Прикладная математика и механика. Том 40, 1976

УДК 62—50

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНАЯ ИГРА НАВЕДЕНИЯ ДЛЯ СИСТЕМЫ С ЛЮФТОМ ПРИ ИНТЕГРАЛЬНЫХ ОГРАНИЧЕНИЯХ

Л. А. Плахина, В. Н. Ушаков

(Свердловск)

Исследуется задача наведения на выпуклое целевое множество системы с люфтом, в которой реализации управлений первого игрока стеснены интегральными ограничениями. Сформулированы достаточные условия разрешимости задачи наведения. Приведен пример. Работа примыкает к [1–4].

1. Рассмотрим управляемую систему, описываемую векторным дифференциальным уравнением

$$\frac{dx}{dt} = A(t)x + C(v)u, \quad C(v) = \left\| \begin{matrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ \vdots & \vdots \\ \cos v & -\sin v \\ \sin v & \cos v \end{matrix} \right\| \tag{1.1}$$

Здесь x — n-мерный фазовый вектор системы, u — двумерный вектор управления первого игрока, v — управление второго игрока. Реализации управляющих воздействий игроков стеснены условиями

$$\int_t^{\vartheta} \| u[\tau] \|^2 d\tau \leqslant \mu^2[t], \quad v[t] \in [-\alpha, +\alpha]$$

для любого $t \in [t_0, \vartheta]$, $(\alpha < \pi/2)$

Символ $\| \cdot \|$ означает норму в соответствующем евклидовом пространстве, $\mu[t]$ — ограничения на ресурсы управляющего воздействия первого игрока, ϑ — фиксированный момент времени.

Изменение ограничения $\mu[t]$ определяется израсходованным в процессе игры ресурсом управляющего воздействия, т. е.

$$\mu^2[t+\Delta] = \mu^2[t] - \int_t^{t+\Delta} \| u[\tau] \|^2 d\tau \quad (\Delta > 0) \tag{1.2}$$

Уравнению (1.2) сопоставим дифференциальное уравнение

$$d\mu^2/dt = -\| u[t] \|^2 \tag{1.3}$$

Будем считать, что справедливо неравенство

$$\int_t^{t+\Delta} \left[\left(\sum_{j=1}^n l_j x_{jn-1}[\vartheta; \tau] \right)^2 + \left(\sum_{j=1}^n l_j x_{jn}[\vartheta; \tau] \right)^2 \right] d\tau > 0 \tag{1.4}$$

для любых t, Δ, $l\,(t \in [t_0, \vartheta]$, $0 \leqslant \Delta < \vartheta - t$, $\|l\| = 1)$, где $x_{jk}\,[\vartheta;\,\tau]$ — элемент фундаментальной матрицы $X\,[\vartheta;\,\tau]$ решений уравнения $dx/d\tau = A\,(\tau)x$. Отметим, что из неравенства (1.4) вытекает полная управляемость системы (1.1) по u.

В пространстве векторов x задано ограниченное, замкнутое и выпуклое целевое множество M.

Игра осуществляется на заданном отрезке времени $[t_0, \vartheta]$. Плата игры определяется равенством $\gamma\,[x\,[\vartheta]] = \rho\,[x\,[\vartheta],\ M]$, где $\rho\,[x\,[\vartheta],\ M]$ — расстояние от конечного состояния $x\,[\vartheta]$ системы (1.1) до множества M в евклидовой метрике.

Под позицией игры будем понимать вектор $\{t, z\} = \{t, x, \mu^2\}$, и движение $z[t]$ будем рассматривать в пространстве R^{n+1} векторов $z = \{x, \mu^2\}$.

Пусть зафиксирована начальная позиция игры $\{t_0, x_0, \mu_0{}^2\}$. Цель первого игрока — добиться возможно меньшего значения платы игры, начинающейся в позиции $\{t_0, x_0, \mu_0{}^2\}$. Второй игрок препятствует первому в достижении цели. Предположим, что в каждый текущий момент времени t каждому из игроков известно точное значение позиции игры $\{t, x, \mu^2\}$; будущие позиции и положение противника неизвестны каждому из игроков.

Системе (1.1), (1.2), уравнений с начальными условиями $x\,[t_0]$, $\mu^2\,[t_0]$ поставим в соответствие систему дифференциальных уравнений (1.1), (1.3), в виде векторного дифференциального уравнения

$$dz/dt = f\,(t, z, u, v) \tag{1.5}$$

обозначив символом $f\,(t, z, u, v)$ правую часть системы (1.1), (1.3).

2. Будем решать задачу с позиций первого игрока.

Введем некоторые вспомогательные определения.

