УДК 62—50

ОБ ОДНОМ КРИТЕРИИ ОПТИМАЛЬНОСТИ ВРЕМЕНИ ПРЕСЛЕДОВАНИЯ

П. Б. Гусятников

(Москва)

Даются эффективные критерии проверки достаточного условия оптимальности времени преследования (времени первого поглощения) для линейных дифференциальных игр, удовлетворяющих условиям локальной выпуклости. Указывается класс задач, для которого достаточное условие является и необходимым.

1. Пусть линейная задача преследования в n-мерном евклидовом пространстве R описывается

а) линейным векторным дифференциальным уравнением

$$dz / dt = Cz - u + v \tag{1.1}$$

где C — постоянная квадратная матрица порядка n, $u = u(t) \in P$ и $v = v(t) \in Q$ — измеримые при $t \geqslant 0$ вектор-функции, называемые управлениями игроков (соответственно догоняющего и убегающего); $P \subset R$ и $Q \subset R$ — выпуклые компакты;

б) терминальным множеством M, представимым в виде $M = M_0 + W_0$, где M_0 — линейное подпространство пространства R, W_0 — некоторое компактное выпуклое множество в пространстве L, являющемся ортогональным дополнением в R к M_0.

Будем предполагать, что для задачи (1.1) выполнены условия 1—3 работы [1], обозначения которой вместе с обозначениями работ [2,3] сохраним и в данной статье. Множества $\pi\Phi(r) P$ и $\pi\Phi(r) Q$ обозначим соответственно через $P(r)$ и $Q(r)$.

Замечание. В статье [2] содержится опечатка. Нижнюю формулу на стр. 208 следует читать так:

$$u_i(r) \equiv u(T_1 + \varepsilon_i - r,\ \psi(z_i,\ T_1 + \varepsilon_i))$$

2. *Определение.* Скажем, что на множестве $E \subset [0, +\infty)$ имеет место полное выметание [3], если для любого $r \in E$ множество $w(r) = P(r) \overset{*}{-} Q(r)$ непусто и

$$w(r) + Q(r) = P(r) \tag{2.1}$$

(операции над выпуклыми множествами см. в [4—5]).

Пусть $\varphi \in K$, $r > 0$. Обозначим через

$$h_P(r, \varphi) = \max_{u \in P} (\varphi \cdot \Phi(r) u) = \max_{p \in P(r)} (\varphi \cdot p) \tag{2.2}$$

$$h_Q(r, \varphi) = \max_{v \in Q} (\varphi \cdot \Phi(r) v) = \max_{q \in Q(r)} (\varphi \cdot q) \tag{2.3}$$

$$h(r, \varphi) = \max_{w \in w(r)} (\varphi \cdot w) \tag{2.4}$$

— опорные расстояния ([5], стр. 197) множеств соответственно $P(r)$, $Q(r)$ и $w(r)$, рассматриваемых в L. Положим

$$w(r, \varphi) = \pi\Phi(r)[u(r, \varphi) - v(r, \varphi)]$$

Лемма 1. Для того, чтобы на множестве E имело место полное выметание, необходимо и достаточно, чтобы для всех $r \in E$, $\varphi \in K$ и $\psi \in K$ выполнялось неравенство

$$(\varphi \cdot [w(r, \varphi) - w(r, \psi)]) \geqslant 0 \tag{2.5}$$

Доказательство. Если на множестве E имеет место полное выметание, то ([5], стр. 206)

$$h(r, \varphi) + h_Q(r, \varphi) = h_P(r, \varphi), \qquad r \in E, \quad \varphi \in K \tag{2.6}$$

Обозначив через $w^*(r, \varphi) \in w(r)$ вектор, доставляющий максимум в (2.4), получим, используя (2.1) и (2.6), что вектор $w^*(r, \varphi) + \pi\Phi(r)\, v(r, \varphi)$ лежит в $P(r)$ и доставляет максимум в (2.2). В силу условия 1 в [1] имеем поэтому $w^*(r, \varphi) + \pi\Phi(r)\, v(r, \varphi) = \pi\Phi(r)\, u(r, \varphi)$, и, значит, $w(r, \varphi) = w^*(r, \varphi) \in w(r)$. Аналогично $w(r, \psi) \in w(r)$. Так что (2.5) есть следствие (2.4) и определения $w^*(r, \varphi)$.

