

ДИФРАКЦИЯ СФЕРИЧЕСКОЙ УПРУГОЙ ВОЛНЫ НА КЛИНЕ

В. Б. Поручиков

(Москва)

Рассматривается пространственная нестационарная задача о дифракции сферической упругой волны на гладком твердом клине произвольного угла раствора. Методом интегральных преобразований с выделением особенностей в окрестности ребра получено точное аналитическое решение в виде суммы двух слагаемых: известного акустического решения и добавочной части, описывающей влияние упругости и вызванной появлением дополнительных дифракционных продольной и поперечной волн. Это последнее слагаемое существенным образом отличает упругое решение от акустического. Подробно исследуется частный случай падающей волны, имеющей на фронте скачок напряжений.

Соответствующая акустическая задача рассматривалась в работах [1-4], причем решение в элементарных функциях впервые получено в [2]. В упругом случае для клина известно только решение задачи о дифракции плоской волны [5]. Ранее найденные решения плоских задач дифракции на гладком клине [6] и гладкой полуплоскости [7], совпадающие с решениями соответствующих акустических задач, неверны из-за пренебрежения условием на ребре, что и привело к неинтегрируемым напряжениям в окрестности ребра.

1. Рассмотрим упругую среду со скоростями распространения продольных и поперечных волн a и b , заполняющую область $r > 0$, $0 < \theta < \pi/l$, $-\infty < z < \infty$ и граничащую с клином ($\pi/l < \theta < 2\pi$), на щеках которого $\theta = 0$, $\theta = \pi/l$ заданы условия: $v_\theta = 0$, $\sigma_{\theta r} = \sigma_{\theta z} = 0$, где r , θ , z — цилиндрические координаты (ось z совпадает с ребром клина), v_θ — компонента вектора смещения, $\sigma_{\theta r}$, $\sigma_{\theta z}$ — компоненты тензора напряжений. В момент $\tau = -r_0$ ($\tau = at$, t — время, $r_0 > 0$) в точке $(r_0, \theta_0, 0)$ начинает действовать источник сферической упругой продольной волны с потенциалом [8]

$$(1.1) \quad \varphi_0 = f(\tau + r_0 - R)/R, \quad R = [z^2 + r^2 + r_0^2 - 2rr_0 \cos(\theta - \theta_0)]^{1/2}$$

фронт которой достигает поверхности клина в момент τ_* ($-r_0 < \tau_* \leq 0$), $f(\tau)$ — произвольная функция, удовлетворяющая условиям применения преобразования Лапласа и $f(\tau) \equiv 0$ при $\tau < 0$. Клин вносит в поле смещений падающей волны возмущение $u \equiv \{u_r, u_\theta, u_z\}$, описываемое продольным φ и двумя скалярными поперечными ψ_1, ψ_2 потенциалами по формулам [8]

$$(1.2) \quad u_r = \frac{\partial \varphi}{\partial r} + \frac{\partial \psi_1}{r \partial \theta} + \frac{\partial^2 \psi_2}{\partial r \partial z}, \quad u_\theta = \frac{\partial \varphi}{r \partial \theta} - \frac{\partial \psi_1}{\partial r} + \frac{\partial^2 \psi_2}{r \partial \theta \partial z}$$

$$u_z = \frac{\partial \varphi}{\partial z} - \frac{\partial^2 \psi_2}{r^2 \partial \theta^2} - \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial \psi_2}{\partial r} \right)$$

При этом, как можно проверить, граничные условия на клине будут удовлетворены, если потребовать выполнения условий: $\partial\varphi/\partial\theta = -\partial\varphi_0/\partial\theta$, $\psi_1 = 0$ и $\partial\psi_2/\partial\theta = 0$ при $\theta = 0, \pi/l$. В результате, учитывая, что до момента $\tau = \tau_*$ возмущения не возникают, получаем следующие три системы уравнений, граничных и начальных условий для определения φ , ψ_1 и ψ_2 :

$$(1.3) \quad \Delta\varphi = \partial^2\varphi/\partial\tau^2 \quad (\Delta \equiv \partial^2/\partial r^2 + r^{-1}\partial/\partial r + r^{-2}\partial^2/\partial\theta^2 + \partial^2/\partial z^2)$$

$$\partial\varphi/\partial\theta = -\partial\varphi_0/\partial\theta \quad \text{при } \theta = 0, \pi/l, \quad \varphi = 0 \quad \text{при } \tau < \tau_*$$

$$(1.4) \quad \Delta\psi_j = \gamma^2\partial^2\psi_j/\partial\tau^2 \quad (\gamma = a/b > 1, j = 1, 2)$$

$$\psi_1 = \partial\psi_2/\partial\theta = 0 \quad \text{при } \theta = 0, \pi/l, \quad \psi_j = 0 \quad \text{при } \tau < \tau_*$$

Эти три системы взаимно связаны следующим условием¹ на ребре клина:

$$(1.5) \quad u = \text{const} + O(r^\varepsilon), \quad \varepsilon > 0 \quad \text{при } r \rightarrow 0$$

обеспечивающим интегрируемость напряжений (при $r \rightarrow 0$) и единственность решения поставленной задачи. Предполагается, что условие (1.5) выполняется равномерно по τ, θ, z . Кроме того, при решении задачи считаем, что $1/2 \leq l < 1$, так как решение для $l \geq 1$, как будет показано ниже, может быть получено из симметричной (относительно биссектральной плоскости клина) части решения, найденного для $1/2 \leq l < 1$.

2. Применяя к (1.3), (1.4) последовательно двусторонние преобразования Лапласа по τ и z , а затем разлагая на отрезке $[0, \pi/l]$ изображения искомых потенциалов $\bar{\varphi}^*(p, r, \theta, s)$ и $\bar{\psi}_2^*(p, r, \theta, s)$ в ряды по косинусам, а $\bar{\psi}_1^*(p, r, \theta, s)$ — по синусам, получаем для определения коэффициентов этих разложений следующие обыкновенные дифференциальные уравнения второго порядка:

$$(2.1) \quad \frac{d^2a_n}{dr^2} + \frac{da_n}{rdr} - \frac{n^2l^2a_n}{r^2} = \omega^2a_n + f_n(r)$$

$$(2.2) \quad \frac{d^2b_{nj}}{dr^2} + \frac{db_{nj}}{rdr} - \frac{n^2l^2b_{nj}}{r^2} = \kappa^2b_{nj} \quad (j = 1, 2)$$

$$\bar{\varphi}^*(p, r, \theta, s) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nl\theta, \quad a_n = 2\pi^{-1}l \int_0^{\pi/l} \bar{\varphi}^* \cos nl\theta d\theta$$