Определение 1. Назовем допустимой стратегией первого игрока функцию $U = U\,(t, z)$, которая каждой позиции $\{t, z\}$ ставит в соответствие некоторое выпуклое замкнутое множество $U\,(t, z)$ $(U\,(t, z) \subset R^2)$, зависящее полунепрерывно сверху относительно включения по совокупности t, z, и такую, что для любой замкнутой области $D \subseteq Q$ и для каждой точки $\{t, z\}$ из D существует суммируемая функция $B\,(\tau)\,(\tau \in [t, \vartheta))$, удовлетворяющая в точках $\{\tau, z'\}$ области D условию: если $u \in U\,(\tau, z')$, то $\|u\|^2 \leqslant B\,(\tau)$. Здесь $Q = [t_0, \vartheta) \times Z$, $Z = \{z = \{x, \mu^2\} : \|x - x_0\| \leqslant L,\ 0 \leqslant \mu^2 \leqslant \mu_0{}^2\}$, L — некоторое фиксированное достаточно большое положительное число.

Положим $U\,(t, z) = \{0\}$ при $\mu \leqslant 0$.

Определение 2. Движением, порожденным допустимой стратегией $U = U\,(t, z)$ на отрезке $[t_0, t_*]$ и выходящим из позиции $\{t_0, z_0\}$, назовем всякую абсолютно-непрерывную вектор-функцию $z\,[t] = z\,[t;\,t_0,\ z_0;\ U]$, удовлетворяющую начальному условию $z\,[t_0] = z_0$ и уравнению

$$dz\,[t]/dt = f\,(t, z\,[t],\ u\,[t],\ v\,[t])$$
$$u\,[t] \in U\,(t, z\,[t]),\quad v\,[t] \in [-\alpha,\ +\alpha]$$

при почти всех $t \in [t_0, t_*]$ $(t_0 < t_* < \vartheta)$, где $v\,[t]$ — некоторая измеримая на $[t_0, \vartheta]$ функция, удовлетворяющая указанному включению.

Существование этих движений вытекает из работы [5].

Движение $z[t] = z[t;\, t_0,\, z_0;\, U]$ определено на любом отрезке $[t_0,\, t_*]$ $(t_* < \vartheta)$, поэтому его можно продолжить по непрерывности до момента $t = \vartheta$.

Таким образом, определены движения $z[t] = z[t;\, t_0,\, z_0;\, U]$ на отрезке $[t_0,\, \vartheta]$.

Введем в рассмотрение функционал

$$\rho_U{}^*[t_0,\, z_0;\, \vartheta] = \max_{x[\vartheta]=x[\vartheta;\, t_0,\, z_0;\, U]} \rho\,[x[\vartheta];\, M]$$

$$(\{x[\vartheta],\, \mu^2[\vartheta]\} = z[\vartheta])$$

Формализуем задачу наведения, поставленную в п.1, следующим образом.

Задача. Среди допустимых стратегий $U(t,\, z)$ требуется найти оптимальную минимаксную стратегию $U^0(t,\, z)$, удовлетворяющую соотношению

$$\min_U \rho_U{}^*[t_0,\, z_0;\, \vartheta] = \rho_{U^0}{}^*[t_0,\, z_0;\, \vartheta]$$

Стратегию $U^0(t,\, z)$ будем строить, опираясь на некоторую вспомогательную программную конструкцию. Ниже приведем определения элементов этой конструкции.

Допустимым контруправлением $V(t,\, u)$ второго игрока назовем однозначную борелевскую по совокупности $(t,\, u)$ функцию, которая каждой паре $(t, u) \in [t_0,\, \vartheta] \times R^2$ ставит в соответствие значение $V(t,\, u) \in [-\alpha,\, +\alpha]$.

Пусть $\{t_*,\, z_*\} = \{t_*,\, x_*,\, \mu_*{}^2\} = \{t_*,\, x[t_*],\, \mu^2[t_*]\} (t_* \in [t_0,\, \vartheta])$ — некоторая позиция игры.

Движением, порожденным допустимым контруправлением $V(t,\, u)$ второго игрока, назовем вектор-функцию $x[t] = x[t;\, t_*,\, z_*;\, V]\; (t \in [t_*,\, \vartheta])$, которая абсолютно-непрерывна на $[t^*,\, \vartheta]$ и удовлетворяет соотношению

$$x[t] = \sum_{i=1}^{n+1} \lambda_i[t]\, x^{(i)}[t]$$

$$\sum_{i=1}^{n+1} \lambda_i[t] = 1, \quad \lambda_i[t] \geqslant 0 \quad \text{при } t \in [t_*,\, \vartheta]$$

$$x^{(i)}[t] = \lim_{k\to\infty} x_k^{(i)}[t]$$

$$x_k^{(i)}[t] = X[t;\, t_*]\, x[t_*] + \int_{t_*}^{t} X[t;\, \tau]\, C(V(\tau,\, u_k^{(i)}[\tau]))\, u_k^{(i)}[\tau]\, d\tau$$