Обратно. Пусть выполнено (2.5). Рассмотрим множество

$$w^*(r) = \bigcup_{\varphi \in K} w(r, \varphi)$$

Обозначим через $w(r) = \operatorname{co} w^*(r)$ его выпуклую оболочку и через $h(r, \varphi)$ — опорное расстояние этой оболочки (см. (2.4)). Покажем, что

$$h(r, \varphi) \equiv (\varphi \cdot w(r, \varphi)) \tag{2.7}$$

Действительно, для любого $w \in w(r)$ найдется ([6], стр. 168) $\nu + 1$ векторов $\psi_1, \ldots, \psi_{\nu+1} \in K$ и числа $\alpha_1, \ldots, \alpha_{\nu+1} \in [0, 1]$, такие, что

$$w = \alpha_1 w(r, \psi_1) + \ldots + \alpha_{\nu+1} w(r, \psi_{\nu+1}), \qquad 1 = \alpha_1 + \ldots + \alpha_{\nu+1}$$

Полагая в соотношении (2.5) $\psi = \psi_i$, $i = 1, \ldots, \nu + 1$ и умножая его на α_i, будем иметь, сложив все полученные таким образом неравенства

$$(\varphi \cdot [w(r, \varphi) - w]) \geqslant 0 \tag{2.8}$$

Поскольку $w(r, \varphi) \in w(r)$, то (2.7) доказано.

Далее, поскольку из (2.7), следует (2.6), то теорема 12 из [7], стр. 446 дает (2.1), откуда в силу утверждения 2 в [4] $w(r) = P(r) \overset{*}{-} Q(r)$. Так что на множестве E имеет место полное выметание.

Замечание. В соответствии с определением опорного расстояния и указанной теоремой 12, для того чтобы вектор w лежал во множестве $w(r)$, необходимо и достаточно, чтобы для всех $\varphi \in K$ выполнялось неравенство (2.8).

3. *Условие А.* Скажем, что на множестве $E \subset [0, +\infty)$ выполняется условие A, если для каждого вектора $u \in P$ найдется такой вектор $V(u) \in Q$, что для всех $r \in E$ выполнено включение

$$\pi\Phi(r)\,[u - V(u)] \in w(r) \tag{3.1}$$

Пусть T — произвольное положительное число.

В работе [3] показано, что выполнение условия A на отрезке $[0, T]$ является достаточным условием глобальной оптимальности времени $T(z) \leqslant T$ верхнего слоя [1].

Замечание. Если вектор $V(u)$ в условии A выбрать в соответствии с рецептом [6], стр. 175, то дополнительное требование касательно измеримости соответствующих управлений, выдвигаемое в [3], удовлетворяется автоматически.

В дальнейшем будем всюду предполагать, что для задачи (1.1) выполнено ([6], стр. 168) условие 4 $\dim P = \dim Q = \nu$.

Пусть линейные подпространства M_P и M_Q и векторы p и q таковы, что

$$P^* = P - p \subset M_P, \quad \dim M_P = \nu, \qquad Q^* = Q - q \subset M_Q, \quad \dim M_Q = \nu$$

Обозначим через π_P (соответственно— через π_Q) оператор ортогонального проектирования из R на M_P (M_Q). Рассмотрим линейное отображение $f(r) = \pi\Phi(r)\,\pi_P : M_P \to L$. Поскольку множество $P^*(r) = f(r)\,P^*$, получающееся из множества $P(r)$ сдвигом на вектор $-\pi\Phi(r)\,p$, имеет в L непустую внутренность (лемма 1 в [1]), то $f(r)$ есть отображение «на». Поскольку же $\dim M_P = \dim L$, то $f(r)$ — гомеоморфизм. По аналогичной причине отображение $g(r) = \pi\Phi(r)\,\pi_Q : M_Q \to L$ есть линейный гомеоморфизм «на». Так что обратные к ним отображения $f^{-1}(r) : L \to M_P$ и $g^{-1}(r) : L \to M_Q$ — также линейные гомеоморфизмы «на» ([8], стр. 159).

Обозначим через $F(r) : L \to M_P$ и $G(r) : L \to M_Q$ линейные отображения, сопряженные к $f(r)$ и $g(r)$ соответственно, т. е. удовлетворяющие равенствам

$$(F(r)\,x \cdot y) = (x \cdot f(r)\,y), \qquad (G(r)\,x \cdot z) = (x \cdot g(r)\,z)$$

для любых $x \in L$, $y \in M_P$, $z \in M_Q$. Тогда ([8], стр. 203) $F(r)$ и $G(r)$ — гомеоморфизмы «на», причем $F(r) = \pi_P \Phi^* (r) \pi$, $G(r) = \pi_Q \Phi^* (r) \pi$. Поэтому обратные к ним отображения $F^{-1}(r) : M_P \to L$ и $G^{-1}(r) : M_Q \to L$ — также линейные гомеоморфизмы «на».

Если в каждом из подпространств L, M_P, M_Q зафиксировать базисы, то матрица каждого из рассмотренных выше отображений будет невырожденной аналитической на $(0, +\infty)$ матрицей порядка ν (ее элементы — аналитические на $(0, +\infty)$ функции параметра r). В дальнейшем указанные базисы будем считать удобным образом выбранными и вместо отображений будем оперировать с матрицами.

