Прикладная математика и механика. Том 40, 1976

УДК 532.516

ОБ УСТОЙЧИВОСТИ ВТОРИЧНЫХ ТЕЧЕНИЙ ВЯЗКОЙ ЖИДКОСТИ В НЕОГРАНИЧЕННОМ ПРОСТРАНСТВЕ

А. А. Непомнящий

(Пермь)

Рассматриваются вторичные движения, возникающие в результате неустойчивости плоскопараллельного течения вязкой несжимаемой жидкости в неограниченном пространстве с синусоидальным профилем скорости, при малом превышении порогового числа Рейнольдса во всем интервале волновых чисел $0 < \alpha < \alpha_m$ (α_m — волновое число нейтрального возмущения плоскопараллельного движения). Исследуется устойчивость вторичных движений по отношению к возмущениям, нарушающим периодичность движения. Используется метод разложения по α_m, примененный ранее [1] для исследования устойчивости волновых режимов в пленке вязкой жидкости, стекающей по наклонной плоскости. Показано, что все пространственно-периодические вторичные движения неустойчивы.

Линейная теория устойчивости плоскопараллельного течения построена для синусоидального [2] и произвольного периодического профиля скорости [3]. Методами теории ветвления доказано существование вторичных движений, построены вторичные автоколебательные режимы и исследована их устойчивость по отношению к возмущениям той же периодичности[4,5]. Вторичные движения и их устойчивость исследовались также с учетом конечного числа фурье-компонент [6,7]. Однако пренебрежение высшими гармониками при заданном числе Рейнольдса допустимо лишь для движений, волновые числа α которых близки к волновому числу α_m.

1. Пусть вязкая несжимаемая жидкость с плотностью ρ и кинематической вязкостью ν движется под действием внешней силы, направленной параллельно оси x и изменяющейся в направлении оси y по закону

$$F = A \sin (y / l)$$

Выбрав в качестве единиц длины, скорости и давления соответственно l, ν / l и $\rho\nu^2 / l^2$, запишем уравнения движения в безразмерном виде

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v}\nabla)\mathbf{v} = -\nabla p + \Delta \mathbf{v} + R \sin y \mathbf{i}, \quad \operatorname{div} \mathbf{v} = 0 \tag{1.1}$$

где $\mathbf{i}$ — орт оси x, $R = Al^3 / \rho\nu^2$ — число Рейнольдса. Движение предполагается плоским ($v_z = 0$); будем использовать обозначения: $u = v_x$, $v = v_y$. Потребуем также выполнения условия равенства нулю среднего потока жидкости (условия замкнутости)

$$\lim_{L\to\infty} \frac{1}{L} \int_{-L}^{L} u(x, y)\, dy = \lim_{L\to\infty} \frac{1}{L} \int_{-L}^{L} v(x, y)\, dx = 0 \tag{1.2}$$

и ограниченности функций $\mathbf{v}$ и ∇p.

Система (1.1) всегда обладает решением, удовлетворяющим условиям (1.2) и условию ограниченности

$$\mathbf{v} = \mathbf{V} = (R \sin y,\ 0), \quad p = P = \mathrm{const} \tag{1.3}$$

которое соответствует плоскопараллельному движению. Движение (1.3) становится неустойчивым с ростом числа R по отношению к длинноволновым возмущениям [2]. Для декрементов затухания возмущений λ посредством разложения по волновому числу α можно получить следующее выражение:

$$\lambda = (1 - R^2 / 2)\ \alpha^2 + R^2 (1 + R^2 / 4)\ \alpha^4 + O(\alpha^6) \tag{1.4}$$

Отсюда видно, что при $R > R_* = \sqrt{2}$ нарастают возмущения с волновыми числами, лежащими в интервале $0 < \alpha < \alpha_m$, где зависимость между α_m и R определяется равенством

$$R = R_* [1 + 3\alpha_m^2 / 2 + O(\alpha_m^4)] \tag{1.5}$$

Из равенств (1.4), (1.5) следует, что

$$\lambda(\alpha) = O(\alpha_m^4)$$

при малых α_m и $0 < \alpha < \alpha_m$.

2. Перейдем к рассмотрению неплоскопараллельных движений. Величина α_m в дальнейшем предполагается малой в силу малости величины $R - R_*$ и используется в качестве малого параметра. Для движений с волновыми числами $0 < \alpha < \alpha_m$, $\alpha = O(\alpha_m)$, учитывая полученную выше оценку для λ, естественно ввести переменные $X = \alpha_m x$, $T = \alpha_m^4 t$. Обозначим

$$\mathbf{v}' = \mathbf{v} - \mathbf{V}, \quad p' = p - P$$

и будем строить решения v', p' в виде ряда по α_m.