($n = 0, 1, 2, \dots$)

$$\bar{\psi}_1^*(p, r, \theta, s) = \sum_{n=1}^{\infty} b_{n1} \sin nl\theta, \quad b_{n1} = 2\pi^{-1}l \int_0^{\pi/l} \bar{\psi}_1^* \sin nl\theta d\theta$$

($n = 1, 2, 3, \dots$)

$$\bar{\psi}_2^*(p, r, \theta, s) = \frac{b_{02}}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} b_{n2} \cos nl\theta, \quad b_{n2} = 2\pi^{-1}l \int_0^{\pi/l} \bar{\psi}_2^* \cos nl\theta d\theta$$

($n = 0, 1, 2, \dots$)

¹ См. Костров Б. В. Некоторые динамические задачи математической теории упругости. Канд. дисс., МГУ, 1964.

$$\bar{\varphi}^*(p, r, \theta, s) = (2\pi i)^{-1} \int_{-\infty}^{\infty} \bar{\varphi}(p, r, \theta, z) e^{-sz} dz$$

$$\bar{\varphi}(p, r, \theta, z) = (2\pi i)^{-1} \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(\tau, r, \theta, z) e^{-p\tau} d\tau$$

$$\bar{\psi}_j^*(p, r, \theta, s) = (2\pi i)^{-1} \int_{-\infty}^{\infty} \bar{\psi}_j(p, r, \theta, z) e^{-sz} dz$$

$$\bar{\psi}_j(p, r, \theta, z) = (2\pi i)^{-1} \int_{-\infty}^{\infty} \psi_j(\tau, r, \theta, z) e^{-p\tau} d\tau$$

$$f_n(r) = \frac{2l}{\pi r^2} \left[(-1)^n \frac{\partial \bar{\varphi}_0^*}{\partial \theta} \Big|_{\theta=\pi/l} - \frac{\partial \bar{\varphi}_0^*}{\partial \theta} \Big|_{\theta=0} \right], \quad \operatorname{Re} p > 0$$

$$|\operatorname{Re} s| < \operatorname{Re} p, \quad \omega = (p^2 - s^2)^{1/2}, \quad \kappa = (\gamma^2 p^2 - s^2)^{1/2}$$

$$\bar{\varphi}_0^*(p, r, \theta, s) = \bar{f}(p) e^{pr_0} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-sz - pR} R^{-1} dz = 2\bar{f}(p) e^{pr_0} K_0(\rho\omega)$$

$$f(\tau) = \bar{f}(p), \quad \rho = [r^2 + r_0^2 - 2rr_0 \cos(\theta - \theta_0)]^{1/2}$$

Здесь $K_\alpha(s)$ — функция Макдональда порядка α от аргумента s . (Неравенство $\operatorname{Re} p > 0$ следует из того факта, что интегрирование по τ в двустороннем преобразовании Лапласа происходит при $\tau > -r_0$, так как при $\tau < -r_0$ источник не действует.) Для выделения ветвей функций ω и κ в плоскости s проведены разрезы от точек $s = \pm p$ (для κ от точек $s = \pm \gamma p$) до бесконечности вдоль лучей $\arg s = \arg p$ и $\arg s = \pi + \arg p$, и ветви ω и κ выбраны так, что $\omega = p$ и $\kappa = \gamma p$ при $s = 0$. Тогда видно, что $\operatorname{Re} \omega > 0$, $\operatorname{Re} \kappa > 0$ при $|\operatorname{Re} s| < \operatorname{Re} p$. Решая (2.1), (2.2), получаем

$$(2.3) \quad a_n = A_n K_{nl}(r\omega) + B_n I_{nl}(r\omega) + F_n(r)$$

$$F_n(r) = -K_{nl}(r\omega) \int_0^r I_{nl}(x\omega) f_n(x) x dx - I_{nl}(r\omega) \int_r^\infty K_{nl}(x\omega) f_n(x) x dx$$

$$(2.4) \quad b_{nj} = C_{nj} K_{nl}(r\kappa) + D_{nj} I_{nl}(r\kappa) \quad (j=1, 2)$$

Здесь $I_\alpha(s)$ — модифицированная функция Бесселя первого рода порядка α . Используя асимптотические выражения цилиндрических функций

$$K_\alpha(s) \sim [\pi / (2s)]^{1/2} e^{-s}, \quad I_\alpha(s) \sim (2\pi s)^{-1/2} e^s, \quad |s| \rightarrow \infty,$$

$$|\arg s| < \pi / 2$$

находим, что $F_n(r) \rightarrow 0$ при $r \rightarrow \infty$. Так как возмущения распространяются с конечной скоростью, то предположим, что $|\bar{\varphi}| < CR^{-1} |e^{-pR}|$, $|\bar{\psi}_j| < CR^{-1} |e^{-pR}|$ при $R \rightarrow \infty$, где C не зависит от r, θ, z . Отсюда получаем, что $a_n \rightarrow 0$, $b_{nj} \rightarrow 0$ при $r \rightarrow \infty$. Тогда из (2.3) и (2.4) находим: $B_n \equiv D_{nj} \equiv 0$. Для определения оставшихся коэффициентов A_n и C_{nj} используем условие (1.5), предполагая, что оно сохраняется и для коэффициентов

\bar{u}_{rn}^* и \bar{u}_{zn}^* разложения по косинусам изображений \bar{u}_r^* и \bar{u}_z^* и коэффициентов $\bar{u}_{\theta n}^*$ разложения изображения \bar{u}_θ^* в ряд по синусам
 $\bar{u}_{rn}^* = \text{const} + O(r^\varepsilon)$, $\bar{u}_{zn}^* = \text{const} + O(r^\varepsilon)$, $\bar{u}_{\theta n}^* = \text{const} + O(r^\varepsilon)$

$$(2.5) \quad \bar{u}_{rn}^* = 2l\pi^{-1} \int_0^{\pi/l} \bar{u}_r^* \cos nl\theta d\theta, \quad \bar{u}_{zn}^* = 2l\pi^{-1} \int_0^{\pi/l} \bar{u}_z^* \cos nl\theta d\theta$$

($n = 0, 1, 2, \dots$)

$$\bar{u}_{\theta n}^* = 2l\pi^{-1} \int_0^{\pi/l} \bar{u}_\theta^* \sin nl\theta d\theta \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

$$\bar{u}_k^* = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-sz} dz \int_{-\infty}^{\infty} u_k e^{-p\tau} d\tau \quad (k = r, \theta, z)$$