Обозначим через $u^*(r, \varphi)$ и $v^*(r, \varphi)$ векторы, дающие максимум выражениям соответственно $(\varphi \cdot \Phi(r) u^*)$, $u^* \in P^*$ и $(\varphi \cdot \Phi(r) v^*)$, $v^* \in Q^*$. Легко проверяется, что такие векторы единственны при каждом $r > 0$ и $\varphi \in K$ и, кроме того, $u^*(r, \varphi) = u(r, \varphi) - p$ и $v^*(r, \varphi) = v(r, \varphi) - q$.

Символом ∂ будем обозначать границу выпуклого множества в несущей его плоскости.

Замечание. При каждом фиксированном $\theta > 0$ отображение $u(\theta, \varphi) : K \to M_P + p$ есть гомеоморфизм сферы K на ∂P, а $v(\theta, \varphi)$ — гомеоморфизм сферы K на ∂Q.

Действительно, поскольку $f(r)$ — гомеоморфизм «на», то каждая внутренняя точка P^* переходит во внутреннюю точку множества $P^*(r) = f(r) P^*$, а каждая точка границы ∂P^* — в граничную точку множества $P^*(r)$. Поскольку

$$\partial P^*(r) = \bigcup_{\varphi \in K} \pi \Phi(r) u^*(r, \varphi)$$

и $(\varphi \cdot [\pi \Phi(r) u^*(r, \varphi) - \pi \Phi(r) u^*(r, \psi)]) > 0$, при $\varphi \neq \psi$ (условие 1 и лемма 1 в [1]), то $\pi \Phi(r) u^*(r, \varphi)$ — гомеоморфизм K на $\partial P^*(r)$. Так что

$$\partial P^* = \bigcup_{\varphi \in K} f^{-1}(r) \pi \Phi(r) u^*(r, \varphi) = \bigcup_{\varphi \in K} u^*(r, \varphi) \tag{3.2}$$

и $u^*(r, \varphi)$ — гомеоморфизм K на ∂P^*. В соответствии с определением границы $\partial P = \partial P^* + p$ ([6], стр. 168) это дает

$$\partial P = \bigcup_{\varphi \in K} u(r, \varphi)$$

и $u(r, \varphi)$ — гомеоморфизм сферы K на ∂P.

Вторая часть замечания доказывается аналогично.

Обозначим через K_P (K_Q) единичную сферу в M_P (M_Q).

Формула (3.2) показывает, что ∂P^* — локально выпуклая поверхность, причем, если через $u^*(\psi)$, $\psi \in K_P$ обозначить точку поверхности ∂P^*, в которой внешняя нормаль к ∂P^* равна ψ, то для любых $r > 0$, $\varphi \in K$ и $\psi \in K_P$

$$u^*(r, \varphi) = u^* \left(\frac{F(r) \varphi}{| F(r) \varphi |} \right), \quad u^*(\psi) = u^* \left(r, \frac{F^{-1}(r) \psi}{| F^{-1}(r) \psi |} \right) \tag{3.3}$$

Аналогично, если через $v^*(\psi)$, $\psi \in K_Q$ обозначить точку поверхности ∂Q^*, в которой ψ — внешняя нормаль к ∂Q^*, то

$$v^*(r, \varphi) = v^* \left(\frac{G(r) \varphi}{| G(r) \varphi |} \right), \quad v^*(\psi) = v^* \left(r, \frac{G^{-1}(r) \psi}{| G^{-1}(r) \psi |} \right) \tag{3.4}$$

Лемма 2. Условие A на множестве E выполнено тогда и только тогда, когда для любого $u \in \partial P$ найдется $V(u) \in Q$, такое, что для любого $r \in E$ выполнено (3.1).

Для доказательства леммы достаточно дословно повторить конструкцию [3].

Лемма 3. Пусть на множестве E имеется полное выметание. Тогда условие A выполняется на E тогда и только тогда, когда существует $\theta \in E$, такое, что для любых $\varphi \in K$ и $r \in E$ выполнено включение (здесь и далее $y(r, \varphi) = u(r, \varphi) - v(r, \varphi)$)

$$\pi \Phi(r) y(\theta, \varphi) \in w(r)] \tag{3.5}$$

Действительно, в соответствии с замечанием 3 при фиксированном $\theta \in E$ отображение $u(\theta, \varphi)$ есть гомеоморфизм сферы K на ∂P, так что в силу леммы 2 включение (3.5) гарантирует выполнимость условия A.

Обратно. Если условие A выполнено, то в силу (3.1)

$$\pi\Phi(\theta)\, u(\theta, \varphi) = \pi\Phi(\theta)\, V(u(\theta, \varphi)) + w, \qquad w \in w(\theta) \tag{3.6}$$

Из равенств (2.6), (2.2) — (2.4) и определения [1] вектора $v(\theta, \varphi)$ получаем, умножая (3.6) скалярно на φ, что

$$V(u(\theta, \varphi)) = v(\theta, \varphi) \tag{3.7}$$

Последнее вместе с (3.1) и доказывает (3.5).