Здесь вектор-функция $u_k{}^{(i)}[\tau]$, рассматриваемая на $[t_*,\, \vartheta]$, принадлежит множеству $\Phi[t_*,\, \mu[t_*]]$ всех функций $u[\tau]$ $(\tau \in [t_*,\, \vartheta])$, удовлетворяющих неравенству

$$\int_{t_*}^{\vartheta} \|u[\tau]\|^2 d\tau \leqslant \mu^2[t_*], \qquad z_* = \{x[t_*],\, \mu^2[t_*]\}$$

Областью достижимости $G(t_*, z_*; \vartheta, V)$ в пространстве x для движений $x[t] = x[t; t_*, z_*; V]$ из позиции $\{t_*, z_*\}$ в момент ϑ назовем множество $\{x[\vartheta]: x[\vartheta] = x[\vartheta; t_*; z_*, V]\}$.

Обозначим через M_ε замкнутую евклидову ε-окрестность множества M и через $\varepsilon_0 = \varepsilon_0(t_*, z_*; \vartheta)$ — нижнюю грань значений $\varepsilon \geqslant 0$, при которых при всяком выборе допустимого контруправления $V(t, u)$ по крайней мере одно движение $x[t] = x[t; t_*, z_*; V]$ в момент ϑ попадет на M_{ε_0}. Пусть $G = G(t_*, z_*; \vartheta; V)$ — область достижимости, расстояние которой до множества M равно $\varepsilon_0(t_*, z_*; \vartheta)$. Область достижимости G пересекается с множеством M_ε тогда и только тогда, когда замкнутая $(-M_\varepsilon)$ окрестность области G содержит точку $x = 0$. Область $G_{(-M_\varepsilon)}$ состоит из всех векторов $q = g + k - h$, где $g \in G(t_*, z_*; \vartheta; V)$, $h \in M$, $\| k \| \leqslant \varepsilon$. Выпуклое, ограниченное и замкнутое множество $G_{(-M_\varepsilon)}$ есть пересечение всех своих опорных полупространств (g^* — граничный элемент области G)

$$l'g^* \geqslant \min_q l'q \tag{2.1}$$

$$q = x[\vartheta] + k - h = X[\vartheta; t_*]x_* + \int_{t_*}^{\vartheta} X[\vartheta; \tau]w[\tau]\,d\tau + k - h$$

Здесь

$$w[\tau] = \sum_{j=1}^{n+1} \lambda_j[\tau] w^{(j)}[\tau], \quad \tau \in [t_*, \vartheta] \tag{2.2}$$

$$\sum_{j=1}^{n+1} \lambda_j[\tau] = 1, \quad \lambda_j[\tau] \geqslant 0, \quad j = 1, 2, \ldots, n+1 \tag{2.3}$$

$w^{(j)}[\tau]$—слабый предел на $[t_*, \vartheta]$ некоторой последовательности функций $\{C(V(\tau, u_k^{(j)}[\tau]))\, u_k^{(j)}[\tau]\}$, где $u_k^{(j)}[\tau] \in \Phi[t_*, \mu[t_*]]$.

Из предыдущих рассуждений следует, что

$$\varepsilon_0(t_*, z_*; \vartheta) = \sup_{\|l\|=1} \sup_V \min_{q \in G(t_*, z_*;\, \vartheta;\, V)} l'q =$$
$$= \sup_{\|l\|=1} (\sup_V \min_{w[\cdot] \in F(V)} I(t_*) - l'X[\vartheta; t_*]x_* - \max_{h \in M} l'h)$$
$$I(t_*) = \int_{t_*}^{\vartheta} l'X[\vartheta; t]w[t]\,dt$$

где $F(V)$ — совокупность функций $\{w[\cdot]\}$, удовлетворяющих на отрезке $[t_*, \vartheta]$ соотношениям (2.2), (2.3); $w[\cdot]$ означает функцию $w[\tau]$, рассматриваемую на отрезке $[t_*, \vartheta]$.

Покажем, что верхняя грань

$$\sup_V \min_{w[\cdot] \in F(V)} I(t_*) \tag{2.4}$$

при каждом фиксированном векторе l достигается на некоторой допустимой функции $V_l(t, u)$. Для этого определим множество

$$V_l^*(t, u) = \{v_u:\ v_u \in [-\alpha, +\alpha],\ l'X[\vartheta; t]C(v_u)u =$$
$$= \max_{v \in [-\alpha, +\alpha]} l'X[\vartheta; t]C(v)u\}$$

Множество $V_l^*(t, u)$ при каждом векторе l замкнуто, ограничено и зависит полунепрерывно сверху по включению от переменных t, u. Отсюда следует, что существует однозначная борелевская по совокупности (t, u) функция $V_l(t, u)$, удовлетворяющая включению $V_l(t, u) \in V_l^*(t, u)$. Эта функция принадлежит классу допустимых контруправлений $V(t, u)$.

