

О КОНСОЛИДАЦИИ УПРУГОЙ ПОРИСТОЙ МНОГОСЛОЙНОЙ СРЕДЫ ПОД ДАВЛЕНИЕМ КРУГОВОГО В ПЛАНЕ ШТАМПА

В. С. Никишин, Б. С. Парийский, Г. С. Шапиро

(Москва)

Дается решение задачи о вдавливании кругового цилиндрического штампа с плоским основанием в пакет из произвольного числа плоскопараллельных слоев, лежащий на полупространстве. Слои и полупространство считаются упругими пористыми телами, пропитанными жидкостью и обладающими различными упругими характеристиками. Рассматриваются два крайних случая, когда внешняя поверхность полностью проницаема или непроницаема для поровой жидкости. На граничных плоскостях между слоями принимается условие полного сцепления слоев.

В п. 1 приведено основанное на [1,2] общее решение контактной задачи для консолидирующейся упругой пористой многослойной среды, выраженное через повторные интегралы Бромвича и Ханкеля. В п. 2 построено решение контактной задачи. В п. 3 описаны методы вычислений, используемые при получении численного решения задачи, и приведены результаты вычислений величины осадки штампа и интенсивности его давления во времени в случае двухслойного полупространства с различными упругими и фильтрационными характеристиками. Обнаружено, что если слой достаточно тонкий, но более жесткий, чем полупространство, то на площадке контакта возникают недопустимые растягивающие напряжения, как в случае аналогичной задачи теории упругости [3]. Таким образом, распределение давления на площадке контакта штампа с консолидирующимся многослойным полупространством в зависимости от его упругих и геометрических характеристик может качественно отличаться от распределения давления на площадке контакта штампа и консолидирующегося однородного полупространства.

Теоретические основы консолидации упругой пористой среды развиты в работах Био [4,5]. Первая краевая задача теории консолидации для полупространства и слоя в частных случаях нагружения рассмотрена в [6-8]. Плоская контактная задача теории консолидации о вдавливании штампа с плоским основанием в однородное полупространство рассмотрена в [9,10].

1. Общее решение задачи теории консолидации для многослойной среды. Рассматривается упругое пористое насыщенное жидкостью многослойное полупространство, состоящее из N слоев, покоящихся на бесконечно простирающемся упругом основании. Каждому слою, считая сверху вниз, присвоен номер $j = 1, 2, \dots, N$, а упругое основание считается как $N + 1$ слой бесконечной толщины. Модули упругости E_j , коэффициенты Пуассона ν_j , коэффициенты консолидации $c_j = 2G_j\eta_jk_j$, выраженные через модули сдвига $G_j = E_j / 2(1 + \nu_j)$, коэффициенты проницаемости в законе Дарси k_j и $\eta_j = (1 - \nu_j) / (1 - 2\nu_j)$ для каждого слоя $j = 1, 2, \dots, N + 1$ могут принимать различные и произвольные допустимые значения. На граничных плоскостях между слоями принимается условие полного сцепления слоев. Отметим, что решение задачи для случая скрепленных слоев нетрудно видоизменить и для случая соприкасания слоев без сил трения.

Начало отсчета цилиндрической системы координат r, z берется на граничной плоскости между слоями N и $N + 1$.