Лемма 4. Пусть для задачи (1.1) выполнены условия 1—4. И пусть на полуинтервале $(0, T]$ имеет место полное выметание. Тогда для того чтобы на $(0, T]$ выполнялось условие A, необходимо и достаточно, чтобы условие A выполнялось на каждом подмножестве $I \subset (0, T]$, имеющем на $(0, T]$ предельную точку.

Необходимость утверждения очевидна. Докажем достаточность.

Зафиксируем $\tau \in I$. Тогда для любого $r \in I$ и для любых $\varphi, \psi \in K$ имеем (см. (2.8), (3.5))

$$(\psi \cdot \Phi(r)([u(r, \psi) - v(r, \psi)] - [u(\tau, \varphi) - v(\tau, \varphi)])) \geqslant 0 \tag{3.8}$$

Полагая $\varphi_r = F^{-1}(r)\, F(\tau)\varphi$, $\psi = \varphi_r / |\varphi_r|$, получим в соответствии с (3.3), (3.4)

$$u(r, \psi) = u^*(F(r)\psi / |F(r)\psi|) + p = u^*(F(\tau)\varphi / |F(\tau)\varphi|) + p =$$
$$= u(\tau, \varphi)\ v(\tau, \varphi) = v(r, \psi_r), \quad \psi_r = h(r)\psi / |h(r)\psi|$$

где

$$h(r) = G^{-1}(r)\, G(\tau)\, F^{-1}(\tau)\, F(r) : L \to L \tag{3.9}$$

— невырожденное линейное преобразование пространства L.

Подставляя полученные выражения в формулу (3.8) и используя локальную выпуклость поверхности $\pi\Phi(r)\, v(r, K)$ (лемма 1 в [1]), будем иметь $0 \geqslant (\psi \cdot \Phi(r)[v(r, \psi) - v(r, \psi_r)]) \geqslant c_2(\psi \cdot [\psi - \psi_r]) \geqslant 0$. Отсюда $\psi_r \equiv \psi$ и, следовательно, для любого $\psi \in K$ (ибо φ — любое)

$$h(r)\psi = |h(r)\psi|\, \psi$$

Как и в [2], отсюда следует, что $|h(r)\psi| \equiv \lambda(r)$ не зависит от ψ.

Как уже отмечалось выше, $h(r)$ — это матрица, элементы которой — аналитические функции параметра $r \in (0, +\infty)$, причем $h(r) \equiv \lambda(r) E$, $r \in I$, т. е. каждый элемент, не лежащий на главной диагонали матрицы $h(r)$, обращается в нуль во всех точках множества I и, значит, тождественно равен нулю. Диагональные элементы матрицы $h(r)$ совпадают на множестве I, и следовательно, они совпадают при всех r. Так что

$$h(r) \equiv \lambda(r) E, \quad r \in (0, +\infty) \tag{3.10}$$

Поэтому из формулы (3.9) вытекает, что для всех $r \in (0, +\infty)$ имеет место равенство $G(\tau)\, F^{-1}(\tau) = \lambda(r)\, G(r)\, F^{-1}(r)$. Переходя к сопряженным преобразованиям, имеем отсюда

$$B = f^{-1}(\tau)\, g(\tau) \equiv \lambda(r)\, f^{-1}(r) g(r)$$

Поскольку $h(r)$ — невырожденная при любом $r \in (0, +\infty)$ матрица и $\lambda(\tau) = 1$, то $\lambda(r) > 0$, $0 < r < +\infty$. Положив $\alpha(r) = 1 / \lambda(r)$, получим окончательно

$$g(r) = \alpha(r) f(r) B, \quad 0 < r < +\infty \tag{3.11}$$

причем $B : M_Q \to M_P$ — невырожденная матрица.

Пусть теперь r — произвольное число из интервала $(0, T]$. Тогда, полагая $\theta = \tau$, $w = \pi\Phi(r)\, y(\theta, \varphi)$, $\varphi_r = F^{-1}(r)\, F(\tau)\, \varphi$, и используя (3.3), (3.4), (3.10) и лемму 1, имеем для любого $\psi^* \in K$ неравенство

$$(\psi^* \cdot [w(r, \psi^*) - w]) = (\psi^* \cdot [w(r, \psi^*) - w(r, \varphi_r / |\varphi_r|)]) \geqslant 0$$

Последнее в силу замечания 2 дает (3.5). Поэтому в соответствии с леммой 3 условие A на $(0, T]$ выполнено. Лемма доказана.