($\varepsilon > 0$, $r \rightarrow 0$)

Используя выражения (1.2) в оценках (2.5), получаем при $r \rightarrow 0$ для каждого n ($n = 0, 1, 2, \dots$) систему трех уравнений

$$(2.6) \quad \begin{aligned} da_n / dr + r^{-1}nlb_{n1} + sdb_{n2} / dr &= \text{const} + O(r^\varepsilon) \\ sa_n - \kappa^2 b_{n2} &= \text{const} + O(r^\varepsilon) \quad (\varepsilon > 0) \\ -nlr^{-1}a_n - db_{n1} / dr - r^{-1}sb_{n2}nl &= \text{const} + O(r^\varepsilon) \end{aligned}$$

из которой и следует найти коэффициенты A_n и C_{nj} , входящие в выражения (2.3) и (2.4) для a_n и b_{nj} (при $n = 0$ система трех уравнений вырождается в систему двух уравнений для a_0 и b_{02} , ибо $b_{01} = 0$). Для определения A_n и C_{nj} используем асимптотические выражения цилиндрических функций $I_\alpha(s)$ и $K_\alpha(s)$ при $s \rightarrow 0$

$$(2.7) \quad \begin{aligned} I_\alpha(s) &= (s/2)^\alpha / \Gamma(1 + \alpha) + O(s^{2+\alpha}) \\ K_0(s) &= -\ln s + O(1), \quad K_1(s) = s^{-1} + O(s \ln s) \\ 2K_\alpha(s) &= \Gamma(\alpha)(2/s)^\alpha + \begin{cases} \Gamma(-\alpha)(s/2)^\alpha + O(s^{2-\alpha}), & 0 < \alpha < 1 \\ O(s^{2-\alpha}), & \alpha > 1 \end{cases} \end{aligned}$$

С помощью выражений (2.7) можно показать, что выполняются следующие асимптотические оценки для $F_n(r)$ при $r \rightarrow 0$:

$$(2.8) \quad \begin{aligned} F_0(r) &= \text{const} + O(r), \quad F_1(r) = Mr^2 + O(r) \\ M &= -[(\omega/2)^l / \Gamma(1+l)] \int_0^\infty K_l(x\omega) f_1(x) x dx = \\ &= 8\bar{f}(p) [e^{pr_0} / \Gamma(l)] K_l(r_0\omega) (\omega/2)^l \cos l\theta_0 \\ F_n(r) &= O(r), \quad n \geq 2 \end{aligned}$$

(в частности, при $l = 1/2$ имеем $F_{2n}(r) \equiv 0$, так как в этом случае $f_{2n}(r) \equiv 0$).

Подставляя (2.3) и (2.4) в (2.6) и используя асимптотические оценки (2.7) и (2.8), можно заметить, что при $n = 0$ и $n \geq 2$ условия (2.6) будут выполнены, если положить $A_n \equiv C_{nj} \equiv 0$. В случае $n = 1$ получаем из (2.6)

следующую систему:

$$(2.9) \quad \begin{aligned} Sr^{-l-1} + Tr^{l-1} + O(1) &= \text{const} + O(r^\varepsilon), \quad Wr^{-l} + O(r^l) = \\ &= \text{const} + O(r^\varepsilon) \\ Sr^{-l-1} - Tr^{l-1} + O(1) &= \text{const} + O(r^\varepsilon) \quad (\varepsilon > 0) \\ S &= -2^{l-1} \Gamma(1+l) [A_1 \omega^{-l} - C_{11} \kappa^{-l} + s C_{12} \kappa^{-l}] \\ T &= Ml - 2^{l-1} \Gamma(1-l) [A_1 \omega^l + C_{11} \kappa^l + s \kappa^l C_{12}] \\ W &= 2^{l-1} \Gamma(l) [A_1 s \omega^{-l} - \kappa^{2-l} C_{12}] \end{aligned}$$

Из (2.9) находим $S = 0$, $T = 0$, $W = 0$, что дает для A_1 , C_{11} и C_{12} следующие выражения:

$$(2.10) \quad \begin{aligned} A_1 &= \omega^l \kappa^{2-l} s^{-1} C_{12}, \quad C_{11} = \gamma^2 p^2 s^{-1} C_{12} \\ C_{12} &= \frac{16}{\pi} \frac{l \bar{f}(p) s \omega^l K_l(r_0 \omega) \sin l\theta \cos l\theta_0}{\omega^{2l} \kappa^{2-l} + (s^2 + \gamma^2 p^2) \kappa^l} e^{pr_0} \end{aligned}$$

В результате для $\bar{\varphi}^*$, $\bar{\psi}_1^*$ и $\bar{\psi}_2^*$ с помощью (2.10) получаем

$$(2.11) \quad \begin{aligned} \bar{\varphi}^* &= \frac{F_0(r)}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} F_n(r) \cos n\theta + s^{-1} \kappa^{2-l} \omega^l \cos l\theta K_l(r\omega) C_{12} \\ \bar{\psi}_1^* &= s^{-1} \gamma^2 p^2 \sin l\theta K_l(r\kappa) C_{12}, \quad \bar{\psi}_2^* = \cos l\theta K_l(r\kappa) C_{12} \end{aligned}$$

Сумма членов с F_n ($n = 0, 1, 2, \dots$), входящая в выражение для $\bar{\varphi}^*$ из (2.11), является изображением по Лапласу (по τ и z) возмущенного решения соответствующей акустической задачи φ_1 . Это проще всего доказать, если заметить, что, во-первых, оригинал от этой суммы удовлетворяет системе (1.3) и, во-вторых, можно показать, что этот оригинал (для достаточно гладких функций $f(\tau)$) удовлетворяет условию, обеспечивающему единственность решения акустической задачи [9]

$$\partial(\varphi_0 + \varphi_1) / \partial \tau = O(1), \quad r \partial(\varphi_0 + \varphi_1) / \partial r = o(1), \quad r \rightarrow 0$$