Можно показать, что для стационарных вторичных движений разложения для компонент скорости u', v' начинаются с первой степени по α_m [7], а для p' — со второй. Введем функции u, v, p, для которых разложения начинаются с нулевого порядка по α_m

$$u = \sum_{n=0}^{\infty} u_n \alpha_m^n, \quad v = \sum_{n=0}^{\infty} v_n \alpha_m^n, \quad p = \sum_{n=0}^{\infty} p_n \alpha_m^n \tag{2.1}$$

$$(u' = \alpha_m u,\ v' = \alpha_m v,\ p' = \alpha_m^2 p)$$

Зависимость между α_m и R представим в виде

$$R = \sum_{n=0}^{\infty} R_{2n} \alpha_m^{2n} \tag{2.2}$$

Уравнения (1.1) в данных обозначениях приводятся к виду

$$\begin{gathered}
\frac{\partial v}{\partial y} = -\alpha_m \frac{\partial u}{\partial X} \\
\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = R \cos y v + \alpha_m \left(R \sin y \frac{\partial u}{\partial X} + v \frac{\partial u}{\partial y} \right) + \\
+ \alpha_m^2 \left(u \frac{\partial u}{\partial X} - \frac{\partial^2 u}{\partial X^2} + \frac{\partial p}{\partial X} \right) + \alpha_m^4 \frac{\partial u}{\partial T}
\end{gathered} \tag{2.3}$$

$$\frac{\partial p}{\partial y} = -\frac{\partial^2 u}{\partial X \partial y} - R \sin y \frac{\partial v}{\partial X} - v \frac{\partial v}{\partial y} +$$
$$+ \alpha_m \left(-u \frac{\partial v}{\partial X} + \frac{\partial^2 v}{\partial X^2}\right) - \alpha_m{}^3 \frac{\partial v}{\partial T}$$

Последнее уравнение из (2.3) выводится из уравнения для y-компоненты скорости с учетом уравнения непрерывности.

Подставим разложения (2.1) и (2.2) в (2.3) и будем приравнивать члены одного порядка по α_m.

В нулевом порядке получаем систему уравнений

$$\frac{\partial v_0}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial^2 u_0}{\partial y^2} = R_0 \cos y v_0, \quad \frac{\partial p_0}{\partial y} = -\frac{\partial^2 u_0}{\partial X \partial y} - R_0 \sin y \frac{\partial v_0}{\partial X}$$

Отсюда

$$v_0 = v_0(X, T), \quad u_0 = -R_0 \cos y v_0 + u_0^{(1)}(X, T)$$

$$p_0 = 2R_0 \cos y \frac{\partial v_0}{\partial X} + p_0^{(1)}(X, T)$$

Из условий разрешимости уравнений в следующих порядках будут определены функции $u_0^{(1)}$ и $p_0^{(1)}$ и получено замкнутое нелинейное уравнение для функции $v_0(X, T)$.

Из уравнений первого порядка находим

$$v_1 = R_0 \sin y \frac{\partial v_0}{\partial X} + v_1^{(1)}(X, T)$$

$$u_1 = -R_0 \sin y v_0{}^2 - R_0 \cos y v_1^{(1)} + u_1^{(1)}(X, T)$$

$$p_1 = R_0 \sin y \frac{\partial}{\partial X}(v_0{}^2) + \frac{1}{2} \sin 2y \frac{\partial^2 v_0}{\partial X^2} +$$
$$+ 2R_0 \cos y \frac{\partial v_1^{(1)}}{\partial X} + p_1^{(1)}(X, T)$$

При этом из условий разрешимости уравнений для v_1 и p_1 с учетом (1.2) и условия ограниченности следует

$$u_0^{(1)} = 0, \quad R_0 = \sqrt{2}$$

Для краткости в дальнейшем будем обозначать многоточием члены, связанные с решениями однородных уравнений $v_n^{(1)}(X, T)$, $u_n^{(1)}(X, T)$, $p_n^{(1)}(X, T)$, $n \geqslant 1$, так как эти функции не входят в окончательное уравнение.

