

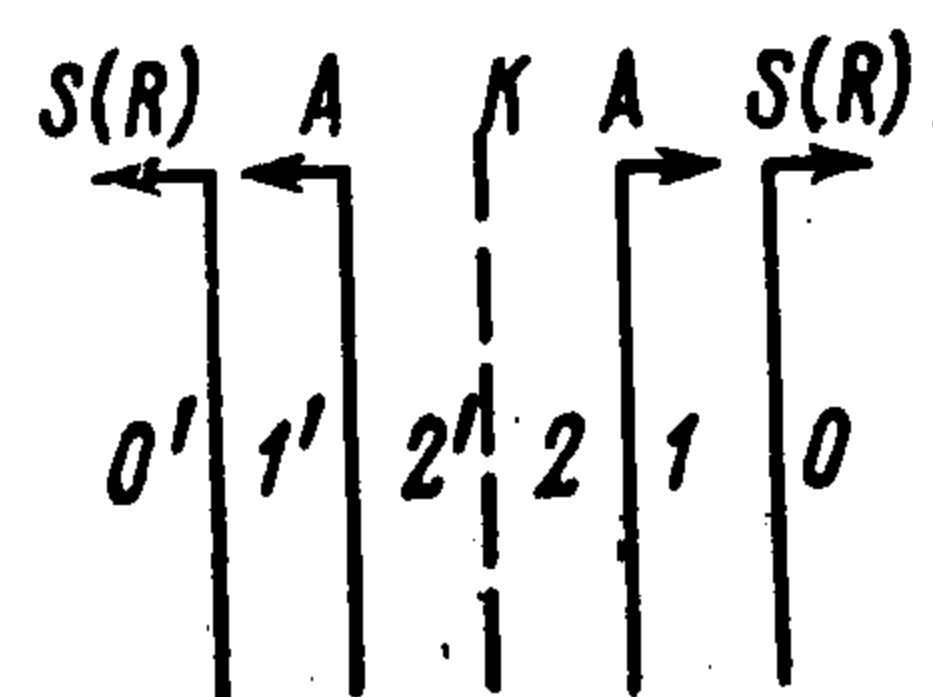
**РАСПАД ПРОИЗВОЛЬНОГО РАЗРЫВА В ИДЕАЛЬНО  
ПРОВОДЯЩЕЙ НАМАГНИЧИВАЮЩЕЙСЯ НЕСЖИМАЕМОЙ СРЕДЕ**

**В. А. Налетова, Г. А. Шапошникова**

(Москва)

Исследуются центрированные волны и сильные разрывы в идеально проводящей намагничивающейся несжимаемой среде. Показано, что в рассматриваемой среде в ударных волнах тангенциальные к плоскости разрыва магнитное поле и магнитная индукция увеличиваются, а магнитная проницаемость уменьшается; в центрированных волнах тангенциальные магнитное поле и магнитная индукция уменьшаются. Решена задача о распаде произвольного разрыва в намагничивающейся идеально проводящей несжимаемой среде методом построения диаграмм в плоскости составляющих первоначального скачка тангенциальной скорости. Диаграммы позволяют определить комбинацию волн и разрывов, образующихся при распаде.

Пусть в момент времени  $t = 0$  параметры среды  $\mathbf{V}_\tau, \mathbf{H}_\tau, v_\tau, T$  терпят разрыв на плоскости  $x = 0$ . Если на этом разрыве не выполнены законы сохранения, то разрыв существовать не может и требуется определить движение среды в последующие моменты времени. Из автомодельности задачи следует, что движение должно состоять из комбинации ударных волн  $S$ , центрированных волн  $R$ , вращательных альфвеновских разрывов  $A$  и контактного разрыва  $K$ . Скорость распространения этих волн, как будет показано ниже (в рамках рассматриваемой модели), такова, что в обе стороны могут идти по две волны, разделенные контактным разрывом (фиг. 1). В газовой динамике задача о распаде произвольного разрыва для идеального совершенного газа решена в [1,2], для сред с произвольным уравнением состояния задача решена в [3], для горючих смесей — в [4]. В магнитной гидродинамике задача о распаде произвольного разрыва решена в [5].



Фиг. 1

Параметры, характеризующие среду в начальный момент времени, обозначим индексом нуль. Параметры среды, расположенной в начальный момент слева от плоскости разрыва, а в последующие моменты времени слева от плоскости контактного разрыва, отмечены штрихом. Параметры среды, расположенной справа от соответствующих поверхностей, обозначены нештрихованными буквами. Параметры среды за первой волной, идущей вправо или влево, будем обозначать цифрой 1, за  $A$  — разрывом — цифрой 2.

**1. Основные уравнения.** Система уравнений, описывающая непрерывные течения намагничивающейся идеально проводящей жидкости, может быть записана в виде [6-8]

$$(1.1) \quad \frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div} \rho \mathbf{v} = 0, \quad p = p_0 + \frac{1}{4\pi} \int_0^H \left( \mu - \rho \frac{\partial \mu}{\partial \rho} \right) H dH$$

$$\rho \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \nabla p + \frac{1}{4\pi} \operatorname{rot} \mathbf{H} \times \mathbf{v} + \frac{\mathbf{v} \nabla H}{4\pi}$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \left( \rho \frac{v^2}{2} + \rho U_m \right) = - \operatorname{div} \left\{ \rho v \left( \frac{v^2}{2} + \frac{p}{\rho} + U_m - \frac{HB}{4\pi\rho} \right) + \frac{c}{4\pi} \mathbf{E} \times \mathbf{H} \right\}$$

$$\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} + (\mathbf{v} \nabla) \mathbf{B} = (\mathbf{B} \Delta) \mathbf{V}, \quad c\mathbf{E} = -\mathbf{v} \times \mathbf{B}, \quad \mathbf{B} = \mu \mathbf{H} = \mathbf{H} + 4\pi \mathbf{M}$$

$$U_m = U_{m0} + \frac{1}{4\pi\rho} \mathbf{B} \mathbf{H} + \frac{1}{4\pi} \int_0^H \frac{1}{\rho} \left( T \frac{\partial \mu}{\partial T} - \mu \right) H dH$$

Обозначения такие же, как в [8]. Из (1.1) можно получить соотношения на поверхностях разрыва в системе координат, относительно которой разрыв покоится [7]

$$(1.2) \quad \begin{aligned} \{\rho v_n\} &= 0, \quad \{\rho v_n^2 + p - B_n H_n / 4\pi\} = 0 \\ \{B_n\} &= 0, \quad B_n \{v_\tau\} = \{v_n B_\tau\}, \quad \rho v_n \{v_\tau\} = B_n \{H_\tau\} / 4\pi \\ \left\{ \rho v_n \left( \frac{v^2}{2} + \frac{p}{\rho} + U_m - \frac{B_n H_n}{4\pi\rho} \right) - \frac{B_n}{4\pi} H_\tau v_\tau \right\} &= 0 \end{aligned}$$

Индексы  $\tau$  и  $n$  обозначают составляющие векторов, касательные и нормальные к поверхности разрыва,  $\{F\} = F_1 - F_0$ ,  $F_0, F_1$  — значения величины  $F$  слева и справа от разрыва. Решение системы (1.2) должно удовлетворять условию неубывания энтропии

$$(1.3) \quad \left\{ S_{H=0} + \frac{1}{4\pi\rho} \int_0^H \left( \frac{\partial \mu}{\partial T} \right)_{\rho, H} H dH \right\} \geq 0$$

где  $S_{H=0}$  — энтропия среды в отсутствии магнитного поля. Далее рассматривается несжимаемый насыщенный магнетик, который подчиняется следующим уравнениям состояния:

$$(1.4) \quad \rho = \text{const}, \quad U_{m0} = cT, \quad M = K(\Theta - T)$$

Здесь  $\Theta$  — температура Кюри,  $K = \text{const}$ .