Итак, добавляя изображение от падающей сферической волны и применяя обратные преобразования Лапласа по s и p , получаем ($\Phi = \varphi_0 + \varphi$)

$$(2.12) \quad \begin{aligned} \Phi &= \varphi_a + \frac{\cos l\theta}{(2\pi i)^2} \int_{c_0 - i\infty}^{c_0 + i\infty} e^{p\tau} dp \int_{b_0 - i\infty}^{b_0 + i\infty} s^{-1} \kappa^{2-l} \omega^l C_{12} K_l(r\omega) e^{sz} ds \\ \psi_1 &= \gamma^2 \frac{\sin l\theta}{(2\pi i)^2} \int_{c_0 - i\infty}^{c_0 + i\infty} e^{p\tau} p^2 dp \int_{b_0 - i\infty}^{b_0 + i\infty} s^{-1} C_{12} K_l(r\kappa) e^{sz} ds \\ \psi_2 &= \frac{\cos l\theta}{(2\pi i)^2} \int_{c_0 - i\infty}^{c_0 + i\infty} e^{p\tau} dp \int_{b_0 - i\infty}^{b_0 + i\infty} C_{12} K_l(r\kappa) e^{sz} ds \quad (c_0 > |b_0|) \end{aligned}$$

Здесь акустическое решение $\varphi_a = \varphi_0 + \varphi_1$ с помощью результатов работы [3] можно представить в виде

$$(2.13) \quad \begin{aligned} \varphi_a &= \frac{f(+0)}{1 + \tau/r_0} Q\left(\tau + \frac{\tau^2 - r^2 - z^2}{2r_0}, r, \theta\right) - \\ &- \int_{R-r_0}^{\tau} \frac{d}{dx} \left[\frac{f(\tau-x)}{1 + x/r_0} \right] Q\left(x + \frac{x^2 - r^2 - z^2}{2r_0}, r, \theta\right) dx \end{aligned}$$

[В (2.13) $Q(\tau, r, \theta)$ — решение акустической задачи о дифракции плоской волны $\eta[\tau + r \cos(\theta - \theta_0)]/r_0$ на рассматриваемом клине, которое, согласно [9], имеет вид

$$Q(\tau, r, \theta) = \eta(r - \tau) \{ \sigma(\theta - \theta_0) \eta[\tau + r \cos(\theta - \theta_0)] + \sigma(\theta + \theta_0) \eta[\tau + r \cos(\theta + \theta_0)^*] \} r_0^{-1} + \eta(\tau - r) \pi^{-1} r_0^{-1} (\operatorname{arctg} \lambda_+ + \operatorname{arctg} \lambda_-)$$

$$\lambda_{\pm} = \frac{(1 - y^{2l}) \sin l\pi}{(1 + y^{2l}) \cos l\pi - 2y^l \cos l(\theta \pm \theta_0)}, \quad y = \frac{\tau}{r} - \left[\left(\frac{\tau}{r} \right)^2 - 1 \right]^{1/2}$$

$$\eta(x) = 1, \quad x > 0; \quad \eta(x) = 0, \quad x < 0$$

$$\sigma(\theta) = 1, \quad |\theta| < \pi; \quad \sigma(\theta) = 0, \quad \pi < |\theta| < \pi/l$$

$$\sigma(\theta + 2\pi/l) = \sigma(\theta), \quad (\theta + \theta_0)^* = \theta + \theta_0 + 2\pi m/l$$

Здесь значения арктангенсов берутся в интервале $(0, \pi)$, целое число m ($m = 0, -1$) [выбирается так, чтобы в рассматриваемой точке физического пространства всегда выполнялось неравенство $-\pi/l < (\theta + \theta_0)^* \leq \pi/l$].

Как следует из (2.12), только при $\theta_0 = \pi/(2l)$ (случай симметрии относительно биссектральной плоскости клина) и при $l \rightarrow 1$ (отражение волны от плоской стенки) пропадают упругие члены, добавочные к акустическому решению. С помощью (2.12) можно показать, что в окрестности ребра клина смещения ограничены, а напряжения интегрируемы.

С помощью замены переменной $q = s/r$ выражения (2.12) представляются в виде (если положить $b_0 = 0$)

$$(2.14) \quad \Phi = \Phi_a + \frac{\cos l\theta}{(2\pi i)^2} \int_{c_0 - i\infty}^{c_0 + i\infty} \bar{f}(p) e^{p(r_0 + \tau)} p dp \int_L \xi(p, q) dq$$

$$\psi_1 = \frac{\gamma^2 \sin l\theta}{(2\pi i)^2} \int_{c_0 - i\infty}^{c_0 + i\infty} \bar{f}(p) e^{p(r_0 + \tau)} p dp \int_L \zeta(p, q) dq$$

$$\psi_2 = \frac{\cos l\theta}{(2\pi i)^2} \int_{c_0 - i\infty}^{c_0 + i\infty} \bar{f}(p) e^{p(r_0 + \tau)} dp \int_L \zeta(p, q) q dq$$

$$\xi(p, q) = K_l(pr \sqrt{1 - q^2}) (1 - q^2)^{l/2} \Phi_0 e^{pqz},$$

$$\zeta(p, q) = K_l(pr \sqrt{\gamma^2 - q^2}) (\gamma^2 - q^2)^{l/2 - 1} \Phi_0 e^{pqz}$$

$$\Phi_0 \equiv \Phi_0(p, q) = \frac{16}{\pi} l K_l(pr_0 \sqrt{1 - q^2}) \frac{(1 - q^2)^{l/2} \sin l\pi \cos l\theta_0}{(1 - q^2)^l + (q^2 + \gamma^2)(\gamma^2 - q^2)^{l-1}}$$

Контур L показан на фиг. 1, где $\alpha_0 = \pi/2 - \arg p$, а разрезы из плоскости s переходят в разрезы вдоль действительной оси от точек $\pm \gamma$ и ± 1 до бесконечности в плоскости q (и $(\gamma^2 - q^2)^{1/2} = \gamma$, $(1 - q^2)^{1/2} = 1$ при $q = 0$).

Формулы (2.14) достаточно рассматривать при $z \geq 0$, так как Φ и ψ_1 — четные, а ψ_2 — нечетная функция z (это легко доказывается с помощью (2.14)). Тогда при $z > 0$ можно показать, что контур L в выражении для Φ можно деформировать в кривую L_0 , а контур L в выражениях для ψ_1

и ψ_2 — в кривую L_1 . Точки этих кривых удовлетворяют уравнениям

$$L_0: \operatorname{Im} [qz - (r + r_0)(1 - q^2)^{1/2}] = 0$$

$$L_1: \operatorname{Im} [qz - r(\gamma^2 - q^2)^{1/2} - r_0(1 - q^2)^{1/2}] = 0.$$

Обе кривые, вид которых в плоскости q показан на фиг. 1, симметричны относительно действительной оси и при удалении от начала координат имеют одни и те же асимптоты, образующие углы $\pm \alpha_1$ с действительной

осью: $\operatorname{tg} \alpha_1 = -(r + r_0) / z$. Точки q_0 и q_1 пересечения L_0 и L_1 с действительной осью определяются соответственно из уравнений

$$\begin{aligned} z + (r + r_0)q(1 - q^2)^{-1/2} &= 0, \\ z + r_0q(1 - q^2)^{-1/2} + \\ + r_0q(\gamma^2 - q^2)^{-1/2} &= 0 \end{aligned}$$

При этом функция $N_0(q, z, r) \equiv qz - (r + r_0)(1 - q^2)^{1/2}$, действительная на кривой L_0 , принимает на L_0 максимальное значение в точке q_0 : $N_0(q_0, z, r) = -[z^2 + (r + r_0)^2]^{1/2}$.