Лемма 5. Пусть на $(0, T]$ имеется полное выметание и не выполнено условие A. Тогда для любого $\theta \in [0, T]$ существует подмножество $K(\theta) \subset K$, состоящее из конечного числа сечений сферы K подпространствами размерности $\leqslant \nu - 1$ (пустота множества $K(\theta)$ не исключается), такое, что для любого $\varphi \in K \setminus K(\theta)$ найдется подмножество $E(\varphi, \theta) \subset (0, T]$, не имеющее предельных точек на $(0, T]$, такое, что для всех $r \in [0, T] \setminus E(\varphi, \theta)$

$$\pi\Phi(r)\, y(\theta, \varphi) \notin w(r) \tag{3.12}$$

Доказательство. Пусть $r > 0$, $\varphi \in K$. Включение (3.5) выполнено тогда и только тогда, когда для любого $\psi \in K$ имеет место (полагаем $\tau = \theta$) неравенство (3.8). Отсюда, как и при доказательстве леммы 4, $G^{-1}(r)\, G(\theta)\, \varphi = \gamma(r, \varphi)\, F^{-1}(r)\, F(\theta)\, \varphi$, где $\gamma(r, \varphi) > 0$ или, что то же

$$H(r)\, \varphi = \gamma(r, \varphi)\, \varphi \tag{3.13}$$

где $H(r) = F^{-1}(\tau)\, F(r)\, G^{-1}(r)\, G(\tau) : L \to L$ — невырожденное линейное преобразование пространства L.

Положим $\varphi \in N(\theta)$ тогда и только тогда, когда равенство (3.13) выполнено по r на некотором подмножестве $D(\varphi)$ интервала $(0, T)$, имеющем на $(0, T]$ предельную точку. Если в качестве базиса в L выбрать такой, у которого первый базисный вектор есть вектор φ, то матрица $H(r)$ имеет в первом столбце отличным от нуля только первый элемент для всех $r \in D(\varphi)$. Элементы матрицы $H(r)$ — аналитические функции параметра r, поэтому все элементы первого столбца матрицы $H(r)$, кроме первого, тождественно равны нулю. Это означает, что равенство (3.13) выполнено для всех $r \in (0, +\infty)$.

Если среди векторов из $N(\theta)$ нет ν линейно-независимых, то множество $N(\theta)$ лежит в некотором $(\nu - 1)$-мерном подпространстве $L(\theta)$ пространства L. И тогда полагаем $K(\theta) = L(\theta) \cap K$.

Если же $\varphi_1, \ldots, \varphi_\nu \in N(\theta)$ образуют базис в L, то в этом базисе матрица $H(r)$ имеет при всех $r > 0$ диагональный вид

$$H(r) = \operatorname{diag}(\lambda_1(r), \ldots, \lambda_\nu(r)) \tag{3.14}$$

где $\lambda_i(r) = \gamma(r, \varphi_i)$ — аналитические функции параметра r.

Пусть $i_1 < \ldots < i_p$ — произвольное подмножество множества $\{1, 2, \ldots, \nu\}$. Обозначим через $L(i_1, \ldots, i_p)$ линейную оболочку векторов $\varphi_{i_1}, \ldots, \varphi_{i_p}$ и положим

$$K(\theta) = \bigcup_{p<\nu} (L(i_1, \ldots, i_p) \cap K)$$

Пусть $\varphi \notin K(\theta)$. Покажем, что найдется подмножество $E(\varphi, \theta) \subset (0, T]$, не имеющее предельных точек на $(0, T]$, такое, что для любого $r \in (0, T] \setminus E(\varphi, \theta)$ выполнено (3.12).

От противного. Если $D(\varphi) \subset (0, T]$ имеет на $(0, T]$ предельную точку и таково, что для всех $r \in D(\varphi)$ выполнено (3.5), то равенство (3.13) выполнено на $D(\varphi)$ и, следовательно, $\varphi \in N(\theta)$. Поэтому, раскладывая вектор φ по базису $\varphi_1, \ldots, \varphi_\nu \in K(\theta)$, имеем

$$\varphi = \alpha^1\varphi_1 + \ldots + \alpha^\nu\varphi_\nu$$

$$\sum_{i=1}^{\nu} [\alpha^i\gamma(r, \varphi)]\, \varphi_i = \gamma(r, \varphi)\, \varphi = H(r)\, \varphi = \sum_{i=1}^{\nu} [\alpha^i\lambda_i(r)]\, \varphi_i, \quad 0 < r < +\infty$$

Отсюда для каждого $i = 1, \ldots, \nu$ либо $\alpha^i = 0$, либо $\lambda_i(r) \equiv \gamma(r, \varphi)$.

Покажем, что существует i_0, такое, что $\alpha^{i_0} = 0$. Отсюда будет следовать, что $\varphi \in L(1, \ldots, i_0 - 1, i_0 + 1, \ldots, \nu) \cap K \subset K(\theta)$ — противоречие, которое и доказывает лемму.

Действительно, если $\alpha^i \neq 0$, $i = 1, \ldots, \nu$, то все функции $\lambda_i(r)$ совпадают, т. е. $\lambda_i(r) \equiv \lambda(r)$, $i = 1, \ldots, \nu$, $0 < r < +\infty$.