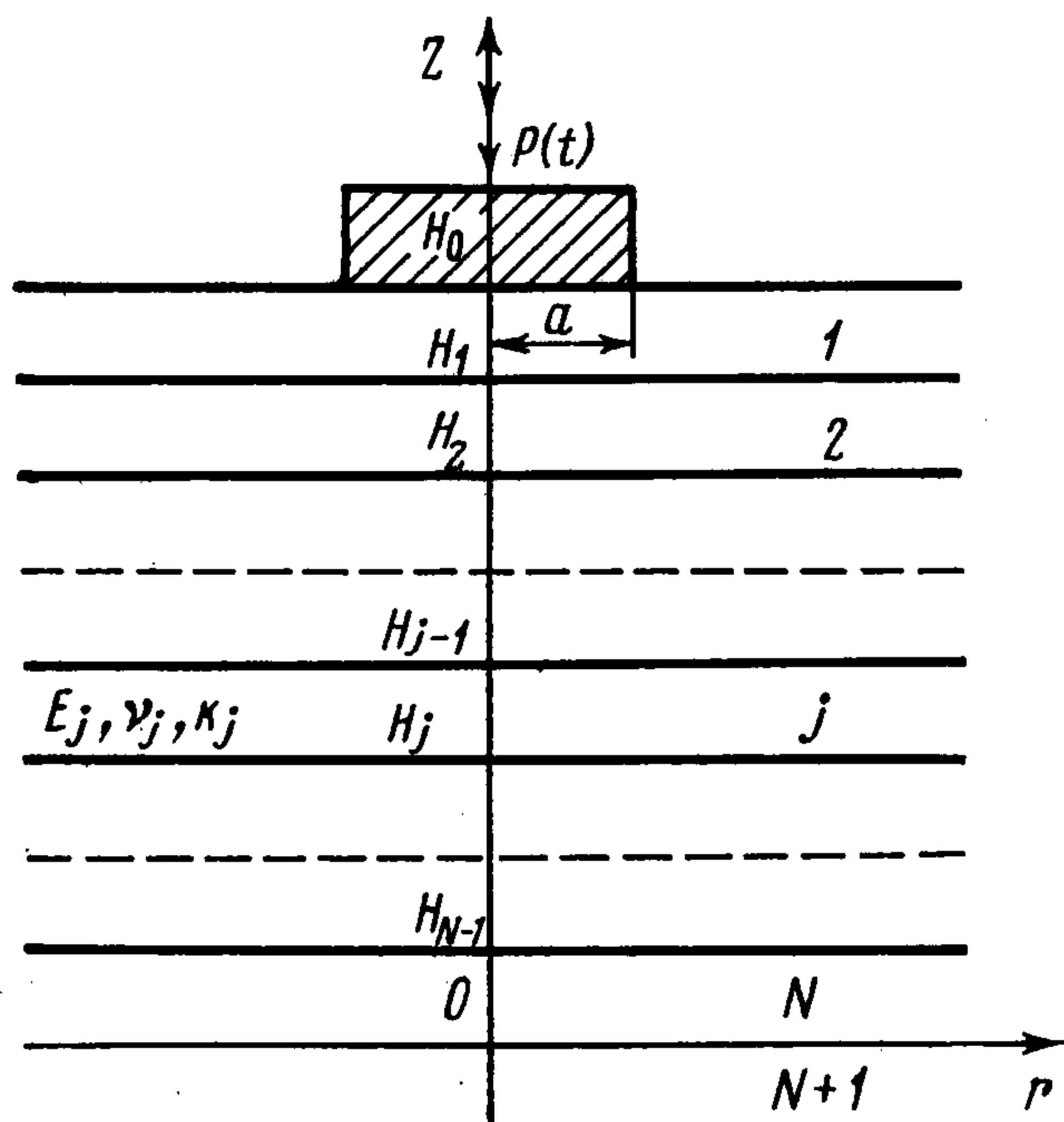
В этой системе координат слои ограничены параллельными плоскостями $z = H_j$ ($j = 0, 1, 2, \dots, N$), ортогональными оси oz , причем $z = H_0$ — внешняя граничная плоскость многослойного полупространства, а величина H_0 равна общей толщине всех слоев, покоящихся на упругом основании. Толщины слоев $H_{j-1} - H_j$ ($j = 1, 2, \dots, N$) могут принимать различные и произвольные значения (фиг. 1).

Основные уравнения теории консолидации для j -го слоя в перемещениях при наличии осевой симметрии имеют вид [6]

$$(1.1) \quad \left(\Delta - \frac{1}{r^2} \right) u_j - \frac{1}{1-2\nu_j} \frac{\partial e_j}{\partial r} - \frac{1}{G_j} \frac{\partial \sigma_j}{\partial r} = 0$$

$$\Delta w_j - \frac{1}{1-2\nu_j} \frac{\partial e_j}{\partial z} - \frac{1}{G_j} \frac{\partial \sigma_j}{\partial z} = 0, \quad c_j \Delta e_j = \frac{\partial e_j}{\partial t}$$

где $u_j = u_j(r, z, t)$, $w_j = w_j(r, z, t)$ — радиальные и осевые перемещения, Δ — оператор Лапласа, t — время, σ_j — давление жидкости в порах, e_j — объемное расширение на единицу объема.



Фиг. 1

Введем безразмерные пространственные переменные $\rho = r/a$, $y = z/H_0$ и время $t' = tc/a^2$, где c — коэффициент консолидации, принятый за единицу измерения (например, можно положить его равным c_1 или c_{N+1}), a — радиус круговой площадки контакта. Общее решение контактной задачи в безразмерных переменных ρ, y, t' зависит от характерного параметра $\lambda = H_0/a$, геометрических параметров $y_j = H_j/H_0$, определяющих границы слоев $y = y_j$ ($j = 1, 2, \dots, N$), упругих параметров

$\chi_j = E_j(1 + \nu_{j+1}) / E_{j+1}(1 + \nu_j)$, $\eta_j = (1 - \nu_j) / (1 - 2\nu_j)$ и фильтрационных параметров $\kappa_j = k_j / k_{j+1}$, $c_j' = c_j / c$. В дальнейшем изложении штрихи у приведенного времени t' и у параметров c_j' всюду опускаются. Предполагается, что силы трения на площадке контакта и на всей внешней поверхности $y = 1$ многослойного полупространства отсутствуют. Интенсивность распределения внешней нормальной нагрузки $p(\rho, t)$ представляется через повторный интеграл Бромвича — Ханкеля

$$(1.2) \quad p(\rho, t) = \int_0^{\infty} \beta \bar{p}(\beta, t) J_0(\rho\beta) d\beta$$

$$\bar{p}(\beta, t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty} \frac{1}{s} e^{st} \bar{p}^*(\beta, s) ds \quad (\gamma > 0)$$