2. Центрированные волны в несжимаемой идеально проводящей намагничивающейся среде. Будем искать решения системы (1.1) в виде

$$(2.1) \quad \begin{aligned} v_\tau &= v_\tau \left( \frac{x}{t} \right), \quad T = T \left( \frac{x}{t} \right), \quad p = p \left( \frac{x}{t} \right) \\ \mathbf{B} &= B_n \left[ 1 + b \left( \frac{x}{t} \right) \right], \quad v_\tau l = b l = 0 \end{aligned}$$

Здесь  $l$  — единичный вектор, направленный вдоль оси  $x$ . Из системы (1.1) получим уравнения, описывающие распространение простых центрированных волн

$$(2.2) \quad \begin{aligned} p - \frac{B_n H_n}{4\pi} &= \text{const}, \quad \tau(b) = \tau_0 \exp \{ m\beta (\sqrt{1+b^2} - \sqrt{1+b_0^2}) + \\ &+ m\tau(b) - m\tau_0 \} \\ \frac{\partial v_\tau}{\partial \xi} &= -(\xi - v_n) \frac{\partial b}{\partial \xi}, \quad \frac{\partial v_\tau}{\partial \xi} = -\frac{a_0^2}{\xi - v_n} \frac{\partial}{\partial \xi} [bf(b)] \\ f(b) &= 1 - \frac{4\pi M(\tau, b)}{B_n \sqrt{1+b^2}}, \quad \xi = \frac{x}{t}, \quad a_0^2 = \frac{B_0^2}{4\pi\rho} \\ \tau &= \frac{T}{\Theta}, \quad \tau_0 = \frac{T_0}{\Theta}, \quad b_0 = \frac{|B_{\tau 0}|}{B_n}, \quad \beta = \frac{B_n^2}{4\pi\rho c\Theta}, \quad m = \frac{4\pi K\Theta}{B_n} \end{aligned}$$

( $B_{\tau_0}$ ,  $T_0$  — значение магнитной индукции и температуры среды в невозмущенном состоянии).

Из третьего и четвертого уравнений системы (2.2) получим

$$(2.3) \quad (\xi_1 - v_n)^2 = a_0^2 f(b), \quad (\xi_2 - v_n)^2 = a_0^2 (f + b_y f_{by}' + b_z f_{bz}')$$

В центрированной волне, распространяющейся со скоростью  $\xi_1$ , абсолютная величина вектора магнитной индукции не меняется, поэтому  $\xi_1 = \text{const}$ . Эта центрированная волна вырождается в слабый разрыв, движущийся с альфвеновской скоростью. В волне, распространяющейся относительно среды со скоростью  $a = \xi_2 - v_n$ , направление вектора  $\mathbf{B}$  не меняется, волну можно считать плоской. Скорость распространения волны  $a$  может быть представлена в виде

$$(2.4) \quad a^2(b) = a_A^2 + \frac{B_n^2 b^2}{4\pi\rho(1+b^2)} \left[ \frac{4\pi M}{B_n(1+b^2)^{1/2}} + \frac{m\beta\tau}{1-m\beta\tau} \right]$$

$$a_A^2 = \frac{B_n^2}{4\pi\rho\mu}$$

Распределение тангенциальной скорости в такой волне связано с вектором  $b$  соотношением

$$(2.5) \quad v_\tau = v_{\tau_0} \mp \frac{b}{b_0} \int_{b_0}^b a(b) db$$

Здесь  $v_{\tau_0}$  — скорость среды в невозмущенном состоянии. Скорость распространения простой волны  $a(b)$  и связь величины  $v_\tau$  и  $b$  (2.5) в волне были найдены в [9].

Рассмотрим изменения величин в плоской центрированной волне (2.5), где  $\partial b / \partial \xi = \xi / (a \partial a / \partial b)$ . Отсюда следует, что  $\text{sign}(\partial b / \partial \xi) = \pm \text{sign}(\partial a / \partial b)$ .

Верхний знак в этой формуле и в (2.5) соответствует центрированной волне, идущей вправо, а нижний — волне, идущей влево.

При  $(\partial a / \partial b) > 0$  возможны только центрированные волны, в которых абсолютная величина вектора магнитной индукции уменьшается, а при  $(\partial a / \partial b) < 0$  абсолютная величина вектора магнитной индукции увеличивается. В случае, когда  $\beta \ll 1$ ,  $m \lesssim 1$

$$(2.6) \quad \frac{\partial a}{\partial b} = \frac{B_n^2}{4\pi\rho a(b)} \left[ \frac{3(1-\tau(b))b}{(1+b^2)^{3/2}} + \frac{3\tau_0\beta m b}{1+(1+b^2)^2} \right] > 0$$

возможны только центрированные волны, в которых абсолютная величина вектора магнитной индукции уменьшается. Из второго уравнения (2.2) следует, что при  $\beta \ll 1$ ,  $m \lesssim 1$  волны не меняют начального распределения температуры, при этом вектор магнитной индукции выражается через магнитное поле

$$(2.7) \quad \mathbf{B} = \mathbf{H} + \frac{4\pi K(\Theta - T)}{|\mathbf{H}|} \mathbf{H}$$

Сравним скорость распространения слабых возмущений  $a$  с альфвеновской скоростью  $a_A$ . Из (2.4) видно, что  $a(b) < a_A$ , когда  $m\beta\tau > 1$ ,  $a(b) >$

$> a_A$ , когда  $m\beta\tau < 1$ . При  $\beta \ll 1$ ,  $m \lesssim 1$  скорость малых возмущений  $a(b)$  больше альфвеновской скорости

$$(2.8) \quad a(b) > a_A$$

Выражая вектор магнитной индукции  $\mathbf{B}_\tau$  через вектор магнитного поля  $\mathbf{H}_\tau$  по формуле (2.7), соотношение на центрированных волнах (2.5) можно записать в виде

$$(2.9) \quad v_{\tau 1} = v_{\tau 0} \mp \chi(|\mathbf{H}_{\tau 1}|, |\mathbf{H}_{\tau 0}|) \frac{H_{\tau 0}}{|\mathbf{H}_{\tau 0}|}, \quad \frac{\partial \chi}{\partial H_{\tau 1}} > 0$$