Отметим, что функция $V_l(t, u)$ может быть задана соотношениями

$$V_l(t, u) = \begin{cases} \alpha, & \psi_l(t, u) \in [-\pi, -\alpha] \\ -\alpha, & \psi_l(t, u) \in [+\alpha, +\pi] \\ -\psi_l(t, u), & \psi_l(t, u) \in [-\alpha, +\alpha] \end{cases}$$

Здесь $\psi_l(t, u)$ — угол между векторами $\{l'X[\vartheta; t]\}^*$ и u; $\{l'X[\vartheta; t]\}^*$ — проекция вектора $l'X[\vartheta; t]$ на пространство координат (x_{n-1}, x_n); отсчет углов $\psi_l(t, u)$ ведется от вектора $\{l'X[\vartheta; t]\}^*$.

Из определения допустимого контруправления $V_l(t, u)$ следует, что справедливы соотношения

$$\inf_{u[\cdot]} \int_{t_*}^{\vartheta} l'X[\vartheta; t]\, C(V_l(t, u[t]))\, u[t]\, dt \geqslant$$

$$\geqslant \inf_{u[\cdot]} \int_{t_*}^{\vartheta} l'X[\vartheta; t]\, C(V(t, u[t]))\, u[t]\, dt$$

$$u[\cdot] \in \Phi[t_*, \mu[t_*]]$$

или

$$\min_{w[\cdot] \in F(V_l)} I(t_*) \geqslant \min_{w[\cdot] \in F(V)} I(t_*)$$

Пусть $w_l[t]$ — такая измеримая функция из $F(V_l)$, которая удовлетворяет равенству

$$I_l(t_*) = \min_{w[\cdot] \in F(V_l)} I(t_*), \quad I_l(t_*) = \int_{t_*}^{\vartheta} l'X[\vartheta; t]\, w_l[t]\, dt$$

Из последних двух соотношений следует, что каково бы ни было допустимое контруправление $V_l(t, u)$, справедливо неравенство и, значит

$$I_l(t_*) \geqslant \min_{w[\cdot] \in F(V)} I(t_*)$$

верхняя грань (2.4) достигается на допустимом контруправлении $V_l(t, u)$.

Учитывая равенство

$$J_l(t_*) = -\cos\alpha\, \mu[t_*] R(t_*)$$

$$R(t_*) = \left(\int_{t_*}^{\vartheta} \left[\sum\nolimits_{n-1n}^{2}(t) + \sum\nolimits_{nn}^{2}(t)\right] dt\right)^{1/2}$$

$$\Sigma_{kn}(t) = \sum_{j=1}^{n} l_j x_{jk}[\vartheta; t], \quad k = n-1, n$$

получим, что $\varepsilon_0 = \varepsilon_0(t_*, z_*; \vartheta)$ определяется равенством

$$\varepsilon_0 = \max_{\|l\|=1} \left(-\cos\alpha\mu[t_*] R(t_*) + l'X[\vartheta; t_*] x_* - \max_{h \in M} l'h\right) \tag{2.5}$$

в случае, когда правая часть равенства (2.5) неотрицательна; иначе $\varepsilon_0(t_*, z_*; \vartheta) = 0$. При $\varepsilon_0 > 0$ максимум в правой части (2.5) достигается на единственном векторе l°, так как максимизируемая величина, взятая с обратным знаком, есть функция, выпуклая относительно переменной l. Имеем регулярный случай. В результате получим, что существует область $G(t_*, z_*; \vartheta; V_{l^\circ})$, которая касается ε_0-окрестности множества M. Пусть $g_0 = x[\vartheta; t_*, z_*; V_{l^\circ}]$ — точка, в которой область $G(t_*, z_*; \vartheta; V_{l^\circ})$ касается M_{ε_0}. Следовательно, движение $x[t; t_*, z_*; V_{l^\circ}]$, которое выводится на эту точку в момент ϑ, будет оптимальным, и порождающее его управление $w^0[t] \in F(V_{l^\circ})$ будет удовлетворять условию принципа максимума

$$\int_{t_*}^{\vartheta} l^{\circ\prime} X[\vartheta; t]\, w^0[t]\, dt = \min_{w[\cdot]\in F(V)} \int_{t_*}^{\vartheta} l^{\circ\prime} X[\vartheta; t]\, w[t]\, dt \tag{2.6}$$

Определим стратегию $U_e(t_*, z_*)$ $(t_* < \vartheta)$ следующим образом:

$$U_e(t_*, z_*) = u_{l^\circ}[t_*] = \begin{Vmatrix} u_{1l^\circ}[t_*] \\ u_{2l^\circ}[t_*] \end{Vmatrix} \tag{2.7}$$

$$u_{1l^\circ}[t_*] = \frac{-\mu[t_*]\,\Sigma_{n-1n}^{\circ}(t_*)}{R^\circ(t_*)}, \quad u_{2l^\circ}[t_*] = \frac{-\mu[t_*]\,\Sigma_{nn}^{0}(t_*)}{R^\circ(t_*)}$$

$$R^\circ(t_*) = \Big(\int_{t_*}^{\vartheta} [\Sigma_{n-1n}^{\circ 2}(t) + \Sigma_{nn}^{\circ 2}(t)]\, dt\Big)^{1/2}$$

$$\Sigma_{kn}^{\circ}(t) = \sum_{j=1}^{n} l_j^\circ x_{jk}[\vartheta; t], \qquad k = n-1, n$$