В силу (3.14) поэтому $(1 / \lambda(r))H(r) = H_1 \cdot H_2 = E$, где $H_1 = (1 / \lambda(r))F^{-1}(\tau)F(r)$, $H_2 = G^{-1}(r)\,G(\tau)$. Это означает, что $H_2 = H_1^{-1}$ и, следовательно, $(1 / \lambda(r))h(r) = H_2 \cdot H_1 = E$.

Получено соотношение (3.10), гарантирующее (см. доказательство леммы 4) выполнимость условия A на $(0, T]$.

4. Пусть на полуинтервале $(0, T]$ не выполняется условие полного выметания, или если полное выметание имеет место, то не выполнено условие A.

Обозначим для любых $\theta \in (0, T]$, $r \in (0, T]$, $\varphi \in K$ через $O(r, \theta, \varphi)$ множество всех векторов $\psi \in K$, для которых

$$\mu(r, \psi, \theta, \varphi) \equiv (\psi \cdot \pi\Phi(r)[y(r, \psi) - y(\theta, \varphi)]) < 0 \tag{4.1}$$

Отметим, что для некоторых наборов r, θ, φ множество $O(r, \theta, \varphi)$ пусто. Леммы 1 и 5 гарантируют непустоту множества $O(r, \theta, \varphi)$ хотя бы для одного набора r, θ, φ.

Будем предполагать, что для задачи (1.1) выполнено

Условие Б. Существуют $\theta \in (0, T)$, $r \in (0, T)$, $r \neq 0$, $\varphi \in K$, $\psi \in O(r, \theta, \varphi)$ и $z_0 \in R$, такие, что

$$\lambda(z_0, t) < 0, \quad t \in \begin{cases} [0, \theta) \cup (\theta, r), & \theta < r \\ [0, r) \cup (r, \theta), & r < \theta \end{cases} \tag{4.2}$$

$$\pi\Phi(\theta)\,z_0 = W(\theta, \varphi), \qquad \pi\Phi(r)\,z_0 = W(r, \psi)$$

Теорема 1. Если для задачи (1.1) выполнено условие Б, то в R найдется точка z_*, для которой время $T(z_*) \leqslant T$ неоптимально.

Доказательство. Положим $\alpha = \Phi^*(\theta)\,\varphi$, $\beta = \Phi^*(r)\,\psi$, $b = |\alpha|\,\beta - |\beta|\,\alpha$. Покажем, что

$$b \neq \bar{0} \tag{4.3}$$

От противного. Если $b = \bar{0}$, то $\beta = c\alpha$, где $c = |\beta| / |\alpha|$, и, следовательно, $(\beta \cdot u) \equiv c\,(\alpha \cdot u)$ для любого $u \in P$. Так что максимумы

$$\max_{u \in P}(\varphi \cdot \Phi(\theta)\,u), \qquad \max_{u \in P}(\psi \cdot \Phi(r)\,u) \tag{4.4}$$

достигаются на одном и том же (единственном в силу условия 1 в [1]) векторе $u_0 \in P$. Отсюда $u(\theta, \varphi) = u_0 = u(r, \psi)$. По аналогичной причине $v(\theta, \varphi) = v(r, \psi)$. Поэтому левая часть неравенства (4.1) равна нулю. Противоречие.

Из соотношений (4.1)—(4.3) следует, что при $\theta < r$ точка z_0 есть «особая» точка, так что по теореме 2 работы [2] в R найдется точка z_*, для которой время $T(z_*)$ неоптимально. Более того, сама конструкция доказательства указанной теоремы дает неравенство $T(z_*) < r < T$. Итак, для случая $\theta < r$ теорема доказана.

Случай $r < \theta$. Докажем более общее утверждение.

Лемма 7. Пусть $z_0 \in R$, k — натуральное и $0 < r_1 < \ldots < r_k < \theta < T$ таковы, что

$$\pi\Phi(r_i)z_0 = W(r_i, \psi_i), \quad i = 1, \ldots, k, \qquad \pi\Phi(\theta)z_0 = W(\theta, \varphi) \tag{4.5}$$

$$\lambda(z_0, t) < 0, \quad t \in [0, r_1) \cup \ldots \cup (r_i, r_{i+1}) \ldots \cup (r_k, \theta) \tag{4.6}$$

$$\mu_i = \mu(r_i, \psi_i, \theta, \varphi) < 0, \; i = 1, \ldots, k \tag{4.7}$$

Тогда в R существует точка z_*, для которой время $T(z_*) \leqslant T$ неоптимально.