Аналогичным образом функция $N_1(q, z, r) \equiv qz - r(\gamma^2 - q^2)^{1/2} - r_0(1 - q^2)^{1/2}$, действительная на L_1 , принимает максимальное значение на L_1 , в точке q_1 : $N_1(q_1, z, r) = -R_1(R_1 \equiv R_1(z, r))$. При $z \rightarrow 0$ значения q_0 и q_1 стремятся к нулю, а кривые L_0 и L_1 переходят в пределе в мнимую ось. В результате при $z \geq 0$ формулы (2.14) представляются в виде

$$(2.15) \quad \Phi = \varphi_a + \cos l\theta \int_{L_0} \Phi_1 (1 - q^2)^{l/2 - 1/4} dq \int_{-0}^{x_0} f'(x) U(x, q) dx$$

$$\psi_1 = \gamma^2 \sin l\theta \int_{L_1} \Phi_1 (\gamma^2 - q^2)^{l/2 - 3/4} dq \int_{-0}^{x_1} f'(x) V(x, q) dx$$

$$\psi_2 = \cos l\theta \int_{L_1} \Phi_1 (\gamma^2 - q^2)^{l/2 - 5/4} q dq \int_0^{x_1} f(x) V(x, q) dx$$

$$U(x, q) = P_{l-1/2} \left[1 + \frac{(x_0 - x)^2 + 2(x_0 - x)(r + r_0)\sqrt{1 - q^2}}{2rr_0(1 - q^2)} \right]$$

$$V(x, q) = P_{l-1/2} \left[1 + \frac{(x_1 - x)^2 + 2(x_1 - x)(r\sqrt{\gamma^2 - q^2} + r_0\sqrt{1 - q^2})}{2rr_0\sqrt{(\gamma^2 - q^2)(1 - q^2)}} \right]$$

$$x_0 = \tau + r_0 + qz - (r + r_0)\sqrt{1 - q^2}$$

$$x_1 = \tau + r_0 + qz - r\sqrt{\gamma^2 - q^2} - r_0\sqrt{1 - q^2}$$

Здесь $P_{l-1/2}(x)$ — функция Лежандра первого рода, а производная $f'(x)$ в выражениях Φ и ψ_1 понимается в обобщенном смысле.

При получении (2.15) использовалась формула операционного исчисления для изображения $Kl(ps) Kl(pq) e^{p(s+q)}$, которая как в таблицах [10] (формула 60, раздел 16, гл. 5), так и справочнике [11], где дано преобразование Лапласа — Карсона (формула 29.205), выписана с ошибкой. Для получения ее правильного выражения представим данное изображение в виде

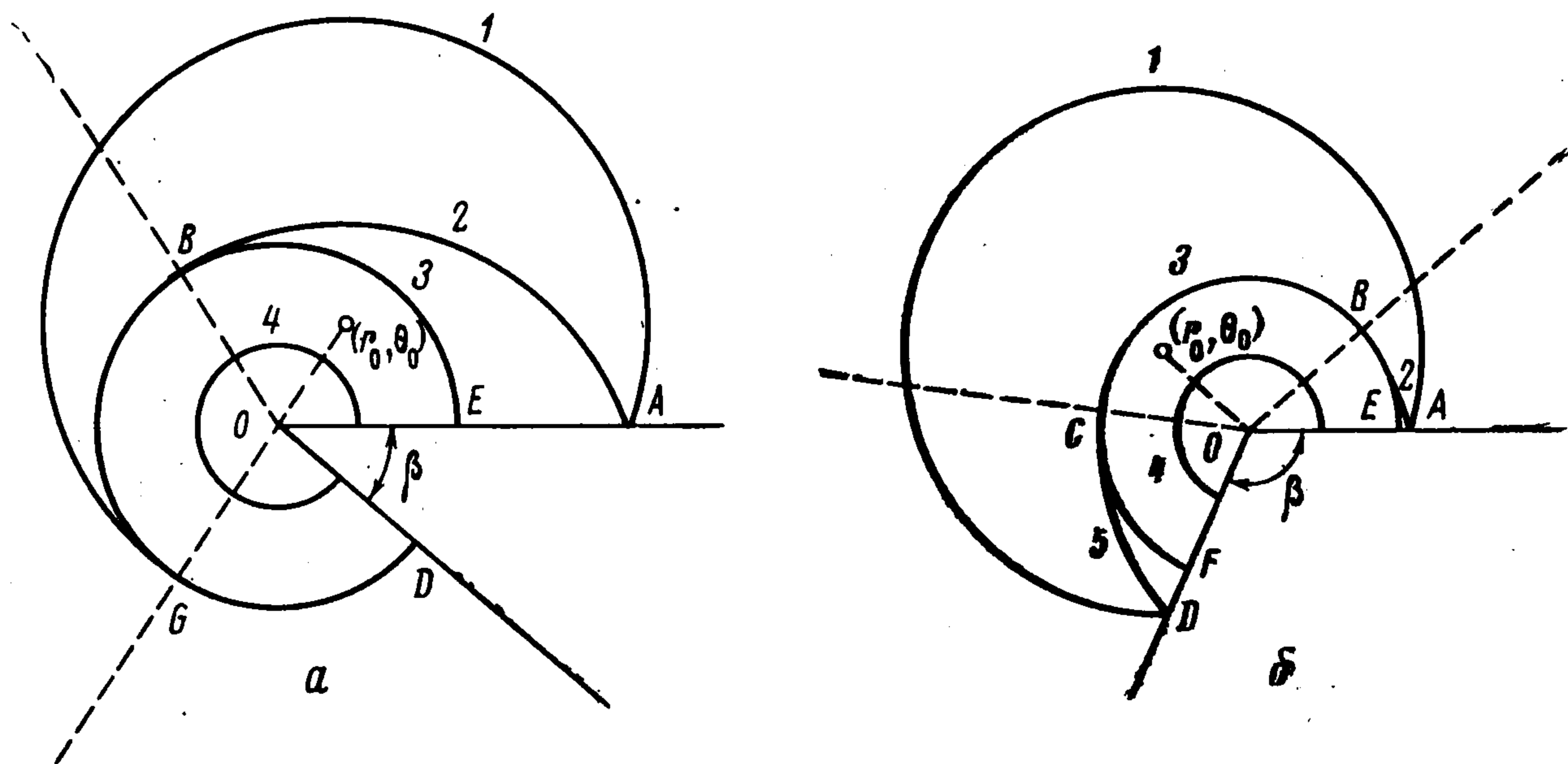
$$\frac{\pi}{2 \sin l\pi} [K_{-l}(ps) I_{-l}(pq) - K_l(ps) I_l(pq)] e^{p(s+q)}$$