в случае $\varepsilon_0(t_*, z_*; \vartheta) > 0$; здесь $l^\circ = l^\circ(t_*, z_*)$ определяется равенством

$$-\cos\alpha\, \mu[t_*] R^\circ(t_*) + l^{\circ\prime} X[\vartheta; t_*] x_* - \max_{h\in M} l^{\circ\prime} h = \varepsilon_0(t_*, z_*; \vartheta)$$

$U_e(t_*, z_*) = \{0\}$ в случае, когда $\varkappa < \mu_* \leqslant 0$, $(\varkappa < 0)$ или $\varepsilon_0(t_*, z_*; \vartheta) < 0$;

$U_e(t_*, z_*) = \mathrm{co}\,\{0 \cup u^*$: $\quad u^* = \lim\limits_{k\to\infty} U_e(t_k, z_k)$, $\quad \lim\limits_{k\to\infty}(t_k, z_k) = (t_*, z_*)$, $\varepsilon_0(t_k, z_k; \vartheta) > 0$ при $k = 1, 2, \ldots\}$ в случае, когда $\mu_* > 0$ и $\varepsilon_0(t_*, z_*; \vartheta) = 0$.

Видно, что в силу неравенства (1.4) и полунепрерывности $U_e(t_*, z_*)$ допустима.

В области $\varepsilon_0(t, z; \vartheta) > 0$ при фиксированном значении ϑ величина ε_0 — дифференцируемая функция переменных t и z, и ее частные производные определяются равенствами

$$\frac{\partial\varepsilon_0}{\partial t} = \frac{\mu[t]\cos\alpha}{R^\circ(t)}(\Sigma_{n-1n}^{\circ 2}(t) + \Sigma_{nn}^{\circ 2}(t)) - s[t]' A(t)\, x[t]$$

$$s[t]' = l^{\circ\prime} X[\vartheta; t], \quad \frac{\partial\varepsilon_0}{\partial x_i} = s_i[t], \quad ds[t]/dt = -A'(t)\, s[t]$$

Производные функции ε_0 вычисляются по известной схеме (см. [1], стр. 149—153).

Справедливо равенство

$$\max_{z[t]}\Big(\frac{d\varepsilon_0(t, z[t]; \vartheta)}{dt}\Big)_{U_e} = \min_U \max_{z[t]}\Big(\frac{d\varepsilon_0(t, z[t]; \vartheta)}{dt}\Big)_U = 0 \tag{2.8}$$

Теорема. Экстремальная стратегия $U_e(t, z)$ (2.7) первого игрока гарантирует в момент ϑ первому игроку значение платы $\rho\,[x\,[\vartheta];\ M]$, равное $\varepsilon_0(t_0, z\,[t_0];\ \vartheta) = \min_U \rho^*_U(t_0, z\,[t_0];\ \vartheta)$, если игра начиналась в начальной позиции t_0, $z\,[t_0]$, такой, что $\varepsilon_0(t_0, z\,[t_0];\ \vartheta) > 0$ и нуль, если $\varepsilon_0(t_0, z\,[t_0];\ \vartheta) \leqslant 0$.

Доказательство. Первый случай $\varepsilon_0(t_0, z\,[t_0];\ \vartheta) > 0$ тривиален. Рассмотрим второй случай $\varepsilon_0(t_0, z\,[t_0];\ \vartheta) \leqslant 0$. Предположим противное: пусть существует $z[t]_{U_e}$, такое, что $\rho[x[\vartheta]_{U_e}, M] > 0$ $(z\,[\vartheta]_{U_e} = \{x\,[\vartheta]_{U_e}\mu^2[\vartheta]\}_{U_e}\})$. Введем функцию $\varepsilon(t) = \varepsilon_0(t, z\,[t]_{U_e};\ \vartheta)$, $\varepsilon(\vartheta) > 0$. Тогда существует $t_* < \vartheta$ и существует такое малое Δ $(0 < \Delta < \vartheta - t_*)$, для которых $\varepsilon(t_*) = 0$, $\varepsilon(t) > 0$ для всех $t \in (t_*, t_* + \Delta]$. Справедлива формула

$$\varepsilon(t_* + \Delta) = \varepsilon(t_k) + \int\limits_{t_k}^{t_*+\Delta} \frac{d\varepsilon(\tau)}{d\tau}\, d\tau, \quad t_k \in (t_*, t_* + \Delta] \tag{2.9}$$