Доказательство. Пусть $\varepsilon_0 > 0$ настолько мало, что $\tau = r_1 - \varepsilon > 0$, $T^\varepsilon = \theta + \varepsilon < T$ при $0 < \varepsilon < \varepsilon_0$. Положим

$$z_\varepsilon = \Phi(-\varepsilon)\left[z_0 + \int_0^\varepsilon \Phi(s)\,y(\theta + s, \varphi)\,ds\right]$$

Тогда

$$\lambda(z_\varepsilon, t) \leqslant \Big(\varphi(t, \varepsilon) \cdot \Big\{W(t, \varphi(t, \varepsilon)) - \pi\Phi(t-\varepsilon) z_0 -$$

$$- \int_0^\varepsilon \pi\Phi(t-\varepsilon+s)\, y(\theta+s, \varphi)\, ds\Big\}\Big) = \lambda(z_0, t-\varepsilon) - g(t, \varepsilon), \quad \varepsilon \leqslant t \leqslant T$$

где $\varphi(t, \varepsilon) = \psi(z_0, t-\varepsilon)$

$$g(t, \varepsilon) = \int_{t-\varepsilon}^{t} (\varphi(t, \varepsilon) \cdot \pi\Phi(s)\, [y(\theta+s-t+\varepsilon, \varphi) - y(s, \varphi(t, \varepsilon))])\, ds$$

Поскольку $\varphi(t, \varepsilon) \to \psi_i$ при $t \to r_i$ и $\varepsilon \to 0$ и поскольку $|s - t + \varepsilon| \leqslant \varepsilon \to 0$ при $\varepsilon \to 0$ равномерно по $s \in [t-\varepsilon, t]$ и $t \in [\varepsilon, T]$, то в силу непрерывности всех входящих в левую часть неравенства (4.7) функций найдется δ, $0 < \delta < \min\{\varepsilon_0, r_1 / 3, (\theta - r_k) / 5, \min\limits_{1 \leqslant i < k} (r_{i+1} - r_i) / 5\}$, такое, что для всех

$$t \in D_0 = \bigcup_{i=1}^{k} [r_i - 2\delta, r_i + 2\delta]$$

и для всех $\varepsilon \in (0, \delta)$ имеет место неравенство $-g(t, \varepsilon) < 0$, что вместе с (4.6) дает

$$\lambda(z_\varepsilon, t) < 0, \quad t \in D_0, \ \varepsilon \in (0, \delta) \tag{4.8}$$

Пусть $T_\varepsilon = T(z_\varepsilon)$. Покажем, что

$$T_\varepsilon \to \theta, \quad \varepsilon \to +0 \tag{4.9}$$

Заметим прежде всего, что $\pi\Phi(\theta+\varepsilon) z_\varepsilon = W(\theta+\varepsilon, \varphi)$, так что (см. [1]), $T_\varepsilon \leqslant \theta + \varepsilon$. Поэтому если (4.9) не имеет места, то найдутся число γ, $0 \leqslant \gamma < \theta$ и последовательность $\varepsilon_i \to +0$, такие, что (обозначаем $z_i = z_{\varepsilon_i}$, $T_i = T(z_i)$) $\lim\limits_{i\to\infty} T_i = \gamma$ и

$$\lambda(z_i, T_i) = 0, \quad i = 1, 2, \ldots \tag{4.10}$$

Поскольку $z_i \to z_0$, то в силу непрерывности функции $\lambda(z, t)$ имеем $\lambda(z_0, \gamma) = 0$. В связи с этим найдется m натуральное ($1 \leqslant m \leqslant k$), такое, что $\gamma = r_m$ и, следовательно, для всех достаточно больших i выполнены включения $\varepsilon_i \in (0, \delta)$, $T_i \in D_0$. Но это означает, что (4.10) противоречит (4.8).

Покажем, что для достаточно малых ε для точки z_ε не выполняется необходимое условие оптимальности (теорема 2 в [1]). Это и завершит доказательство теоремы и леммы 7.

От противного. Пусть для любого $\varepsilon > 0$

$$I(2\varepsilon, \tau) = \lambda(x_\varepsilon, \tau) \geqslant 0 \tag{4.11}$$

$$x_\varepsilon = \Phi(2\varepsilon)\Big[z_\varepsilon - \int_0^{2\varepsilon} \Phi(-s)\, y(T_\varepsilon - s, \varphi_\varepsilon)\, ds\Big], \quad \varphi_\varepsilon = \varphi(z_\varepsilon)$$

Положим $\psi_\varepsilon = \psi(x_\varepsilon, \tau)$. Тогда неравенство (4.11) дает после преобразований (обозначаем $r = r_1$, $\psi = \psi_1$)

$$0 \geqslant I(2\varepsilon, \tau) = a_1 + a_2 + a_3 + a_4 \geqslant a_2 + a_3 + a_4 \tag{4.12}$$

Здесь $a_1 = (\psi_\varepsilon \cdot [W(\tau, \psi_\varepsilon) - W(\tau, \psi)]) \geqslant 0$ (лемма 2 в [1]);

$$a_2 = -\Big(\psi_\varepsilon \cdot \int_{r-\varepsilon}^{r} \Phi(s)\, y(s, \psi)\, ds\Big), \quad a_3 = -\Big(\psi_\varepsilon \cdot \int_0^\varepsilon \Phi(r+\varepsilon-s)\, y(T^\varepsilon - s, \varphi)\, ds\Big)$$

$$a_4 = \Big(\psi_\varepsilon \cdot \int_0^{2\varepsilon} \Phi(r+\varepsilon-s)\, y(T_\varepsilon - s, \varphi_\varepsilon)\, ds\Big)$$