используя свойство $K_{-l}(s) = K_l(s)$ и формулу $K_l(s) = \pi [I_{-l}(s) - I_l(s)] / (2 \sin l \pi)$. Тогда с помощью формулы операционного исчисления из [12] получаем (l — любое комплексное число)

$$K_l(ps) K_l(pq) e^{p(s+q)} = \frac{\pi}{2 \sqrt{sq}} P_{l-1/2} \left[\frac{(\tau+2s)(\tau+2q)}{2sq} - 1 \right] \eta(\tau)$$

$$|\arg s| < \pi, \quad |\arg q| < \pi$$

Из (2.15) при $\max x_0(q) < 0$ ($\max x_0(q) = x_0(q_0) = \tau + r_0 - [z^2 + (r + r_0)^2]^{1/2}$) находим $\Phi = \varphi_a$, а при $\max x_1(q) < 0$ ($\max x_1(q) = x_1(q_1) = \tau + r_0 - R_1$) имеем $\psi_1 = \psi_2 = 0$. Следовательно, $\tau + r_0 = -[z^2 + (r + r_0)^2]^{1/2}$ и $\tau + r_0 = R_1$ — соответственно уравнения фронтов



Фиг. 2

дифракционных продольных и поперечных волн. Картины возмущенных областей в сечении $z = \text{const}$ ($\tau > (z^2 + r_0^2)^{1/2} - r_0$) с тенью и без тени показаны на фиг. 2, а и 2, б соответственно, где $\angle BOA = \pi - \theta_0$, $\angle COA = 2\pi / l - \pi - \theta_0$, $\angle GOA = \pi + \theta_0$ (углы отсчитываются от луча OA против часовой стрелки), а фронты волн 1—5 даются соответственно уравнениями: 1) $\tau + r_0 = R(\theta)$, 2) $\tau + r_0 = R(-\theta)$, 3) $\tau + r_0 = [z^2 + (r + r_0)^2]^{1/2}$, 4) $\tau + r_0 = R_1$, 5) $\tau + r_0 = R(2\pi / l - \theta)$, $R(\theta) \equiv R = [z^2 + r^2 + r_0^2 - 2rr_0 \cos(\theta - \theta_0)]^{1/2}$ (координата θ отсчитывается от луча OA против часовой стрелки, $\beta = 2\pi - \pi / l$).

В плоскости $z = 0$ фронты дифракционных продольных и поперечных волн описываются соответственно уравнениям $r = \tau$, $r = \tau / \gamma$.

Следует заметить, что учет условия на ребре приводит прежде всего к качественному отличию решения упругой задачи от решения соответствующей акустической задачи, так как, кроме дополнительной дифракционной продольной волны $\Phi = \varphi_a$, появляются дифракционные поперечные волны, причем обоих типов ψ_1 и ψ_2 , отличающиеся направлением поляризации вектора смещения. Дополнительные возмущения $\Phi = \varphi_a$, ψ_1 и ψ_2 описывают влияние упругости.

Полагая $f(\tau) = r_0 \eta(\tau)$ в выражениях (2.14), а затем, устремляя $r_0 \rightarrow \infty$, можно показать, что $\psi_2 \rightarrow 0$, а Φ и ψ_1 дают в пределе решение задачи о дифракции плоской продольной ступенчатой волны на клине. Это решение совпадает с известным [5] с

точностью до обозначений (если в формулах (2.9) из [5] для φ и ψ исправить небольшие неточности: учесть потерянный множитель $1/2$ в членах, дополнительных к акустическому решению, и исправить следующие опечатки: в выражении для φ заменить один из множителей $\cos k\theta_0$ на $\cos k\theta$ и в выражении для ψ заменить множитель $(b/a)^k$ на $(b/a)^{-k}$. Имеем

$$(2.16) \quad \begin{aligned} \Phi &= \varphi_a^0 + \frac{4 \sin l\pi \cos l\theta_0}{\pi (1 + \gamma^{2l})} \left[P\left(\frac{\tau}{r}\right) - 1 / P\left(\frac{\tau}{r}\right) \right] \eta(\tau - r) \\ \psi_1 &= \frac{4\gamma^l \sin l\pi}{\pi (1 + \gamma^{2l})} \cos l\theta_0 \sin l\theta \left[P\left(\frac{\tau}{r\gamma}\right) - 1 / P\left(\frac{\tau}{r\gamma}\right) \right] \eta(\tau - r\gamma) \\ P(x) &= [x + (x^2 - 1)^{1/2}]^l \end{aligned}$$

Здесь φ_a^0 — решение соответствующей акустической задачи.

3. Рассмотрим подробно наиболее интересный случай падающей волны: (1.1), когда $f(\tau) = -r_0 \tau^2 \eta(\tau) / 2$. Напряжение на фронте такой волны сжатия претерпевает конечный скачок: $[\sigma_{nn}] = \sigma_{nn}^+ - \sigma_{nn}^- = -(\lambda + 2\mu)r_0 (\tau + r_0)^{-1}$, где λ и μ — параметры Ляме, n — нормаль к фронту волны, знаки плюс и минус относятся соответственно к областям за и перед фронтом волны (при $r_0 \rightarrow \infty$ данная волна переходит в плоскую с потенциалом $\varphi_0 = -[\tau + r \cos(\theta - \theta_0)]^2 \eta[\tau + r \cos(\theta - \theta_0)] / 2$).