Здесь $\{t_k\}$ сходится к t_*. В силу непрерывности функции $\varepsilon(t)$ на $[t_*, t_* + \Delta]$

$$\varepsilon(t_k) \to \varepsilon(t_*) = 0, \quad k \to \infty \tag{2.10}$$

В силу соотношений (2.8) имеет место неравенство $d\varepsilon(\tau)/d\tau \leqslant 0$ на каждом отрезке $[t_k, t_* + \Delta]$. Следовательно, получаем

$$\int\limits_{t_k}^{t_*+\Delta} \frac{d\varepsilon(\tau)}{d\tau}\, d\tau \leqslant 0 \tag{2.11}$$

Из соотношений (2.9) — (2.11) следует неравенство $\varepsilon(t_* + \Delta) \leqslant 0$, что противоречит условию теоремы. Теорема доказана.

Стратегия $U_e(t, z)$ доставляет первому игроку результат, совпадающий со значением $\varepsilon_0(t_0, z\,[t_0];\ \vartheta) > 0$, оптимальным для программной конструкции, и следовательно, эта стратегия является оптимальной минимаксной стратегией.

3. Рассмотрим пример. В трехмерном евклидовом пространстве R^3 по круговой орбите Γ_0 вокруг Земли равномерно движется материальная точка A массы m. В момент t_0 в некоторую достаточно малую окрестность точки A выводится материальная точка B массы m.

Примем, что движение точки B в пространстве R^3 векторов $y = \{y_1, y_2, y_3\}$ описывается векторным дифференциальным уравнением

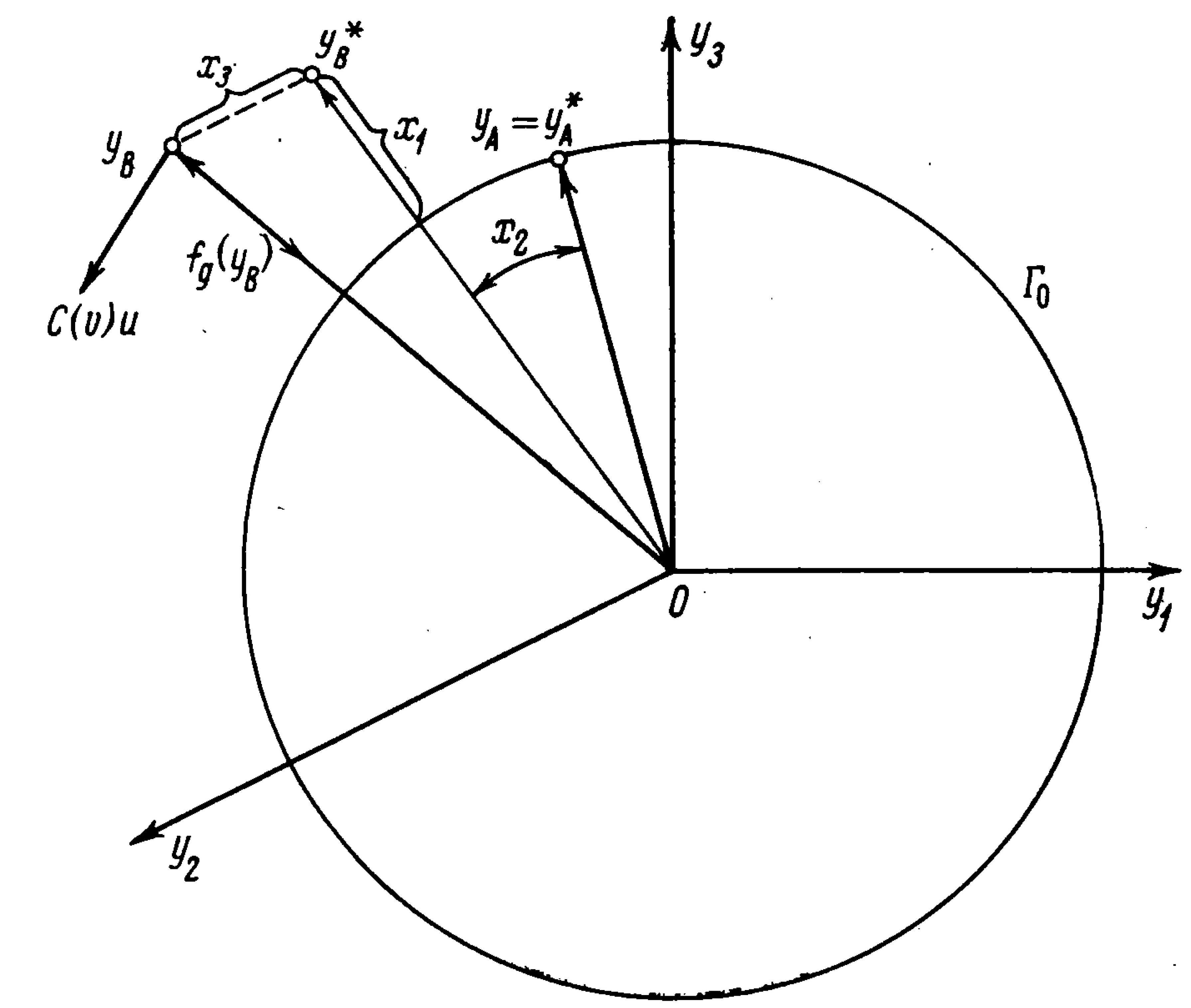
$$my^{\cdot\cdot} = f_g(y) + C(v)\,u \tag{3.1}$$

