя переменной интенсивности и полюса постоянной интенсивности четвертого порядка. На бесконечности скорость направлена под некоторым углом к пластине. Циркуляция вокруг системы пластина — разрыв отсутствует. На носике пластины имеется обычная особенность, соответствующая перетеканию потока (см. фиг. 3).

В начальный момент времени скорость на бесконечности, полюс на пластине, вихрь и диполь индуцируют поток, не имеющий особенности на задней кромке. Диполь на верхней поверхности пластины стремится вызвать перетекание и особенность на задней кромке. Эти нарушения регулярности образующимся тангенциальным разрывом нейтрализуются.

Точное решение на плоскости z может быть записано в виде

$$u + v = (2z + z^3)(z^4 + 1)^{-2} + i(z^2 - t)^{1/2} z$$

На плоскости W решение выглядит значительно сложнее.

В обоих рассмотренных примерах форма разрыва задавалась стационарной, менялась лишь ее длина. Это позволило особенно просто получить точные решения.

Автор благодарит А. А. Никольского за постановку основных вопросов работы и помощь в ее осуществлении.

Поступила 12 VIII 1974

ЛИТЕРАТУРА

1. *Седов Л. И.* Плоские задачи гидродинамики и аэродинамики. М., «Наука», 1966.
2. *Никольский А. А.* О «второй» форме движения идеальной жидкости около обтекаемого тела (исследование отрывных вихревых потоков). Докл. АН СССР, 1957, т. 116, № 2.
3. *Никольский А. А.* О силовом воздействии «второй» формы гидродинамического движения на плоские тела (динамика плоских отрывных потоков). Докл. АН СССР, 1957, т. 116, № 3.
4. *Никольский А. А.* Закон подобия для трехмерного стационарного отрывного обтекания тел жидкостью и газами. Уч. зап. ЦАГИ, 1970, т. 1, № 1.
5. *Никольский А. А.* Нелинейный закон подобия для отрывного обтекания идеальным газом прямоугольного крыла со сверхзвуковой скоростью. Уч. зап. ЦАГИ, 1972, т. 3, № 6.

УДК 532.72

ДИФФУЗИЯ К ЧАСТИЦЕ ПРИ БОЛЬШИХ ЧИСЛАХ ПЕКЛЕ В СЛУЧАЕ ПРОИЗВОЛЬНОГО ОСЕСИММЕТРИЧНОГО ОБТЕКАНИЯ ВЯЗКОЙ ЖИДКОСТЬЮ

Ю. П. Гупало, А. Д. Полянин, Ю. С. Рязанцев

(Москва)

Получено выражение для диффузионного притока вещества на поверхность твердой или жидкой частицы в случае произвольного осесимметричного обтекания с любым числом критических линий, что является обобщением результатов работ [1,2], где на поле течения налагались разного рода ограничения. Полученные формулы позволяют вычислять распределение концентрации и коэффициенты массообмена по данным о поле скоростей вблизи частицы. Приведены формулы для расчета диффузионного массообмена твердой сферической частицы, находящейся в потоке с параболическим профилем скорости, и эллипсоида вращения в равномерном поступательном потоке.

При анализе предполагаем, что концентрация вещества, растворенного в потоке, постоянна вдали от частицы, а на поверхности происходит полное его поглощение. В сферической системе координат, связанной с частицей, уравнение конвективной диффузии и граничные условия имеют вид

$$v_r\frac{\partial c}{\partial r}+\frac{v_\theta}{r}\frac{\partial c}{\partial\theta}=D\left[\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial c}{\partial r}\right)+\frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial c}{\partial\theta}\right)\right]\tag{1}$$

$$c\,|_{r=R(\theta)}=0,\quad c\,|_{r\to\infty}=c_0$$

$$v_r=\frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial\psi}{\partial\theta},\quad v_\theta=-\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial\psi}{\partial r}$$

Здесь c — концентрация, $r=R(\theta)$ — уравнение поверхности частицы, v_r, v_θ — составляющие скорости жидкости, ψ — функция тока. Предполагая, что число Пекле $P=aU\,|\,D\gg 1$ (D — коэффициент диффузии, a — характерный размер частицы, U — характерная скорость потока), пренебрегаем диффузионным переносом вещества вдоль поверхности частицы в сравнении с переносом по нормали. В общем случае осесимметричного обтекания частицы ламинарным потоком вязкой жидкости функцию