где трансформанта Ханкеля $\bar{p}(\beta, t)$ от $p(\rho, t)$ и трансформанта Лапласа — Карсона $\bar{p}^*(\beta, s)$ от $\bar{p}(\beta, t)$ имеют вид

$$(1.3) \quad \bar{p}(\beta, t) = \int_0^{\infty} \rho p(\rho, t) J_0(\rho\beta) d\rho, \quad \bar{p}^*(\beta, s) = s \int_0^{\infty} \bar{p}(\beta, t) e^{-st} dt$$

Если внешняя нормальная нагрузка вне площадки контакта $0 \leq \rho \leq 1$ отсутствует, то функция $p(\rho, t)$ представляет неизвестную интенсивность давления штампа на площадке контакта.

Общее решение контактной задачи для каждого слоя $j = 1, 2, \dots, N + 1$ консолидирующегося многослойного полупространства, выраженное через повторный интеграл Бромвича — Ханкеля, построено и исследовано в работе [1]. Нормальные осевые напряжения $\sigma_{zj}(\rho, y, t)$ и перемещения $w_j(\rho, y, t)$ в произвольном слое $j = 1, 2, \dots, N + 1$ представляются формулами

$$(1.4) \quad \sigma_{zj} = \int_0^{\infty} \beta \Delta_{zj}(y, \beta, t) J_0(\rho\beta) d\beta$$

$$(1.5) \quad -\frac{2G_j}{a} w_j = \int_0^{\infty} \Delta_{wj}(y, \beta, t) J_0(\rho\beta) d\beta$$

$$(1.6) \quad \Delta_{mj}(y, \beta, t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty} \bar{p}^*(\beta, s) s^{-1} e^{st} \Delta_{mj}^*(y, \beta, s) ds \quad (m = z, w)$$

Здесь $\Delta_{mj}^*(y, \beta, s)$ ($m = z, w$) выражаются через произвольную вектор-функцию $B_j(\beta, s) = [a_j(\beta, s), b_j(\beta, s), c_j(\beta, s), d_j(\beta, s), f_j(\beta, s), g_j(\beta, s)]$, соответствующую j -му слою. Аналогичными формулами через $\Delta_{mj}^*(y, \beta, s)$ ($m = r, \theta, rz, u, \sigma$) представляются остальные напряжения $\sigma_{rj}, \sigma_{\theta j}, \tau_{rzj}$, радиальные перемещения u_j и давление в порах σ_j . При этом следует иметь в виду, что давящие напряжения считаются положительными, как это принято в теории грунтов, в отличие от теории упругости.

От общего решения контактной задачи вида (1.4), (1.5) требуется, чтобы оно удовлетворяло условиям на внешней граничной плоскости в случае ее полной проницаемости (или непроницаемости) для поровой жидкости и условиям совместности деформаций соседних скрепленных слоев на их граничных плоскостях

$$(1.7) \quad \sigma_{z1} = p(\rho, t), \quad \tau_{rz1} = 0, \quad \sigma_1 = 0 \quad (\text{или } \partial\sigma_1/\partial z = 0) \quad \text{при } y = 1$$

$$(1.8) \quad \sigma_{zj} = \sigma_{zj+1}, \quad \tau_{rzj} = \tau_{rzj+1}, \quad \sigma_j = \sigma_{j+1}$$

$$u_j = u_{j+1}, \quad w_j = w_{j+1}, \quad \kappa_j \frac{\partial\sigma_j}{\partial z} = \frac{\partial\sigma_{j+1}}{\partial z} \quad \text{при } y = y_j$$

Как показано в [1], условия (1.7), (1.8) сводятся к матричной системе из $6N + 3$ функциональных уравнений для определения век-

ной плоскости $y = 1$ выражается через произведение

$$(1.10) \quad \Delta_{w_1}^* (1, \beta, s) = D (\beta, s) B_1 (\beta, s)$$

вектора-строки

$$D (\beta, s) = (1, q_1, 1 - \beta\lambda, -e_1, -q_1 e_1^*, (\beta\lambda + 1)e_1)$$

на вектор-столбец $B_1 (\beta, s)$, определяемый из системы (1.9). Как установлено в [1], функция (1.10) при $\beta \rightarrow \infty$ имеет следующую асимптотику:

$$(1.11) \quad \Delta_{w_1}^* (1, \beta, s) = 2(1 - v_1) + \frac{\gamma s}{\beta^2} + O\left(\frac{s^2}{\beta^2}\right) + o(\beta^m e^{-\alpha\beta})$$

$$(m, \gamma, \alpha = \text{const} > 0)$$

Повторная трансформанта Лапласа — Карсона и Ханкеля $\bar{p}^* (\beta, s)$ от функции интенсивности давления штампа $p (\rho, t)$ на площадке контакта, входящая в формулы (1.4), (1.5), и аналогичные формулы для остальных компонент общего решения для j -го слоя, подлежит определению из смешанных краевых условий контактной задачи на внешней граничной плоскости.