**3. Ударные волны в идеально проводящей намагничивающейся среде.** Соотношения на ударной волне в несжимаемой жидкости рассматривались в [9]. При этом предполагалось, что энтальпия в отсутствие магнитного поля пропорциональна температуре  $w_0 = cT$ . В данной работе используется связь  $U_{m0} = cT$ , где  $U_{m0}$  — внутренняя энергия жидкости в отсутствие магнитного поля. Поэтому результаты данной работы, связанные с исследованием ударных волн, отличаются от соответствующих результатов работы [9]. Система (1.2) с учетом (1.4) может быть преобразована к виду

$$(3.1) \quad \alpha^2 \left\{ b - \frac{m'b}{V\sqrt{1+b^2}} \right\} = \{b\}, \quad \{v_\tau\} = v_n \{b\}, \quad \frac{8\pi}{B_n^2} \{p\} = - \left\{ \frac{2m'}{V\sqrt{1+b^2}} \right\}$$

$$\frac{2}{\beta} \{\tau\} = \left\{ \alpha^2 b^2 \left( 1 - \frac{m'}{V\sqrt{1+b^2}} \right)^2 + 2m(V\sqrt{1+b^2} - m') + \frac{2m'}{V\sqrt{1+b^2}} + \right.$$

$$\left. + (V\sqrt{1+b^2} - m')^2 - 2b^2 \left( 1 - \frac{m'}{V\sqrt{1+b^2}} \right) \right\}, \quad \alpha^2 = \frac{B_n^2}{4\pi\rho v_n^2},$$

$$m' = m(1 - \tau)$$

$$(\mathbf{B}_{\tau 0} \parallel \mathbf{B}_{\tau 1} \parallel \{v_\tau\})$$

Условие неубывания энтропии (1.3) имеет вид

$$(3.2) \quad \{\tau\} \geq \tau_0 \left[ \exp \left\{ m\beta V\sqrt{1+b_0^2} \left( \frac{1-\varphi}{\varphi} + \frac{m\{\tau\}}{V\sqrt{1+b_0^2}} \right) \right\} - 1 \right]$$

$$\varphi = \varphi(\xi, b_0) = \sqrt{\frac{1+b_0^2}{1+b_0^2\xi^2}}, \quad \xi = \frac{b_1}{b_0}$$

Четвертое уравнение (3.1) является квадратным уравнением относительно скачка температуры  $\{\tau\}$ . В случае  $\beta \ll 1$ ,  $m \lesssim 1$  один из корней  $\{\tau\}_1 \sim 1/\beta$  не имеет физического смысла, а второй может быть записан в виде

$$(3.3) \quad \{\tau\} = \beta \left( \frac{m V\sqrt{1+b_0^2}(1-\varphi)}{\varphi} - \frac{b_0^2(\xi-1)m_0(\xi\varphi-1)}{2} \right), \quad m_0 = \frac{m(1-\tau_0)}{V\sqrt{1+b_0^2}}$$

Отсюда следует, что в таких скачках температура среды не меняется. При  $\beta \ll 1$ ,  $m \lesssim 1$  условие (3.2) преобразуется к виду

$$(3.4) \quad \{\tau\} \geq m\beta\tau_0 V\sqrt{1+b_0^2} (1-\varphi)\varphi^{-1}$$

С учетом (3.3) и (3.4) имеем

$$(3.5) \quad (1+b_0^2) \frac{1-\varphi}{\varphi} \geq \frac{b_0^2}{2} (\xi-1)(\xi\varphi+1)$$

Из условия (3.5) следует, что  $b_1 \geq b_0$ . Таким образом, возможны ударные волны, увеличивающие вектор магнитной индукции и магнитного поля. Магнитная проницаемость при этом уменьшается.

Из первого уравнения (3.1) и (3.3) следует

$$(3.6) \quad \gamma^2 = (1 - m_0)^{-1} \left( 1 - m_0 \frac{\xi\varphi - 1}{\xi - 1} \right)$$

$$m_0 = \frac{m(1 - \tau_0)}{\sqrt{1 + b_0^2}}, \quad \gamma = \frac{v_n}{a_{A0}} = \alpha^{-1} (1 - m_0)^{-1/2}$$

Используя неравенства  $m_0 < 1$  и  $0 \leq (\xi\varphi - 1) / (\xi - 1) \leq 1$  (последнее неравенство справедливо при любых  $\xi > 0$  и  $b_0 > 0$ ), из (3.6) получим  $1 \leq \gamma^2 < (1 - m_0)^{-1}$ . Из последней формулы видно, что рассматриваемые скачки могут распространяться лишь со скоростями, большими алфвеновской. Второе уравнение (3.2) определяет связь тангенциальных составляющих вектора магнитной индукции и скорости среды

$$(3.7) \quad v_{\tau_1} - v_{\tau_0} = \mp a_{A0} |\gamma(b_1, b_0)| (b_1 - b_0)$$

Знак минус соответствует волне, распространяющейся вправо, знак плюс — влево. Выражая вектор магнитной индукции через вектор магнитного поля формулой (2.7), можно получить

$$(3.8) \quad v_{\tau_1} - v_{\tau_0} = \mp \Psi (|\mathbf{H}_{\tau_1}|, |\mathbf{H}_{\tau_0}|) (\mathbf{H}_{\tau_1} - \mathbf{H}_{\tau_0}), \quad \Psi > 0$$

Рассматривая взаимодействие ударной волны с малыми возмущениями, распространяющимися со скоростями [10]  $a_A = B_n / \sqrt{4\pi\mu}$ ,  $a$ ,  $a_1$  ( $a_1$  — скорость распространения энтропийной волны), следуя методу, предложенному в [11, 12], выпишем условия эволюционности ударных волн

$$(3.9) \quad v_n > \max \{a_{A0}, a_{A1}\}, \quad a_0 \leq v_n \leq a_1$$

либо

$$v_n < \min \{a_{A0}, a_{A1}\}, \quad a_0 \leq v_n \leq a_1$$

При  $\beta \ll 1$  и  $m \lesssim 1$  уравнение (2.4) и второе уравнение (2.2) с точностью до бесконечно малых порядка  $\beta^2$  можно записать в виде

$$(3.10) \quad a^2 = \frac{B_n^2}{4\pi\rho} \left( 1 - \frac{m(1 - \tau)}{(1 + b^2)^{3/2}} + \frac{b^2 m^2 \beta \tau_0}{1 + b^2} \right)$$

$$(3.11) \quad \tau = \tau_0 [1 + m\beta (\sqrt{1 + b^2} + m\tau_0)]$$

Из условия  $a_1 > a_0$  и уравнений (3.10), (3.11) следует

$$(3.12) \quad \frac{-1 + \tau_0 + \tau_0^2 \beta m^2}{(1 + b_1^2)^{3/2}} \geq \frac{-1 + \tau_0 + \tau_0^2 \beta m^2}{(1 + b_0^2)^{3/2}}$$

При  $\beta \ll 1$  неравенство  $-1 + \tau_0 + \tau_0^2 \beta m^2 < 0$  всегда выполняется, а из неравенства (3.12) следует, что  $b_1 \geq b_0$ . При выполнении неравенства  $b_1 \geq b_0$  условия (3.9) также выполнены. Далее везде рассматривается случай  $\beta \ll 1$ ,  $m \lesssim 1$ .

Все выкладки и оценки, проведенные в п.3, справедливы при  $\xi \ll \min \{\tau_0, 1 - \tau_0\} / m\beta b_0$ . Это неравенство накладывает ограничение на величину вектора магнитной индукции за ударной волной.