Для исследования решения достаточно рассмотреть случай $0 < \theta_0 < \pi/l - \pi$ (фиг. 2, а), в котором имеются все возможные области возмущенного движения: область отраженной волны ($0 < \theta < \pi - \theta_0$, $[(\tau + r_0)^2 - z^2]^{1/2} - r_0 < r$, $\tau + r_0 > R(-\theta)$), область дифракции ($r < [(\tau + r_0)^2 - z^2]^{1/2} - r_0$) и область тени ($\pi + \theta_0 < \theta < \pi/l$).

При переходе через фронт отраженной волны 2 к потенциалу падающей волны добавляется потенциал отраженной волны

$$\varphi = -r_0 [\tau + r_0 - R(-\theta)]^2 \eta[\tau + r_0 - R(-\theta)] 2^{-1} R^{-1}(-\theta)$$

и имеем конечный скачок нормального напряжения на фронте отраженной волны, равный $[\sigma_{nn}] = -r_0 (\lambda + 2\mu)(\tau + r_0)^{-1}$ (ибо терпит разрыв $\partial^2 \Phi / \partial n^2$).

При переходе через фронт продольной дифракционной волны 3 деформации и, следовательно, напряжения непрерывны, а терпит разрыв второго рода производная от деформации по направлению нормали к фронту $\partial \varepsilon_{nn} / \partial n$ (ибо $\partial^3 \Phi / \partial n^3$ терпит такой разрыв.) При подходе к фронту из области перед фронтом эта производная конечна, а при подходе из области за фронтом она имеет особенность порядка $\varepsilon^{-1/2}$. При этом как акустическое решение φ_a , так и добавочный упругий член имеют особенности порядка $\varepsilon^{-1/2}$.

На фронте поперечной волны 4 непрерывны деформации, а терпят разрыв второго рода производные по нормали от компонент деформации $\partial \varepsilon_{\theta n} / \partial n$ и $\partial \varepsilon_{\nu n} / \partial n$ (где ν отсчитывается вдоль линии пересечения фронта поперечной волны с плоскостью $\theta = \text{const}$), поскольку терпят разрыв на этом фронте соответственно производные $\partial^3 \psi_1 / \partial n^3$ и $\partial^4 \psi_2 / \partial n^4$. Причем при подходе извне ($\tau + r_0 < R_1$) эти производные конечны, а при подходе изнутри ($\tau + r_0 > R_1$) они имеют особенность порядка $\varepsilon^{-1/2}$.

Из приведенного исследования видно, что добавочная упругая часть решения сравнима по величине с дифракционной частью акустического

решения не только в окрестности ребра клина, но и вблизи фронта \mathcal{Z} дифрагированной волны, и, следовательно, упругая задача существенно отличается от акустической не только вблизи ребра клина, но, вообще говоря, во всей области дифракции $r + r_0 < [(\tau + r_0)^2 - z^2]^{1/2}$.

В случае симметрии ($\theta_0 = \pi / (2l)$) на фиг. 3 приведены кривые распределения напряжений ($-\sigma_{\theta\theta}$) как функций r / r_1 (r_1 — координата точки A на фиг. 2, б) вдоль щеки клина OA в плоскости $z = 0$ для угла раствора $\beta = \pi/6$ и $\lambda / \mu = 2$. Кривая 1 дана для случая падения плоской волны сжатия

$$(3.1) \quad \varphi_0 = -[2\lambda + 4\mu \sin^2(\beta/2)]^{-1} \times \\ \times [\tau + r \cos(\theta - \theta_0)]^2 \eta [\tau + r \cos(\theta - \theta_0)]$$

Кривые 2—5 — распределения напряжений на клине соответственно для $\tau / r_0 = 0.5, 1.0, 2.0, 2.5$ при падении сферической волны сжатия

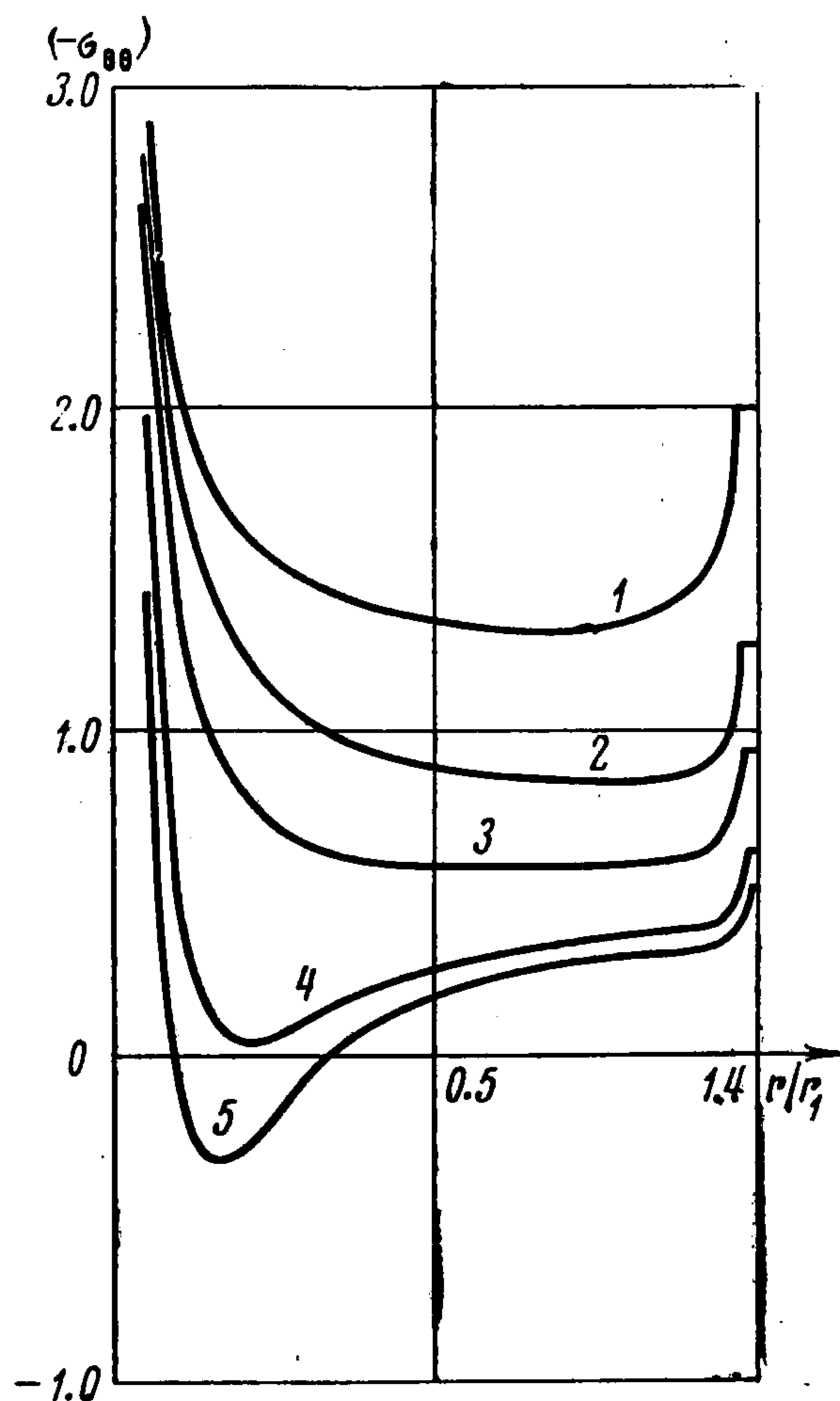
$$\varphi_0 = -r_0 R^{-1} [2\lambda + \\ + 4\mu \sin^2(\beta/2)]^{-1} (\tau + r_0 - R)^2 \times \\ \times \eta(\tau + r_0 - R)$$