2. Построение решения контактной задачи. Рассмотрим контактную задачу при следующих краевых условиях на граничной плоскости $y = 1$ многослойного полупространства. На площадке контакта штампа с плоским основанием и многослойного полупространства задаются осевые перемещения, а вне площадки контакта — нулевые осевые напряжения

$$(2.1) \quad -\frac{2G_1}{a} w_1 (y, \rho, t) |_{y=1} = h(t), \quad 0 \leq \rho \leq 1$$

$$(2.2) \quad \sigma_{z1} (y, \rho, t) |_{y=1} = 0, \quad 1 < \rho < \infty$$

Кроме того, предполагается, что внешняя граничная плоскость полностью проницаема или непроницаема для поровой жидкости и свободна от касательных напряжений. Эти условия задаются вторым и третьим равенствами (1.7), и, следовательно, уже учтены при построении общего решения задачи.

Подставляя в равенства (2.1) и (2.2) представления функций $w_1 (y, \rho, t)$ и $\sigma_{z1} (y, \rho, t)$ по формулам (1.4), (1.5) с учетом (1.6) и $\Delta_{z1}^* (1, \beta, s) = 1$, получим парные интегральные уравнения относительно $\bar{p}^* (\beta, s)$

$$\int_0^{\infty} \left\{ \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty} \bar{p}^* (\beta, s) \Delta_{w_1}^* (1, \beta, s) e^{st} \frac{ds}{s} \right\} J_0 (\rho\beta) d\beta = h(t), \quad 0 \leq \rho \leq 1$$

$$\int_0^{\infty} \left\{ \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty} \bar{p}^* (\beta, s) e^{st} \frac{ds}{s} \right\} \beta J_0 (\rho\beta) d\beta = 0, \quad 1 < \rho < \infty$$

Переставим в этих уравнениях порядки интегрирования и преобразуем их по Лапласу — Карсону; в результате получим

$$(2.3) \quad \int_0^{\infty} \bar{p}^* (\beta, s) \Delta_{w_1}^* (1, \beta, s) J_0 (\rho\beta) d\beta = h^* (s), \quad 0 \leq \rho \leq 1$$

$$(2.4) \quad \int_0^{\infty} \beta \bar{p}^* (\beta, s) J_0 (\rho\beta) d\beta = 0, \quad 1 < \rho < \infty$$

Вычитая из функции $\Delta_{w_1}^*(1, \beta, s)$ ее главный член $2(1 - \nu_1)$ при $\beta \rightarrow \infty$, определенный формулой (1.11), получим новую функцию

$$(2.5) \quad \Delta_w^*(\beta, s) = \Delta_{w_1}^*(1, \beta, s) - 2(1 - \nu_1)$$

Из уравнения (2.3) по формуле обращения Ханкеля с учетом (1.2) и (1.3) следует, что $\bar{p}^*(\beta, s)$ определяется интегралом

$$(2.6) \quad \bar{p}^*(\beta, s) = \int_0^1 \rho p^*(\rho, s) J_0(\rho\beta) d\rho$$

где $p^*(\rho, s)$ — трансформанта Лапласа — Карсона от искомой функции интенсивности давления штампа $p(\rho, t)$. Функция (2.6) обращает уравнение (2.4) в тождество.

Считая переменную s параметром, интегральное уравнение (2.3) с учетом представлений (2.5), (2.6) известными методами Нобла [11] или Лебедева — Уфлянда [12], аналогично тому, как это сделано в [3], сводим к интегральному уравнению Фредгольма второго рода для новой неизвестной функции $\varphi^*(x, s)$

$$(2.7) \quad \pi(1 - \nu_1)\varphi^*(x, s) + \int_0^1 K(x, z, s)\varphi^*(z, s) dz = h^*(s), \quad 0 \leq x \leq 1$$

которое при любом s имеет в квадрате $0 \leq x, z \leq 1$ непрерывное симметричное ядро

$$(2.8) \quad K(x, z, s) = \int_0^\infty \Delta_w^*(\beta, s) \cos(x\beta) \cos(z\beta) d\beta$$

Асимптотическая формула (1.11) с учетом (2.5) обеспечивает, очевидно, равномерную сходимость интеграла (2.8) в квадрате $0 \leq x, z \leq 1$ к функции $K(x, z, s)$ при любом s .