Здесь $f_g(y)$ — сила притяжения точки B, находящейся в положении $y = \{y_1, y_2, y_3\}$, Землей, центр O которой находится в начале системы координат y_1, y_2, y_3; $v \in [-\alpha, +\alpha]$ — помеха, которую будем трактовать как управление второго игрока, u — двумерный вектор управления первого игрока. Отметим, что управление первого игрока подчиняется интегральному ограничению, указанному в п. 1, причем ограничение на управление первого игрока равно $\mu\,[t_0]$.

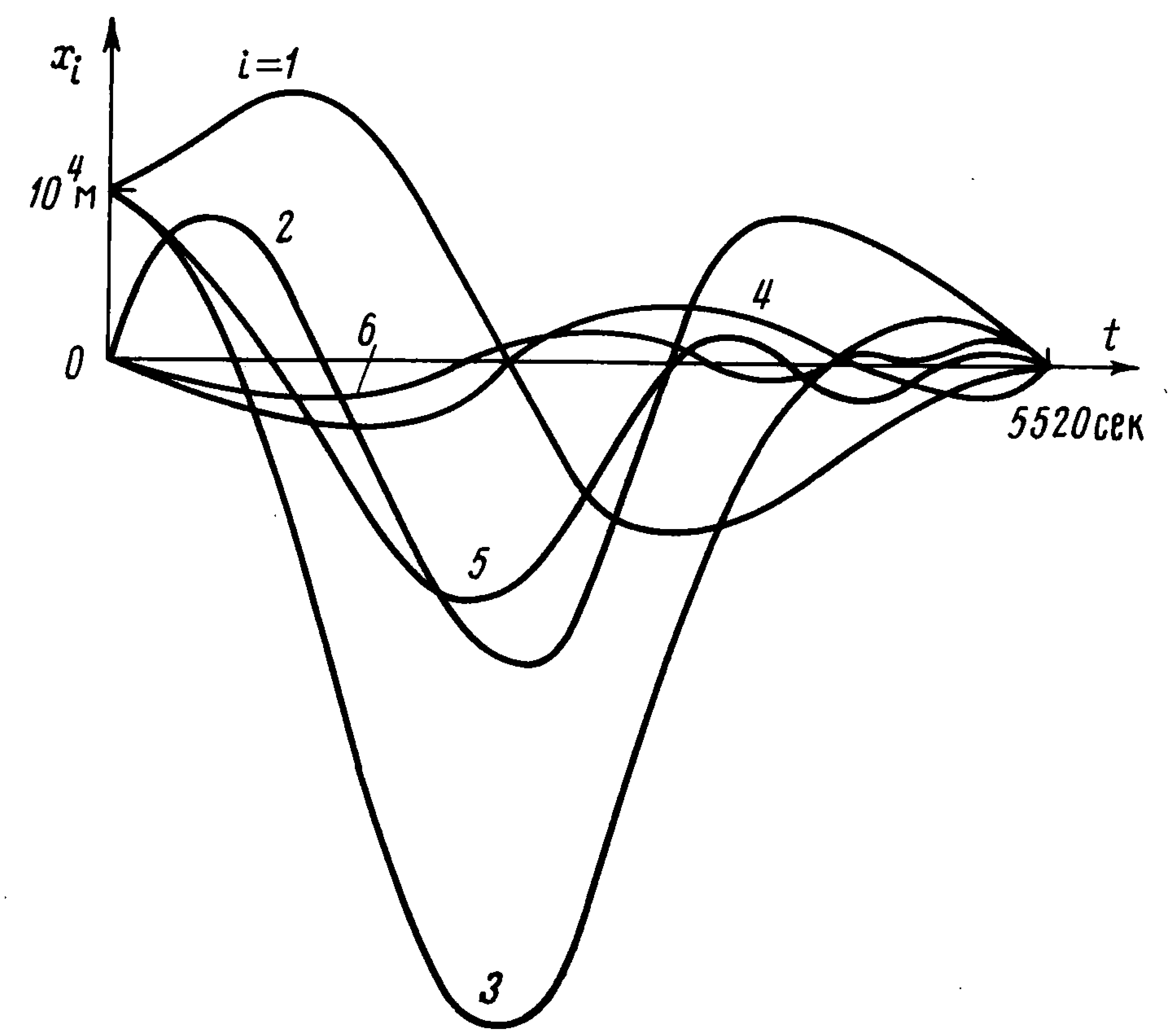
Требуется за период T обращения точки A вокруг Земли выбором управления u обеспечить совпадение точек A и B.