которая при $r_0 \rightarrow \infty$ переходит в плоскую волну (3.1).

Из сравнения полученных результатов для плоской и сферической волн видно, что с течением времени растет влияние сферичности фронта падающей волны, и при $\tau \gtrsim 2r_0$ напряжение на участке щеки клина становится растягивающим. Если при этом физические свойства контакта таковы, что он не выдерживает растягивающих напряжений, то происходит явление «отлипания», и, следовательно, в этом случае полученное решение задачи (с граничными условиями $v_\theta = 0, \sigma_{\theta r} = \sigma_{\theta z} = 0$) годится до определенного момента времени τ_1 , когда на какой-либо части поверхности клина впервые появляются растягивающие напряжения. Начиная с этого момента времени, на этих частях поверхности надо ставить другие граничные условия.

Как показывают аналитическое исследование и численные расчеты, в случае симметрии растягивающие напряжения появляются для любого угла клина $\beta < \pi$, а при $\beta \rightarrow \pi$ момент времени их появления τ_1 неограниченно возрастает и в предельном случае $\beta = \pi$ напряжения всегда сжимающие.

Отметим, что при отсутствии симметрии ($\theta_0 \neq \pi / (2l)$) есть случаи, когда растягивающие напряжения имеются в любой момент времени (как, например, при дифракции на гладкой твердой пластинке при $\theta_0 = \pi / 2$, когда на теневой стороне растягивающие напряжения появляются одновременно с образованием области возмущенного движения).



Фиг. 3

Здесь следует сказать, что даже в том случае, когда физические свойства контакта не позволяют ему выдерживать растягивающих напряжений, решению задачи с растягивающими напряжениями можно придать физический смысл, если предположить, что еще до начала процесса дифракции рассматриваемая упругая среда уже предварительно статически сжата так, что результирующие напряжения на контакте оказываются сжимающими.

В дополнение отметим, что в случае симметрии при приближении к ребру клина напряжение $\sigma_{\theta\theta}$ как для плоской, так и для сферической волны имеет особенность порядка r^{2l-2} .

4. Из решения, полученного для углов раствора клина $\beta = 2\pi - \pi/l$ ($1/2 \leq l < 1$), удовлетворяющих условию $\beta < \pi$, можно получить решение для углов раствора $\beta \geq \pi$. Действительно, симметричная относительно биссектральной плоскости клина часть решения (2.14) (обозначаем Φ^s и ψ_j^s , $j = 1, 2$) удовлетворяет на биссектральной плоскости условиям: $\partial\Phi^s / \partial\theta = \psi_1^s = \partial\psi_2^s / \partial\theta = 0$ и, следовательно, дает решение задачи дифракции упругой сферической волны на клине с углом раствора $\beta_1 = 2\pi - \pi/l_1$, где $l_1 = 2l$ ($1 \leq l_1 < 2$). Здесь угол β_1 удовлетворяет условиям $\pi \leq \beta_1 < 3\pi/2$. Снова выделяя симметричную часть из решения для клина с углом раствора β_1 , получим решение для угла $\beta_2 = 2\pi - \pi/l_2$ ($2 \leq l_2 = 2l_1 < 4$), удовлетворяющего неравенству $3\pi/2 \leq \beta_2 < 7\pi/4$ и т. д. После n -й операции получим решение для угла клина $\beta_n = 2\pi - \pi/l_n$ ($2^{n-1} \leq l_n = 2^n l < 2^n$), удовлетворяющего условию $2\pi - \pi/2^{n-1} \leq \beta_n < 2\pi - \pi/2^n$.

Таким образом, можно получить решение для любого угла раствора клина β в пределах $0 \leq \beta < 2\pi$.

Поступила 18 II 1976

ЛИТЕРАТУРА

1. Петрашень Г. И., Николаев Б. Г., Коузов Д. П. О методе рядов в теории дифракции волн от плоских угловых областей. Уч. зап. ЛГУ, 1958, № 246.
2. Боровиков В. А. О трехмерной задаче дифракции на призме. Докл. АН СССР, 1963, т. 148, № 3.
3. Филиппов А. Ф. Дифракция произвольной акустической волны на клине. ПММ, 1964, т. 28, вып. 2.
4. Thompson J. H. Closed solutions for wedge diffractions. SIAM J. Appl. Math., 1972, vol. 22, No. 2, p. 300—306.
5. Костров Б. В. Дифракция плоской волны на жестком клине, вставленном без трения в безграничную упругую среду. ПММ, 1966, т. 30, вып. 1.
6. Свекло В. А., Сюкияйнен В. А. Дифракция плоской упругой волны относительно угла. Докл. АН СССР, 1958, т. 119, № 6.
7. Разматулин Х. А., Саатов Я. У., Сабодаш П. Ф., Филиппов И. Г. Двумерные задачи по неустановившемуся движению сжимаемых сред. Ташкент, «Фан», 1969.
8. Гузь А. Н., Головчан В. Т. Дифракция упругих волн в многосвязных телах. Киев, «Наукова думка», 1972.
9. Фридлиндер Ф. Звуковые импульсы. М., Изд-во иностр. лит., 1962.
10. Бейтмен Г., Эрдейи А. Таблицы интегральных преобразований, т. 1, М., «Наука», 1969.
11. Диткин В. А., Прудников А. П. Справочник по операционному исчислению. М., «Высшая школа», 1965.
12. Barr G. E. On the diffraction of a cylindrical pulse by a half-plane. Quart. Appl. Math., 1967, vol. 25, No. 2.