Трансформанта Лапласа — Карсона и повторная трансформанта Лапласа — Карсона и Ханкеля от искомой функции интенсивности давления штампа $p(\rho, t)$ выражаются через $\varphi^*(x, s)$ по формулам

$$(2.9) \quad p^*(\rho, s) = -\frac{1}{\rho} \frac{d}{d\rho} \int_0^1 \frac{x\varphi^*(x, s)}{\sqrt{x^2 - \rho^2}} dx$$

$$(2.10) \quad \bar{p}^*(\beta, s) = \int_0^1 \varphi^*(x, s) \cos(x\beta) dx$$

Выразим теперь через $\varphi^*(x, s)$ величину приложенной к штампу силы

$$(2.11) \quad P(t) = 2\pi a^2 \int_0^1 \rho p(\rho, t) d\rho$$

Для этого преобразуем равенство (2.11) по Лапласу — Карсону, в результате получим, учитывая формулу (2.9)

$$(2.12) \quad P^*(s) = 2\pi a^2 \int_0^1 \varphi^*(x, s) dx$$

Представим решение интегрального уравнения (2.7) в форме

$$(2.13) \quad \varphi^*(x, s) = h^*(s)\varphi_1^*(x, s)$$

где функция $\varphi_1^*(x, s)$ удовлетворяет уравнению (2.7) при $h^*(s) = 1$. Тогда формула (2.12) переписется в виде

$$(2.14) \quad P^*(s) = 2\pi a^2 h^*(s) \int_0^1 \varphi_1^*(x, s) dx$$

Равенство (2.14) в пространстве изображений Лапласа — Карсона устанавливает связь между силой $P(t)$, приложенной к штампу, и глубиной его погружения $h(t)$.

Перепишем равенство (2.14) в иной форме и перейдем в пространство оригиналов

$$(2.15) \quad a^2 h^*(s) = P^*(s) h_1^*(s), \quad h_1^*(s) = \left[2\pi \int_0^1 \varphi_1^*(x, s) dx \right]^{-1}$$

$$(2.16) \quad a^2 h(t) = L^{-1} [P^*(s) h_1^*(s)]$$

Проведем дифференцирование в формуле (2.9) и после этого учтем (2.13) и (2.15), в результате получим

$$(2.17) \quad a^2 p^*(\rho, s) = P^*(s) p_1^*(\rho, s)$$

$$p_1^*(\rho, s) = h_1^*(s) \left\{ \frac{\varphi_1^*(1, s)}{\sqrt{1-\rho^2}} - \int_0^1 \frac{\partial \varphi_1^*(x, s)}{\partial x} \frac{dx}{\sqrt{x^2-\rho^2}} \right\}$$

$$(2.18) \quad a^2 p(\rho, t) = L^{-1} [P^*(s) p_1^*(\rho, s)]$$

В случае постоянной силы P можно вынести $P^*(s) = P = \text{const}$ из-под знака оператора L^{-1} .

3. Методы вычислений и результаты численного решения контактной задачи в случае постоянной силы. Основными искомыми компонентами задачи о консолидации многослойного полупространства при вдавливании кругового штампа постоянной силой P являются функция осадки штампа $h_1(t) = -2G_1 a w_1(1, \rho, t) / P$, зависящая от времени, и интенсивность давления штампа $p_1(\rho, t) = a^2 p(\rho, t) / P$ на площадке $0 \leq \rho \leq 1$, изменяющаяся вдоль радиуса и зависящая от времени. Для вычисления функций $h_1(t)$ и $p_1(\rho, t)$ в общем случае многослойного полупространства составлена программа на языке АЛГОЛ. Остановимся кратко на методах вычислений, используемых при реализации численных решений контактной задачи.

В общем случае функция $\Delta_w^*(\beta, s)$, входящая в формулу (2.8) для ядра интегрального уравнения (2.7), выражается через решение системы (1.9) высокого порядка.

В случае однородного полупространства функция $\Delta_w^*(\beta, s)$ выражается простой формулой; например, при полностью проницаемой внешней поверхности она имеет вид [1]

$$\Delta_w^*(\beta, s) = b (s + \beta b)^{-1} [(1 - \nu) \sqrt{s/c + \beta^2} - \nu \beta] - 1 + 2\nu$$

$$b = c\beta (1 - 2\nu) (1 - \nu)^{-2}$$

Для двухслойного полупространства при $N = 1$ система (1.9), содержащая при фиксированных β и s девять алгебраических уравнений, эффективно решается методом