Считая, что орбита Γ_0 лежит в плоскости координат y_1, y_3, введем обобщенные координаты точки B, характеризующие отклонение точки B от точки A: $x_1 = \|y_B\| - \|y_A\|$; x_3 — угол между проекциями $y_A{}^*$ и $y_B{}^*$ векторов y_A и y_B на плоскость (y_1, y_3), отсчитываемый от проекции вектора y_A на плоскость (y_1, y_3); $x_5 = y_{2B} - y_{2A}$.

Здесь $y_A = \{y_{1A}, y_{2A}, y_{3A}\}$ и $y_B = \{y_{1B}, y_{2B}, y_{3B}\}$ — векторы, характеризующие положение точек A и B в пространстве R^3.



Фиг. 1



Фиг. 2

Примем в качестве фазового вектора точки B шестимерный вектор $x = \{x_1, x_2 = x_1^{\cdot}, x_3, x_4 = x_3^{\cdot}, x_5, x_6 = x_5^{\cdot}\}$.

Тогда уравнение (3.1) движения точки B сводится в линейном приближении к системе дифференциальных уравнений

(3.2)
$$x_1^{\cdot} = x_2, \quad x_2^{\cdot} = 3\beta^2 x_1 + 2\beta R_0 x_4, \quad x_3^{\cdot} = x_4$$

$$x_4^{\cdot} = -\frac{2\beta}{R_0} x_2 + \frac{1}{mR_0}(u_1 \cos v - u_2 \sin v)$$

$$x_5^{\cdot} = x_6, \quad x_6^{\cdot} = -\beta^2 x_5 + \frac{1}{m}(u_1 \sin v + u_2 \cos v)$$

$$\left(\beta = \sqrt{\frac{\nu_0 M_e}{R_0^3}}, \quad R_0 = \frac{Tv^*}{2\pi}\right)$$

Здесь M_e — масса Земли, ν_0 — постоянная всемирного тяготения, v^* — первая космическая скорость. При расчете примера полагали $T = \vartheta - t_0 = 5520$ *сек*, $m = 200$ *кг*.

Процедура решения примера заключается в следующем. Величина $\mu[t_0]$ выбирается таким образом, чтобы $\varepsilon_0(t_0, z[t_0]; \vartheta) = 0$. Отрезок $[t_0, \vartheta]$ разбивается на равные промежутки $[t_i, t_{i+1}]$, и в каждый момент t_i вычисляется управление первого игрока по формулам (2.3), где вектор l^0 определяется из соотношения (2.4).

В частности, для начальных данных

$$t_0 = 0 \text{ сек},\ x_1[t_0] = x_3[t_0] = x_5[t_0] = 10^4 \text{ м},\quad x_2[t_0] = x_6[t_0] = 0 \text{ м/сек},$$
$$x_4[t_0] = -1 \text{ м/сек},\ v = 45^\circ$$

получены следующие результаты:

$$x_1[\vartheta] = -13\cdot 10^{-2} \text{ м},\quad x_2[\vartheta] = -45\cdot 10^{-4} \text{ м/сек},\quad x_3[\vartheta] = -5.7 \text{ м}$$
$$x_4[\vartheta] = -29\cdot 10^{-2} \text{ м/сек},\quad x_5[\vartheta] = 1.2 \text{ м},\quad x_6[\vartheta] = -87\cdot 10^{-2} \text{ м/сек}$$

Отметим, что здесь радианная мера величины x_3 переведена в метры.

На фиг. 2 изображены реализации компонент x_i ($i = 1, \ldots, 6$) фазового вектора системы (3.2) с приведенными выше начальными условиями.

Авторы благодарят Н. Н. Красовского и А. И. Субботина за постановку задачи и ценные советы.

Поступила 26 I 1976

ЛИТЕРАТУРА

1. *Красовский Н. Н.* Игровые задачи о встрече движений. М., «Наука», 1970.
2. *Красовский Н. Н., Субботин А. И.* Позиционные дифференциальные игры. М., «Наука», 1974.
3. *Красовский Н. Н.* Минимаксное поглощение в игре сближения. ПММ, 1971, т. 35, вып. 6.
4. *Ушаков В. Н.* Экстремальные стратегии в дифференциальных играх с интегральными ограничениями. ПММ, 1972, т. 36, вып. 1.
5. *Castaing Ch.* Sur les equations differentielles multivoques. Compt. rend. Acad. sci. Ser. A, 1966, vol. 263, No. 2, p. 63.