4. Условия на вращательном и контактном разрывах в идеально проводящих несжимаемых намагничивающихся средах. На вращательном разрыве терпят скачок только  $H_\tau$  и  $v_\tau$  — тангенциальные составляющие магнитного поля и скорости, величина магнитного поля остается неизменной. Изменение тангенциальных составляющих скорости и поля связано соотношением

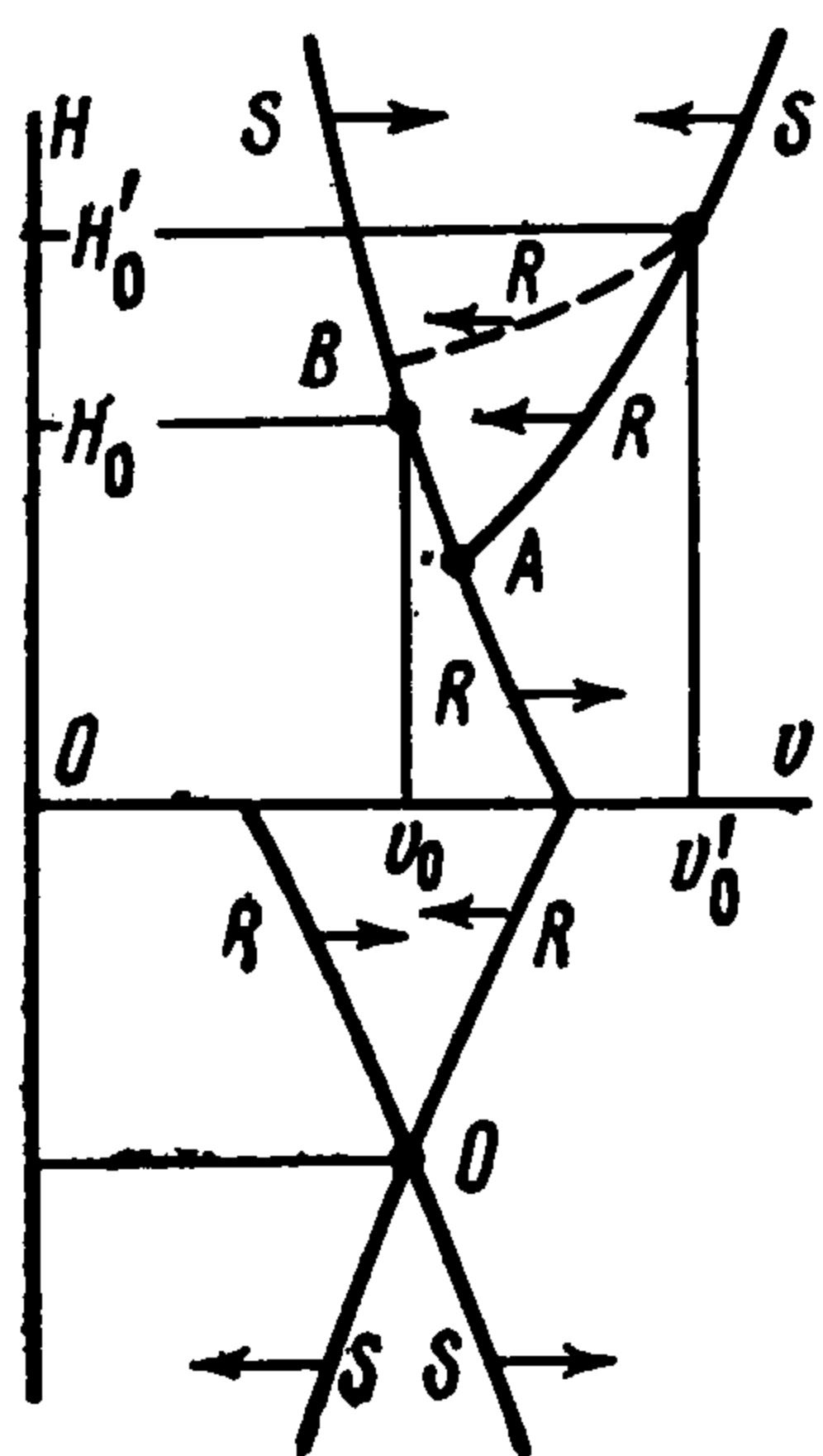
$$(4.1) \quad v_{\tau 2} - v_{\tau 1} = \mp \frac{a_1 \mu}{B_n} (H_{\tau 2} - H_{\tau 1})$$

Верхний знак соответствует волне, распространяющейся вправо, нижний — волне, распространяющейся влево. На контактном разрыве

$$(4.2) \quad H_{\tau 2} = H'_{\tau 2}, \quad v_{\tau 2} = v'_{\tau 2}$$

Температура и давление могут испытывать скачок.

5. Распад произвольного разрыва (плоский случай). Рассмотрим плоскую задачу распада произвольного разрыва  $H_{\tau 0} \parallel H'_{\tau 0} \parallel v_{\tau 0} \parallel v_{\tau 0}'$ . Ниже в п. 5 знак вектора и индекс  $\tau$  опускаются. Из условия эволюционности (3.9) и второго равенства (2.7) следует, что по



Фиг. 2

обе стороны от контактного разрыва идет ударная волна  $S$  или центрированная волна  $R$ , за которой следует альфвеновский разрыв; схематически течение представлено на фиг. 1.

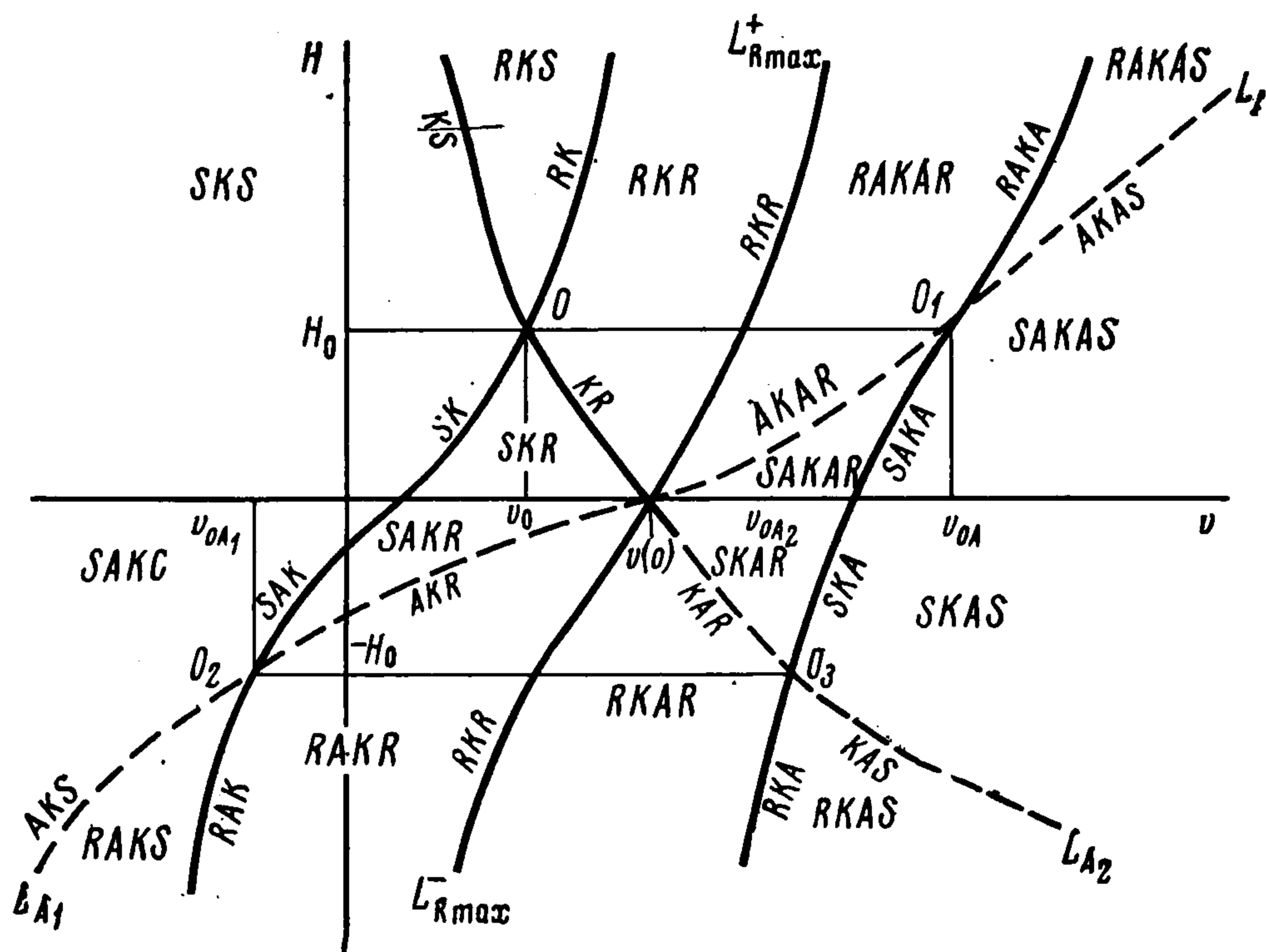
Рассмотрим в плоскости  $vH$  кривые, описываемые уравнениями (3.8) (на фиг. 2 эти кривые обозначены буквой  $S$ ) и уравнениями (2.9) (на фиг. 2 эти кривые обозначены буквой  $R$ ). Указанные кривые выходят из точек с координатами  $v_0, H_0; v_0', H_0'$ . В первом случае эти кривые соответствуют волнам, распространяющимся вправо по среде с параметрами  $v_0, H_0, T_0$ , а во втором случае — влево по среде с параметрами  $v_0', H_0', T_0'$ . Кривые, изображенные на фиг. 2, выходящие из точки  $O_1$  в нижней полу-