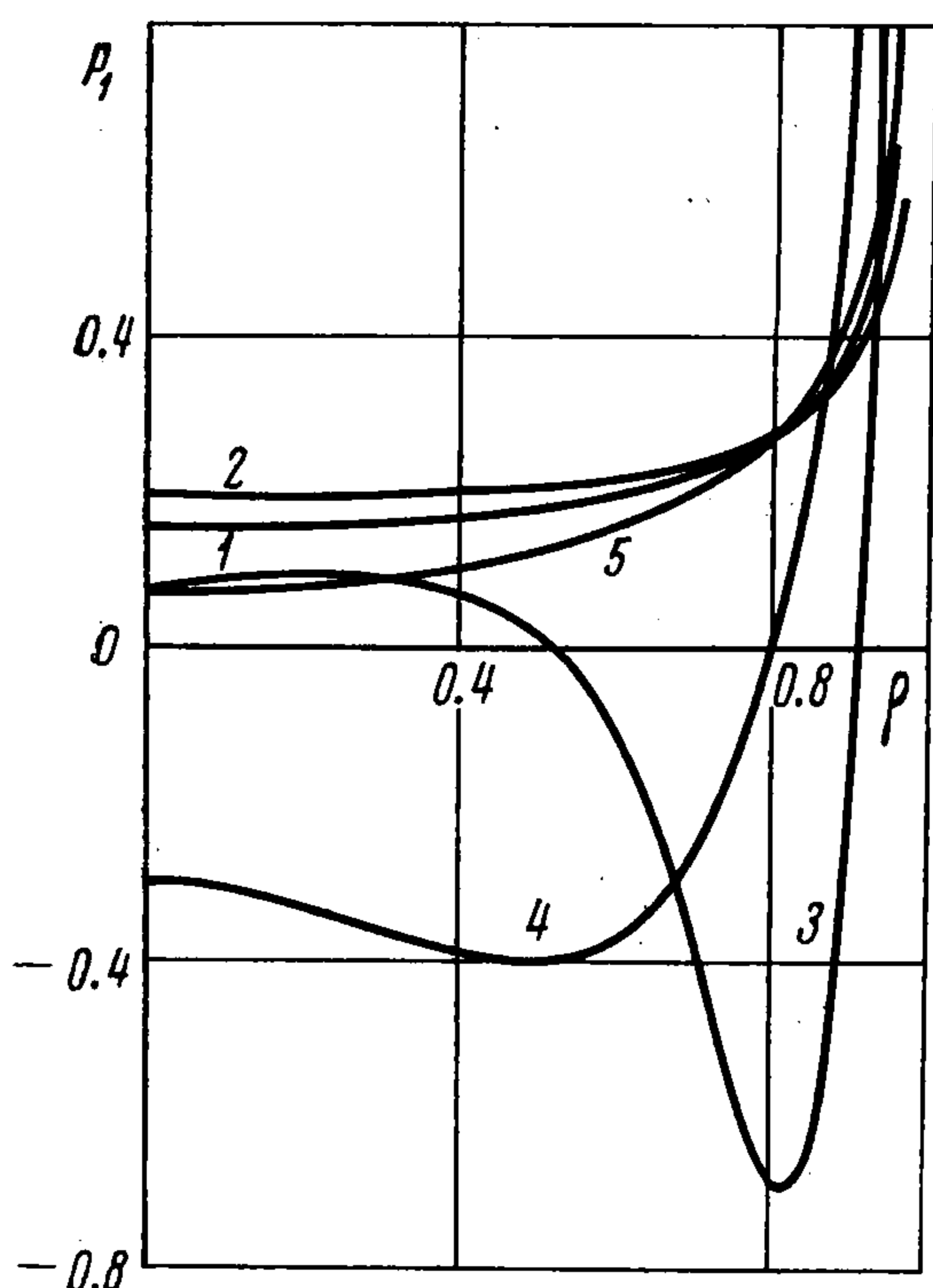
сводится к вычислению по формулам (3.7) матрицы $\Omega_N [6 \times 6]$ и первых столбцов матриц $F [3 \times 3]$ и $G_1 [6 \times 3]$, что представляет быстродействующий и удобный алгоритм для ЭВМ, экономичный по использованию ее оперативной памяти. Для сопоставления отметим, что вычисление вектора $B_1(\beta, s)$ с помощью метода Гаусса требует в N^2 раз больше операций и ячеек памяти ЭВМ.

Интегральное уравнение (2.7) при $h^*(s) \equiv 1$ преобразуется к интегральному уравнению на отрезке $-1 \leq x \leq 1$ с ядром