Во втором порядке имеем

$$v_2 = -R_0 \cos y \frac{\partial}{\partial X}(v_0{}^2) + \ldots$$

$$u_2 = -R_2 \cos y v_0 - R_0 \cos y \left(3 \frac{\partial^2 v_0}{\partial X^2} - v_0{}^3\right) + \ldots$$

(выражение для p_2 не используется). Из условия разрешимости уравнения для u_2 получим (C — произвольная константа)

$$p_0^{(1)} = v_0{}^2 + C$$

Наконец, в третьем порядке из условия разрешимости уравнения для p_3 получаем замкнутое нелинейное уравнение для функции v_0

$$\frac{\partial v_0}{\partial T} + 3 \frac{\partial^4 v_0}{\partial X^4} + R_2 R_0 \frac{\partial^2 v_0}{\partial X^2} - \frac{2}{3} \frac{\partial^2}{\partial X^2}(v_0{}^3) = 0 \tag{2.4}$$

Уравнение, получаемое из (2.4) посредством линеаризации, в силу определения α_m как волнового числа нейтрального возмущения должно обладать не зависящим от времени решением $v_0 = \exp(iX)$; отсюда $R_2 = {}^3/_2\sqrt{2}$, что согласуется с (1.5). Преобразованием масштаба приведем (2.4) к виду

$$\frac{\partial V}{\partial \tau} + \frac{\partial^4 V}{\partial X^4} + \frac{\partial^2 V}{\partial X^2} - \frac{\partial^2}{\partial X^2}(V^3) = 0 \tag{2.5}$$

$$(v_0 = {}^3/_2\sqrt{2}V,\ \tau = 3T)$$

Отметим, что при выводе уравнения (2.5) вместо системы (2.3) можно использовать уравнение для функции тока, однако при этом окончательное уравнение получается в более высоком порядке по α_m.

3. Рассмотрим стационарные периодические вторичные движения, описываемые уравнением

$$d^2/dX^2\,(d^2V/dX^2 + V - V^3) = 0 \tag{3.1}$$

$$V(X + 2\pi / \alpha_1) = V(X), \quad 0 < \alpha_1 < 1$$

(α_1 — отношение волнового числа вторичного движения α к величине α_m). С учетом требования ограниченности V и условий (1.2) находим, что при подходящем выборе начала отсчета по X решение имеет вид

$$V = \sqrt{\frac{2k^2}{1+k^2}}\,\mathrm{sn}\,\frac{X}{\sqrt{1+k^2}} \tag{3.2}$$

где k — модуль эллиптической функции. Связь между k и α_1 устанавливается из условия периодичности

$$\alpha_1 = \frac{\pi}{2K(k)\sqrt{1+k^2}} \tag{3.3}$$

где $K(k)$ — полный эллиптический интеграл; $k \to 0$ при $\alpha_1 \to 1$, $k \to 1$ при $\alpha_1 \to 0$. Из выражения (3.2) следует, что пренебрежение высшими фурье-компонентами по X допустимо при α_1, близком к единице.

Перейдем к исследованию устойчивости решения (3.2). Для возмущений $W(X)\exp(-\lambda\tau)$, наложенных на решение (3.2), имеем

$$-\lambda W + \frac{d^4 W}{dX^4} + \frac{d^2[W(1-3V^2)]}{dX^2} = 0 \tag{3.4}$$

Собственные значения λ определяются из условия ограниченности W при $X \to \pm\infty$. Так как V^2 — периодическая функция с периодом π / α_1, ограниченное решение уравнения (3.4) может быть представлено в виде

$$W(X) = U(X)\exp(i\beta X) \tag{3.5}$$

Здесь $U(X)$ — периодическая функция с периодом π / α_1, β — вещественное число, определенное с точностью до целого кратного от $2\alpha_1$, так что можно считать $-\alpha_1 \leqslant \beta \leqslant \alpha_1$. Функция $U(X)$ удовлетворяет уравнению и условию периодичности

$$-\lambda U + \left(\frac{d}{dX} + i\beta\right)^4 U + \left(\frac{d}{dX} + i\beta\right)^2 [(1-3V^2)U] = 0 \tag{3.6}$$

$$U(X + \pi / \alpha_1) = U(X)$$

Рассмотрим возмущения с малыми β. Будем искать решение уравнения (3.6) и величину λ в виде ряда по β,

$$U=\sum_{n=0}^{\infty} U_n\beta^n, \quad \lambda=\sum_{n=0}^{\infty}\lambda_n\beta^n$$