плоскости, соответствуют волнам  $S$  и  $R$ , идущим вправо и влево по среде, в которой тангенциальная составляющая магнитного поля отрицательна. Направление распространения волн указано на фиг. 2 стрелками. В центрированных волнах тангенциальная составляющая магнитного поля может убывать до нуля, а в ударных волнах возрастать от нуля до  $\infty$ .

На фиг. 2 изображен случай, когда  $H_0 < H_0', v_0 < v_0'$ , а линия, соответствующая центрированной волне, идущей влево по среде с параметрами  $v_0', H_0', T_0'$ , пересекается с линией, соответствующей центрированной волне, идущей вправо по состоянию, отмеченному индексом нуль (на фиг. 2 обе кривые изображены сплошной линией). Точка  $A$  пересечения этих линий с координатами  $v_1 H_1$  соответствует состоянию за фронтами центрированных волн, идущих в разные стороны от начального разрыва. Это соответствует частному случаю распада произвольного разрыва на две центрированные волны:  $RKR$ . Между такими волнами может находиться контактный разрыв, на котором рвутся температура и давление. Пунктиром на фиг. 2 изображен случай, когда волна  $R$ , идущая по среде с па-

раметрами  $v_0'$ ,  $H_0'$ ,  $T_0'$ , пересекается не с волной  $R$ , а с волной  $S$ , идущей по среде с параметрами  $v_0$ ,  $H_0$ ,  $T_0$ . Обозначим точку пересечения буквой  $B$ . Координаты точки  $B$  соответствуют состоянию за фронтами ударной волны, идущей вправо, и центрированной волны, распространяющейся влево от начального разрыва.

Между такими волнами находится контактный разрыв, на котором имеет место разрыв температуры и давления. Имеем частный случай распада



Фиг. 3

произвольного разрыва на ударную и центрированную волны:  $RKS$ . Области, в которых реализуются случаи  $RKR$  и  $RKS$ , разделены линией, выходящей из точки  $v_0H_0$  и описываемой уравнением  $v_0 = v + \chi(H_0, H)$  (фиг. 3). Эта линия соответствует центрированной волне, распространяющейся влево и изменяющей магнитное поле и скорость от значений  $v_0'$  и  $H_0'$  до значений  $v_0H_0$ . Такая линия является решением задачи о распаде произвольного разрыва на центрированную волну, движущуюся влево, и контактный разрыв  $RK$ .

Аналогичным образом в плоскости  $vH$  при фиксированных значениях  $v_0$ ,  $H_0$ ,  $T_0$  можно построить границы всех областей, в которых реализуется тот или иной вариант распада произвольного разрыва на две волны, идущие в разные стороны.

На фиг. 3 на плоскости  $vH$  изображено шестнадцать областей, каждая из которых соответствует определенной комбинации из двух волн, идущих вправо и влево,  $A$ -разрывов, следующих за ними и поворачивающих магнитное поле на  $180^\circ$ , и контактного разрыва, находящегося между ними.

Рассмотрим области значений параметров, отмеченных индексом нуль, при которых не возникают  $A$ -разрывы при распаде произвольного разрыва. При этом возможны четыре комбинации:  $RKR$ ,  $SKS$ ,  $RKS$ ,  $SKR$ . Области, соответствующие этим комбинациям, находятся в верхней полу-

плоскости слева от линии  $L_{R \max}^+$ , описываемой уравнением

$$(5.1) \quad v_0 - \chi(0, H_0) = v + \chi(0, H)$$

Эта линия представляет связь величин в центрированной волне, распространяющейся влево, с помощью которой можно попасть в  $v(0)$ ,  $0$  — точка пересечения линии, соответствующей центрированной волне, идущей по среде с параметрами  $v_0, H_0, T_0$ , с осью  $H = 0$ .

Линии, выходящие из точки  $v_0, H_0$ , соответствуют комбинациям:  $RK, KS, SK, KR$  (фиг. 3). Уравнения этих линий описываются формулами

$$(5.2) \quad \begin{aligned} RK: & \quad v_0 = v + \chi(H_0, H), \quad v > v_0 \\ KS: & \quad v = v_0 - \Psi(H, H_0)(H - H_0), \quad v < v_0 \\ SK: & \quad v_0 = v + \Psi(H_0, H)(H_0 - H), \quad v < v_0 \\ KR: & \quad v = v_0 - \chi(H, H_0), \quad v > v_0 \end{aligned}$$

Справа от линии  $L_{R \max}^+$  и в нижней полуплоскости находятся области значений параметров  $v_0', H_0'$ , при которых необходимо возникают при распаде произвольного разрыва альфвеновские разрывы, поворачивающие вектор магнитного поля на  $180^\circ$ .