Поделив неравенство (4.12) почленно на $\varepsilon > 0$ и переходя к пределу при $\varepsilon \to 0$, получим, используя соотношения $\psi_\varepsilon \to \psi$, $T^\varepsilon \to \theta$, (4.9) и следующее из него соотношение $\varphi_\varepsilon \to \varphi$, $\varepsilon \to 0$, а также равномерную непрерывность функций $u(r, \varphi)$ и $v(r, \varphi)$ на $[\delta, T] \times K$ (см. [2])

$$(\psi \cdot \Phi(r)[y(\theta, \varphi) - y(r, \psi)]) \leqslant 0 \tag{4.13}$$

что противоречит (4.5).

Замечание. Как следует из доказательства теоремы, для того чтобы время $T(z)$ верхнего слоя было глобально оптимальным, необходимо, чтобы для любой точки $z_0 \in R$, удовлетворяющей условию (4.2), выполнялось неравенство (4.13).

5. Предположим, что в дополнение к условиям 1—4 задача (1.1) удовлетворяет следующему условию (см. [2], п. 5):

$$\pi\Phi(r)\,u = \pi\Phi(r)p + f(r)\,Au^*, \quad u^* = u - p, \quad u \in P$$
$$\pi\Phi(r)\,v = \pi\Phi(r)\,q + g(r)\,Bv^*, \quad v^* = v - q, \quad v \in Q$$

где $A : M_P \to L$ и $B : M_Q \to L$ — линейные гомеоморфизмы «на», $f(r)$ и $g(r)$ — аналитические функции, положительные на некотором полуинтервале $(0, T]$, векторы p и q определены в п. 3, $AP^* = BQ^* = S$, $W_0 = lS$, $l \geqslant 0$, причем $l > 0$, если $f(r) < g(r)$ в некоторой правой полуокрестности нуля.

В этом случае ([2])

$$u^*(r, \varphi) \equiv U(\varphi), \quad v^*(r, \varphi) \equiv V(\varphi), \quad AU(\varphi) = \varphi$$
$$BV(\varphi) = \varphi, \quad W(t, \varphi) = h(t)\varphi + \Psi(t)$$

где

$$h(t) = l + \int_0^t (f(r) - g(r))\,dr, \quad \Psi(t) = \pi\int_0^t \Phi(r)(p - q)\,dr$$

Предполагаем, что $h(t) > 0$, $t \in (0, T)$.

Теорема 2. Пусть в условиях п. 5 задача (1.1) такова, что одна из двух троек $\{f(r), g(r), f'(r)\}$ или $\{f(r), g(r), g'(r)\}$ линейно независима на $[0, T]$. Тогда имеет место следующая альтернатива: либо условие A на $(0, T]$ выполнено, т. е.

$$f(r) \geqslant g(r), \quad 0 \leqslant r \leqslant T \tag{5.1}$$

и тогда время $T(z) \leqslant T$ оптимально [2, 9, 10], либо (5.1) не выполнено, т. е. условие A не имеет места, и тогда в R найдется точка z_*, для которой время $T(z_*) \leqslant T$ неоптимально.

Поступила 4 IV 1974

ЛИТЕРАТУРА

1. *Гусятников П. Б.* Необходимые условия оптимальности в линейной задаче преследования. ПММ, 1971, т. 35, вып. 5.
2. *Гусятников П. Б.* Необходимое условие оптимальности времени первого поглощения. ПММ, 1973, т. 37, вып. 2.
3. *Гусятников П. Б., Никольский М. С.* Об оптимальности времени преследования. Докл. АН СССР, 1969, т. 184, № 3.
4. *Гусятников П. Б.* К вопросу об информированности игроков в дифференциальной игре. ПММ, 1972, т. 36, вып. 5.
5. *Хадвигер Г.* Лекции об объеме, площади поверхности и изопериметрии. М., «Наука», 1966.
6. *Ли Э. Б., Маркус Л.* Основы теории оптимального управления М., «Наука», 1972.
7. *Данфорд Н., Шварц Дж. Т.* Линейные операторы. Общая теория. М., Изд-во иностр. лит., 1962.
8. *Люстерник Л. А., Соболев В. И.* Элементы функционального анализа. М., «Наука», 1965.
9. *Гусятников П. Б., Никольский М. С.* Об оптимальности времени преследования. В кн.: Теория игр. Ереван. Изд-во АН Арм. ССР, 1973.
10. *Гусятников П. Б., Никольский М. С.* К проблеме оптимальности времени преследования. В кн.: Теория оптимальных решений. Тр. семинара, вып. 3, Киев, 1968.