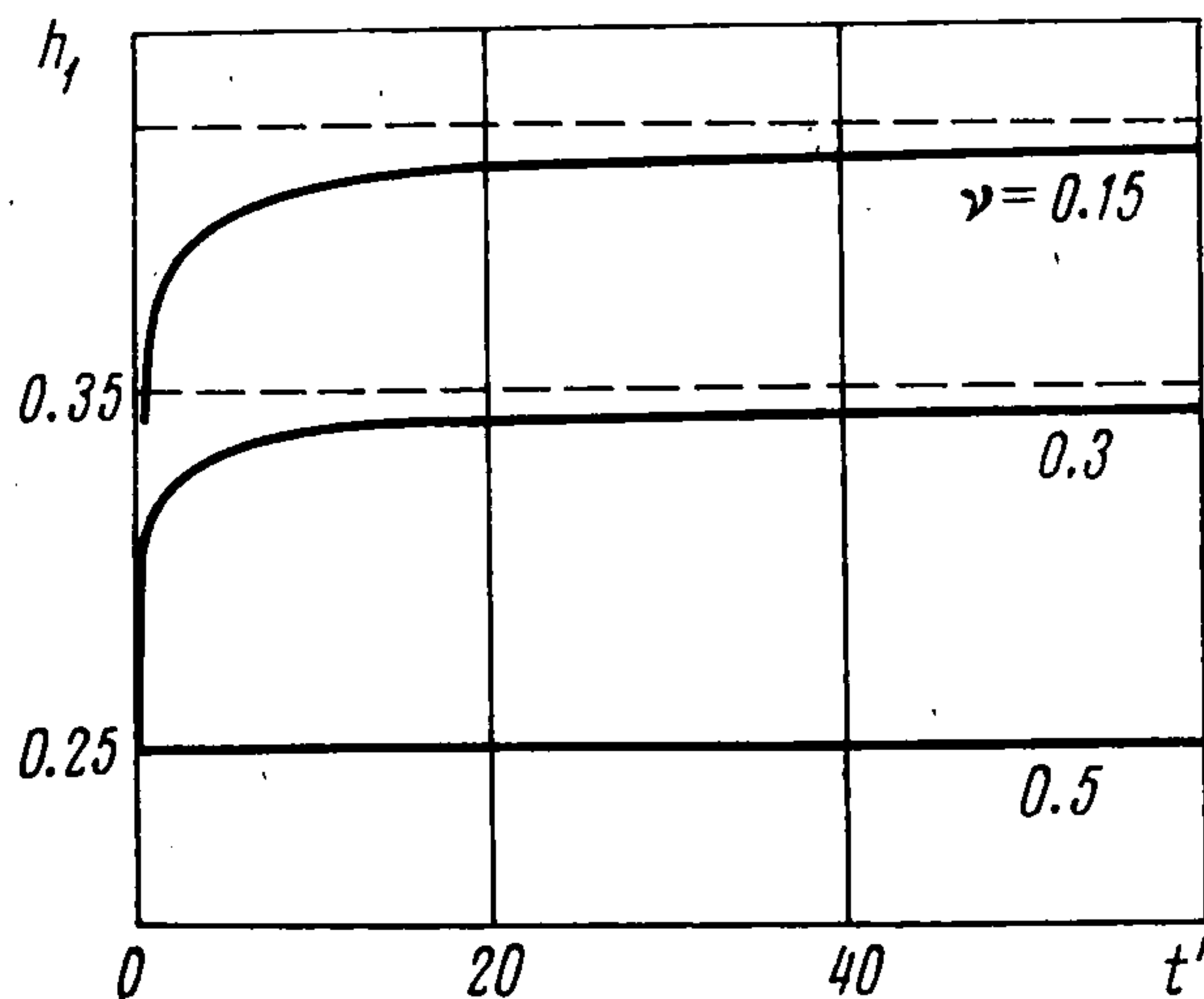
$$(3.8) \quad K(x-z, s) = \int_0^\infty \Delta_w^*(\beta, s) \cos[(x-z)\beta] d\beta$$

Преобразованное интегральное уравнение решается путем замены интеграла по формуле касательных, в результате чего получается система линейных алгебраических уравнений n -го порядка ($n = 100 \div 1000$) с треплицевой матрицей. Элементы этой матрицы вычисляются по формуле (3.8) методом Филона. Решение алгебраической системы

получается с точностью порядка h^2 ($h = 2/(n+1)$) в точках $-1 + h/2, -1 + 3h/2, \dots, 0, \dots, 1 - 3h/2, 1 - h/2$ по модифицированному экономичному методу [15]. После решения системы с уменьшенным в два



Фиг. 2



Фиг. 3

раза шагом проводится уточнение решения интегрального уравнения по методу Рунге, после чего погрешность решения имеет порядок h^4 . Подробнее эти вопросы рассмотрены в работе [16].

Численные значения $\varphi_1^*(x, s)$, полученные в результате решения систем с шагом h и $h/2$, используются для вычисления по формуле трапеций интеграла (2.15) для $h_1^*(s)$. Затем производится уточнение по Рунге.

Для вычисления $p_1^*(\rho, s)$ по формуле (2.17) значение $\varphi_1^*(1, s)$ получается из интегрального уравнения при $x = 1$. Интеграл из (2.17) преобразуется к виду

$$(3.9) \quad \int_0^{1-\rho} \frac{\psi(x, s)}{\sqrt{x}} dx, \quad \psi(x, s) = \frac{1}{\sqrt{x+2\rho}} \frac{\partial}{\partial x} \varphi_1^*(x+\rho, s)$$

Значения $\partial \varphi_1^*(x, s) / \partial x$ вычисляются сначала по значениям $\varphi_1^*(x - h/2, s)$ и $\varphi_1^*(x + h/2, s)$ с точностью порядка h^2 , затем уточняются по Рунге. Интеграл (3.9) вычисляется по формуле Котеса для трех точек с весом $1/\sqrt{x}$. При этом результат получается с точностью порядка $h^2 \sqrt{h}$.