Рассмотрим все возможные состояния  $O'$ , при которых распад произвольного разрыва происходит с возникновением двух  $A$ -разрывов, идущих в обе стороны от начального разрыва: за  $S$  или  $R$  волнами. Каждый из этих  $A$ -разрывов поворачивает вектор магнитного поля на  $180^\circ$ . Точки, соответствующие таким состояниям, лежат в части верхней полуплоскости  $vH$  справа от линии  $L_{R \max}^+$ , описываемой уравнением (5.1) (фиг. 3). Через точку  $O_1$  с координатами  $H_0, v_{0A} = 2H_0(a_{A0}\mu_0 + a'_{A0}\mu_0')/B_n + v_0$  проведем линию  $L_A$ , соответствующую комбинациям  $AKAS$  при  $0 < H < H_0$  и  $AKAS$  при  $H > H_0$ . Уравнение этой линии запишется в виде

$$(5.3) \quad \begin{aligned} v &= v_0 - \chi(H, H_0) + 2H(a_{A0}\mu_0 + a'_{A0}\mu_0')/B_n, \quad 0 < H < H_0 \\ v &= v_0 - \Psi(H, H_0)(H - H_0) + 2H(a_{A0}\mu_0 + a'_{A0}\mu_0')/B_n, \\ & \quad H > H_0 \end{aligned}$$

Через точку  $O_1$  проведем линии

$$(5.4) \quad \begin{aligned} v_{0A} &= v + \chi(H_0, H), \quad H > H_0 \\ v_{0A} &= v + \Psi(H_0, H)(H_0 - H), \quad 0 < H < H_0 \end{aligned}$$

Линии (5.3) и (5.4) разобьют область, лежащую справа от линии  $L_{R \max}^+$ , на четыре части, точки которых соответствуют распаду произвольного разрыва на следующие комбинации волн (фиг. 3):  $RAKAR, RAKAS, SAKAR, SAKAS$ . Если точка, соответствующая состоянию  $O'$ , лежит в нижней полуплоскости  $H_0' < 0$ , то комбинация волн при распаде произвольного разрыва будет содержать один альфвеновский разрыв поворачивающий магнитное поле на  $180^\circ$ , идущий справа или слева от контактного. На фиг. 3 в нижней полуплоскости  $H < 0$  изображено восемь областей, соответствующих различным комбинациям волн и разрывов, содержащих один такой альфвеновский разрыв. Эти области отделены

одна от другой линиями  $L_{R \max}^{\bar{}}$ ,  $L_{A_1}$ ,  $L_{A_2}$ . Линия  $L_{R \max}^{\bar{}}$  проходит через точку  $v(0), 0$ ; ее уравнение имеет вид

$$(5.5) \quad v_0 = v + \chi(0, -H) + \chi(0, H_0), \quad H < 0$$

и соответствует распаду разрыва на комбинацию  $RKR$ . Слева (справа) от линии  $L_{R \max}^{\bar{}}$  находятся области, точки которых соответствуют значениям параметров обозначенных индексом  $0'$ , при которых возникает один  $A$ -разрыв, идущий влево (вправо) от контактного разрыва.

Построенные в нижней полуплоскости  $vH$  линии  $L_{A_1}$  и  $L_{A_2}$  проходят через точку  $v(0), 0$ . Линия  $L_{A_1}$  соответствует комбинации  $AKR$  при  $-H_0 < H < 0$ ,  $AKS$  при  $H < -H_0$ ; линия  $L_{A_2}$  — комбинациям  $KAR$  при  $-H_0 < H < 0$ ,  $KAS$  при  $H < -H_0$  (фиг. 3). Уравнения этих линий имеют вид

$$(5.6) \quad \begin{aligned} L_{A_1}: \quad v &= v_0 - \chi(-H, H_0) + 2Ha'_{A_0}\mu'_0 / B_n, & -H_0 < H < 0 \\ v &= v_0 + \Psi(-H, H_0)(H + H_0) + 2Ha'_{A_0}\mu'_0 / B_n, & H < -H_0 \end{aligned}$$

$$(5.7) \quad \begin{aligned} L_{A_2}: \quad v &= v_0 - \chi(-H, H_0) - 2Ha_{A_0}\mu_0 / B_n, & -H_0 < H < 0 \\ v &= v_0 + \Psi(-H, H_0)(H + H_0) - 2Ha_{A_0}\mu_0 / B_n, & H < -H_0 \end{aligned}$$

Из точки  $O_2$  линии  $L_{A_1}$  с координатами  $v_{0A_1} = v_0 - 2a_{A_0}'\mu'_0 H_0 / B_n$ ,  $-H_0$  выходят кривые, соответствующие комбинациям волн  $RAK$  и  $SAK$  (фиг. 3). Уравнения этих кривых соответственно имеют вид

$$(5.8) \quad \begin{aligned} v_{0A_1} &= v + \chi(H_0, -H), & H < -H_0 \\ v_{0A_1} &= v - \Psi(H_0, -H)(H_0 + H), & -H_0 < H < 0 \end{aligned}$$

Аналогично из точки  $O_3$  линии  $L_{A_2}$  с координатами  $-H_0$ ,  $v_{0A_2} = v_0 + 2a_{A_0}\mu_0 H_0 / B_n$  выходят кривые, соответствующие комбинациям  $RKA$ ,  $SKA$ . Уравнения этих кривых имеют вид

$$(5.9) \quad \begin{aligned} v_{0A_2} &= v + \chi(H_0, -H), & H < -H_0 \\ v_{0A_2} &= v + \Psi(H_0, -H)(-H_0 - H), & -H_0 < H < 0 \end{aligned}$$

Линии (5.5) — (5.9) делят нижнюю полуплоскость на восемь областей, соответствующих следующим комбинациям волн:  $SAKS$ ,  $SAKR$ ,  $RAKR$ ,  $RAKS$ ,  $SKAS$ ,  $SKAR$ ,  $RKAS$ ,  $RKAR$  (фиг. 3). Из фиг. 3 видно, что существуют всего тридцать шесть случаев всевозможных комбинаций волн и разрывов  $S$ ,  $R$ ,  $K$ ,  $A$  при распаде произвольного разрыва в плоском случае, когда  $H_0 \parallel H_0' \parallel v_0 \parallel v_0'$ .

**6. Распад произвольного разрыва (пространственный случай).** Рассмотрим пространственную задачу о распаде произвольного разрыва: векторы скорости и магнитного поля по обе стороны от плоскости разрыва лежат в разных плоскостях. Условиям на контактном разрыве невозможно удовлетворить без введения пространственных альфвеновских разрывов.

Построим решение задачи в плоскости  $\Delta v = v_0 - v_0'$ ,  $\Delta w = w_0 - w_0'$  разностей проекций скоростей по обе стороны от разрыва на оси  $y$  и  $z$ . Комбинациям из двух  $S$ -волн или  $R$ -волн, идущих в разные стороны от начального разрыва, соответствуют в плоскости  $\Delta v \Delta w$  области, а комби-

нациям, содержащим менее двух  $S$ - или  $R$ -волн, соответствуют в плоскости  $\Delta v \Delta w$  границы областей — окружности.

Пусть начальные условия таковы, что пространственный начальный разрыв распадается на  $AKAS$  комбинацию. Составим уравнение линии, соответствующей данной комбинации, в плоскости  $\Delta v$ ,  $\Delta w$

$$(6.1) \quad (\Delta v_\tau - L)^2 = R^2, \quad R = \frac{-|H_0'| |H_2'|}{B_n |H_2'|} (a_{A0} \mu_0 + a'_{A0} \mu_0')$$

$$L = -a_{A0} \mu_0 \frac{H_0'}{B_n} - a'_{A0} \mu_0' \frac{|H_0'| |H_0|}{B_n |H_0|} + \Psi(|H_0|, |H_0'|) (|H_0'| - |H_0|) \frac{H_0}{|H_0|}$$

Здесь индекс  $\tau$  у вектора  $H_\tau$  опущен.

Линия, описываемая уравнением (6.1), является окружностью с центром в точке  $\Delta v = L_y$ ,  $\Delta w = L_z$  и радиусом, равным  $|R|$ .