В нулевом порядке получаем

$$-\lambda_0 U_0 + U_0^{IV} + [(1-3V^2)U_0]'' = 0 \tag{3.7}$$
$$U_0(X+\pi/\alpha_1) = U_0(X)$$

(штрих означает дифференцирование по X). Уравнение (3.7) обладает решением с $\lambda_0 = 0$, которое имеет вид

$$U_0 = k'^2 + 2k^2 \operatorname{cn}^2 \frac{X}{\sqrt{1+k^2}}, \quad k'^2 = 1-k^2 \tag{3.8}$$

Рассмотрим следующие порядки по β для возмущения с $\lambda_0 = 0$. В первом порядке по β получаем

$$U_1^{IV} + [(1-3V^2)U_1]'' = \lambda_1 U_0 - 4iU_0''' - 2i[(1-3V^2)U_0]'$$
$$U_1(X+\pi/\alpha_1) = U_1(X)$$

В левой части уравнения стоит полная производная от периодической функции; очевидно, условие разрешимости имеет вид

$$\lambda_1 \langle U_0\rangle = 0$$
$$\left(\langle f\rangle = \frac{\alpha_1}{\pi}\int_0^{\pi/\alpha_1} f(X)\,dX\right)$$

Поскольку $\langle U_0\rangle \neq 0$, $\lambda_1 = 0$.

Во втором порядке по β имеем

$$U_2'^v + [(1-3V^2)U_2]'' = \lambda_2 U_0 - 4iU_1''' - 2i[(1-3V^2)U_1]' +$$
$$+ 6U_0'' + (1-3V^2)U_0, \quad U_0(X+\pi/\alpha_1) = U_0(X)$$

Из условия разрешимости находим

$$\lambda_2 = -\langle(1-3V^2)U_0\rangle / \langle U_0\rangle$$

Подставляя сюда выражения (3.2) и (3.8), получаем

$$\lambda_2 = -k'^4 / (2E(k)/K(k) - k'^2)(1+k^2), \quad k'^2 = 1-k^2$$

где $K(k)$, $E(k)$ — полные эллиптические интегралы первого и второго рода. Можно показать, что величина λ_2 отрицательна во всей области $0 < k < 1$, так что для всех периодических вторичных движений существует мода возмущений, декремент затухания для которой отрицателен при малых, но конечных значениях β.

Таким образом, хотя пространственно-периодические вторичные движения устойчивы по отношению к возмущениям, период которых совпадает с периодом данного движения [5], они оказываются неустойчивыми по отношению к возмущениям более общего вида. В отличие от вторичных движений в слое с твердыми границами [8] и движения со свободной поверхностью [1], для которых существует интервал устойчивости по отношению к плоским возмущениям, пространственно-периодические вторичные движения, возникающие в результате неустойчивости плоскопараллельного движения с синусоидальным профилем скорости в неограниченной области, неустойчивы при любых значениях их периода.

Автор благодарит Е. М. Жуховицкого за внимание к работе и обсуждение.

Поступила 27 XII 1974

ЛИТЕРАТУРА

1. *Непомнящий А. А.* Устойчивость волновых режимов в пленке, стекающей по наклонной плоскости. Изв. АН СССР, МЖГ, 1974, № 3.
2. *Мешалкин Л. Д., Синай Я. Б.* Исследование устойчивости стационарного решения одной системы уравнений плоского движения несжимаемой вязкой жидкости. ПММ, 1961, т. 25, вып. 6.
3. *Юдович В. И.* О неустойчивости параллельных течений вязкой несжимаемой жидкости относительно пространственно-периодических возмущений. В сб.: Численные методы решения задач математической физики. М., «Наука», 1966.
4. *Юдович В. И.* Пример рождения вторичного стационарного или периодического течения при потере устойчивости ламинарного течения вязкой несжимаемой жидкости. ПММ, 1965, т. 29, вып. 3.
5. *Юдович В. И.* Об автоколебаниях, возникающих при потере устойчивости параллельных течений вязкой жидкости относительно длинноволновых периодических возмущений. Изв. АН СССР, МЖГ, 1973, № 1.
6. *Кляцкин В. И.* К нелинейной теории устойчивости периодических течений. ПММ, 1972, т. 36, вып. 2.
7. *Green J. S. A.* Two-dimensional turbulence near the viscous limit. J. Fluid Mech., 1974, vol. 62, pt. 2.
8. *Eckhaus W.* Studies in the nonlinear stability theory. Berlin, Springer, 1965.