Обратное преобразование Лапласа — Карсона для получения $h_1(t)$ (2.16) и $p_1(\rho, t)$ (2.18) проводится с помощью многочленов Лагранжа [13, 17]. Для этого необходимо знать

значения $h_1^*(s)$ (2.15) и $p_1^*(\rho, s)$ (2.17) в точках действительной оси $s_0, 2s_0, \dots, ms_0$ ($m = 3 \div 11$), где s_0 выбирается так, чтобы интервал изменения времени $t = T / s_0$ ($0.05 \leq T \leq 2.5$) соответствовал отрезку времени, на котором необходимо получить решение. Указанный в скобках интервал изменения T выбран из соображений получения решения контактной задачи с необходимой для практики точностью. Для значений T вне этого интервала возникают большие ошибки. Наконец, отметим, что вычисления можно проводить одновременно для многих значений времени t без заметного увеличения машинного времени.

Решение задачи о консолидации многослойного полупространства под действием штампа при $t = \infty$ совпадает с решением соответствующей задачи теории упругости, а при $t = 0$ — с решением задачи теории упругости при $\nu_j = 0.5$ ($j = 1, 2, \dots, N + 1$) и прежних значениях G_j и χ_j и других параметров [1]. В случае однородного полупространства интенсивность давления штампа $p_1(\rho, t)$ при $t = 0$ и $t = \infty$ выражается общей формулой $p_1(\rho, t) = 1 / 2\pi \sqrt{1 - \rho^2}$. На фиг. 2 представлены функции $p_1(\rho, t)$ для однородного полупространства при $t = 0$ и $t = \infty$ (кривая 1) и при $t' = 0.05$; $\nu = 0.15$ (кривая 2), а на фиг. 3 — зависимость осадки штампа от времени $h_1(ct / a^2)$ при $\nu = 0.15, 0.3, 0.5$. На фиг. 2 даны также функции $p_1(\rho, t)$ в случае двухслойного полупространства с параметрами $\nu_1 = \nu_2 = 0.3$, $\chi_1 = 100$ при $t = \infty$ для значений $\lambda = H_0 / a = 0.2, 0.5, 2$ (соответственно кривые 3, 4, 5). (Для других значений времени $t > 0$ результаты мало отличаются от приведенных здесь.)

Поступила 27 II 1976

ЛИТЕРАТУРА

1. Парийский Б. С., Никишин В. С. Осесимметричная задача о консолидации многослойных сред. М., ВЦ АН СССР, 1976.
2. Никишин В. С., Шапиро Г. С. Пространственные задачи теории упругости для многослойных сред. М., ВЦ АН СССР, 1970.
3. Никишин В. С., Шапиро Г. С. О контактных задачах для упругих многослойных сред. Тр. симпозиума по механике сплошной среды и родственным проблемам анализа. Тбилиси, 1971, т. 1. Тбилиси, «Мецниереба», 1973.
4. Biot M. A. General theory of three-dimensional consolidation. J. Appl. Phys., 1941, vol. 12, No. 2.
5. Biot M. A. General solutions of the equations of elasticity and consolidation for a porous material. J. Appl. Mech., 1956, vol. 23, No. 1.
6. Mc Namee J., Gibson R. E. Displacement functions and linear transforms applied to diffusion through porous elastic media. Quart. J. Mech. and Appl. Math., 1960, vol. 13, pt. 1.
7. Mc Namee J., Gibson R. E. Plane strain and axially symmetric problems of the consolidation of a semi-infinite clay stratum. Quart. J. Mech. and Appl. Math., 1960, vol. 13, pt. 2.
8. Szeer G., Gaszyński J. Axisymmetric punch problem under condition of consolidation. Arch. Mech., 1975, vol. 27, No. 3.
9. Партон В. С., Кудрявцев Б. А. Контактная задача механики деформации пористых вязкоупругих сред. В сб.: Проблемы механики твердого деформированного тела. Л., «Судостроение», 1970.
10. Керцман В. И. Контактная задача теории консолидации водонасыщенной среды. Изв. АН СССР. МТТ, 1974, № 3.
11. Noble B. Certain dual integral equations. J. Math. and Phys., 1958, vol. 37, No. 2.
12. Уфлянд Я. С. Интегральные преобразования в задачах теории упругости. Л., «Наука», 1967.
13. Ланцош К. Практические методы прикладного анализа. М., Физматгиз, 1961.
14. Фаддеев Д. К., Фаддеева В. Н. Вычислительные методы линейной алгебры. М.—Л., Физматгиз, 1963.
15. Justice J. H. An algorithm for inverting positive definite Toeplitz matrices. SIAM J. Appl. Math., 1972, vol. 23, No. 3.
16. Парийский Б. С. Экономичные методы численного решения уравнений в свертках и систем алгебраических уравнений с теплицевыми матрицами. М., ВЦ АН СССР, 1976.
17. Крылов В. И., Скобля Н. С. Справочная книга по численному обращению преобразования Лапласа. Минск, «Наука и техника», 1968.