Пусть  $H_{\tau_0} \parallel H_{\tau_0}'$ . Выберем направление магнитного поля за ось  $y$ ; ось  $z$  перпендикулярна оси  $y$  и нормали к поверхности разрыва. При этом центр окружности (6.1) лежит на оси  $\Delta w = 0$ , так что окружность пересекает ось  $\Delta w = 0$  в двух точках  $\Delta v_1$ ,  $\Delta v_2$ . Одна из них соответствует  $KS$ -комбинации, другая —  $AKAS$ -комбинации, где в  $A$ -разрывах поворот поля происходит на  $180^\circ$ . Оба значения  $\Delta v_1$ ,  $\Delta v_2$  отстоят от точки  $\Delta v = L_y$  на расстояние  $|R|$ .

Таким образом, при  $H_{\tau_0} \parallel H_{\tau_0}'$  линия  $AKAS$  может быть получена следующим образом: в плоскости  $vH$  (фиг. 3) проводится линия  $H = H_0'$ ; точки пересечения этой линии с линиями, соответствующими комбинациям  $KS$  и  $AKAS$  в плоскости  $vH$ , наносятся на ось  $\Delta v$  в плоскости  $\Delta v$ ,  $\Delta w$ , и эти точки вращаются относительно их центра. Описанная линия разделяет две области  $SAKAS$  и  $RAKAS$ .

Если вектор магнитного поля справа  $H_{\tau_0}$  не параллелен вектору магнитного поля слева  $H_{\tau_0}'$ , то  $L_z \neq 0$ , радиус окружности (6.1) не меняется. Таким образом, в этом случае линия в плоскости  $\Delta v$ ,  $\Delta w$ , которой соответствует комбинация  $AKAS$ , является окружностью, построенной в предположении  $H_{\tau_0} \parallel H_{\tau_0}'$ , сдвинутой в соответствии с уравнением (6.1).

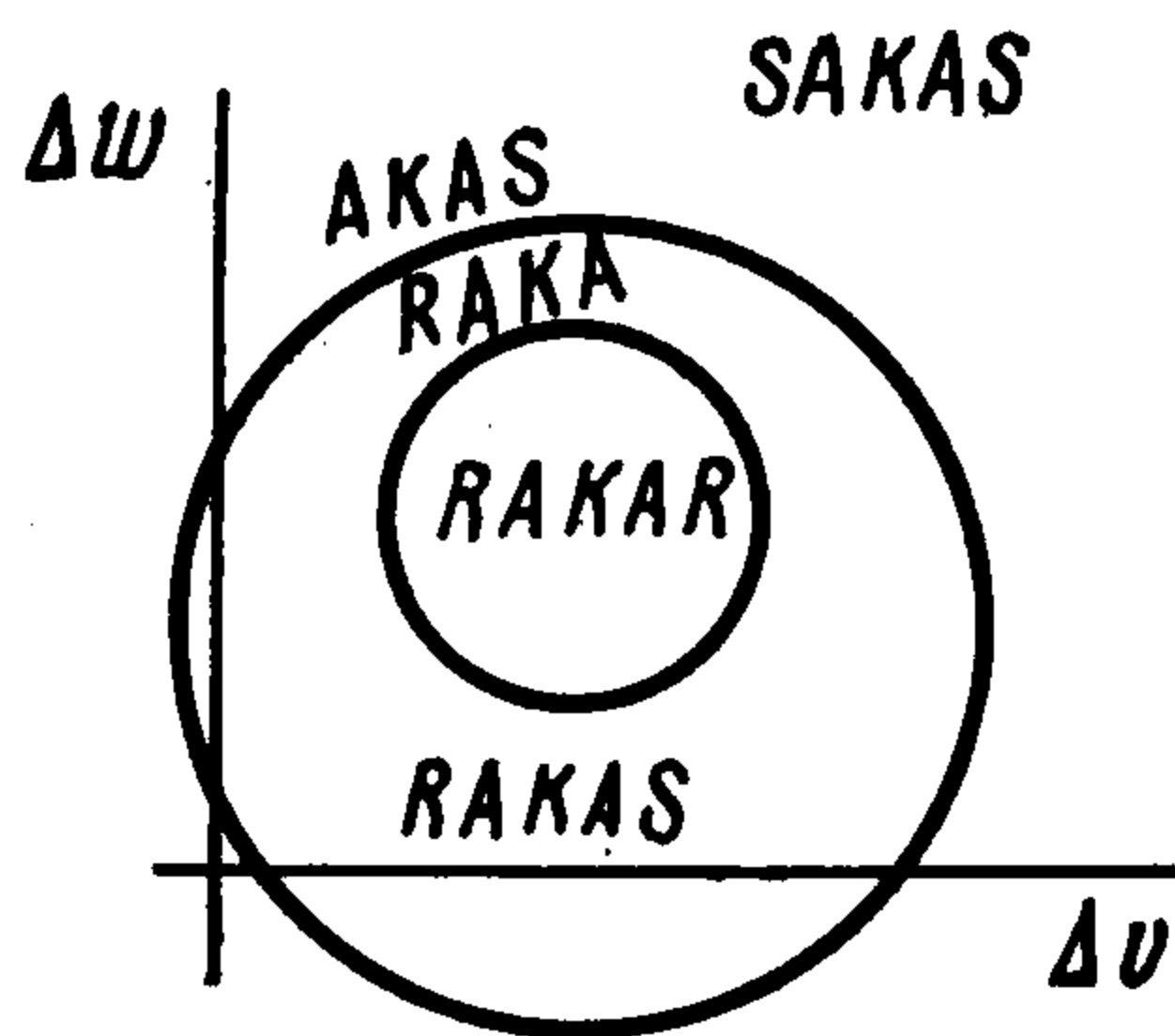
Рассмотрим случай  $|H_{\tau_0}'| > |H_{\tau_0}|$ ; угол между  $H_{\tau_0}$  и  $H_{\tau_0}'$  — произвольный. В этом случае в области  $\Delta v$ ,  $\Delta w$  окружности, соответствующие комбинациям  $AKAS$  и  $RAKA$ , находящиеся одна в другой, делят всю плоскость на области, соответствующие комбинациям  $SAKAS$ ,  $RAKAS$ ,  $RAKAR$  (фиг. 4). Уравнения этих окружностей можно записать по аналогии с (6.1).

В случае  $|H_{\tau_0}'| < |H_{\tau_0}|$  в области  $\Delta v$ ,  $\Delta w$  нужно изобразить две окружности, соответствующие комбинациям  $SAKA$  и  $AKAR$ , которые делят плоскость на три области, соответствующие комбинациям  $SAKAS$ ,  $SAKAR$ ,  $RAKAR$  (фиг. 5).

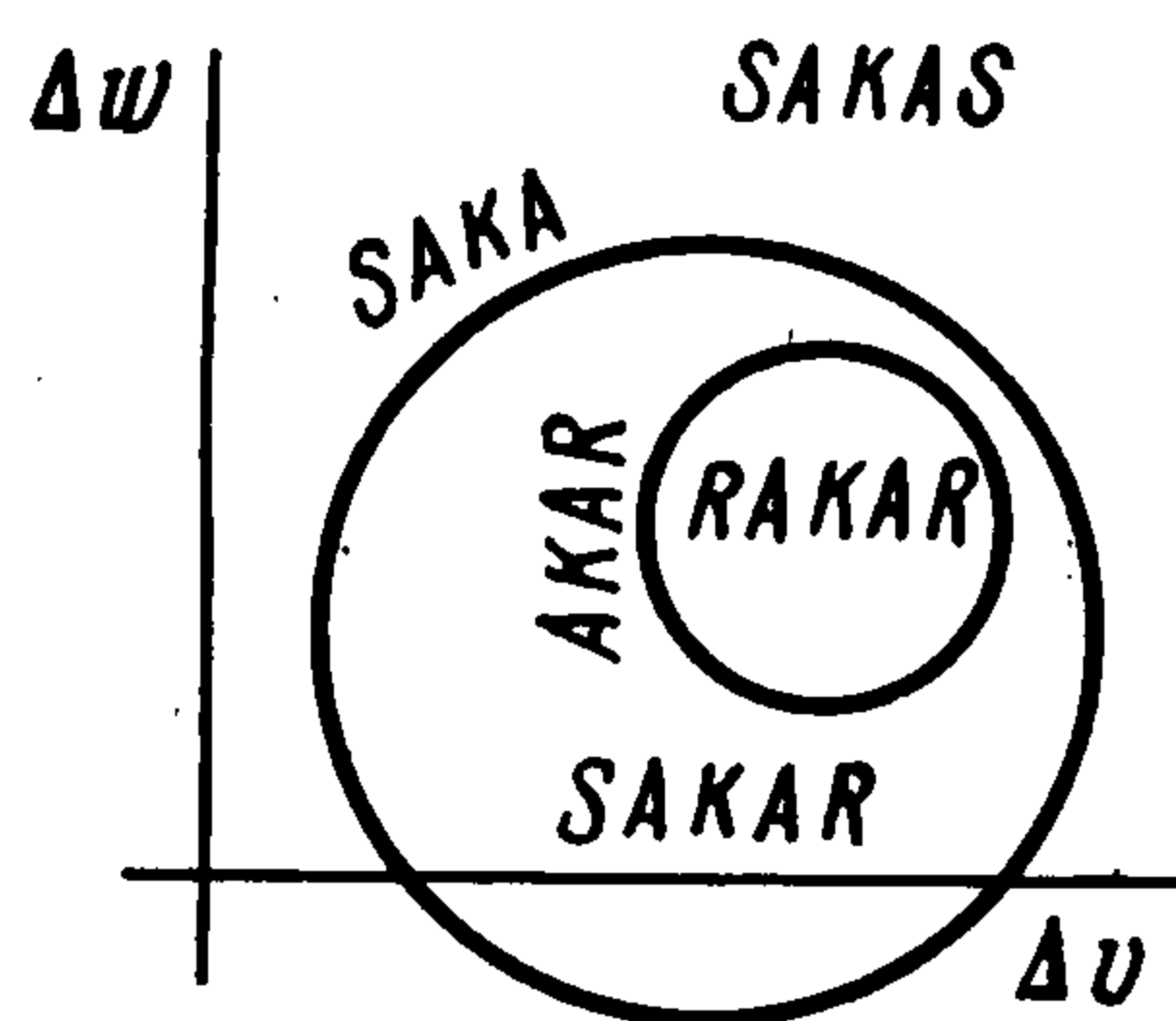
В случае  $|H_{\tau_0}'| = |H_{\tau_0}|$  окружность, соответствующая комбинации  $AKA$ , делит плоскость  $\Delta v$ ,  $\Delta w$  на две области —  $SAKAS$  и  $RAKAR$  (фиг. 6).

Пусть заданы значения параметров среды по обе стороны от плоскости разрыва. Поскольку составляющие поля  $H_{\tau_0}$ ,  $H_{\tau_0}'$  заданы, известно, уравнения каких линий нужно написать, пользуясь формулами (2.9), (3.8),

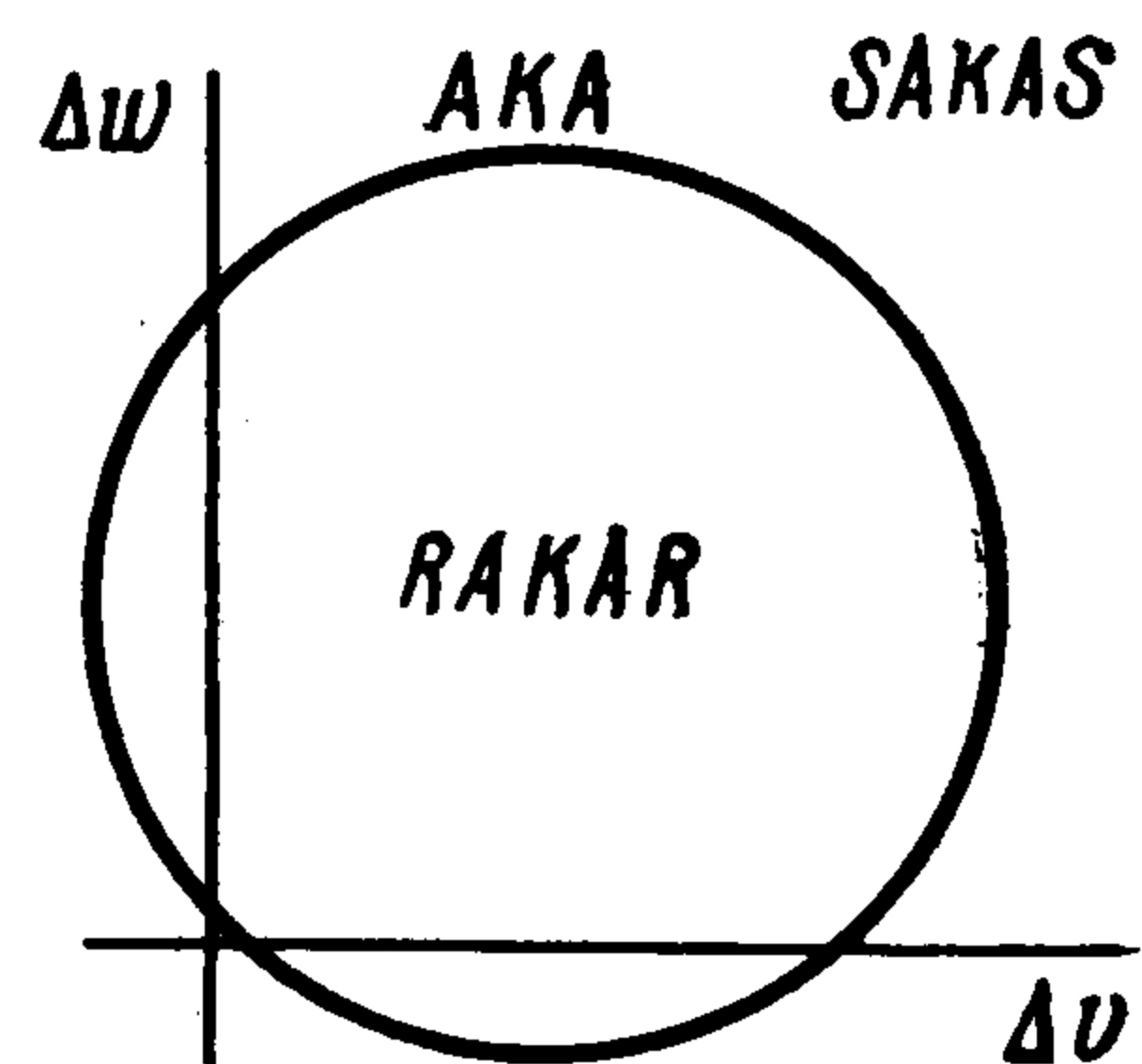
(4.1), чтобы построить соответствующую фигуру в  $\Delta v, \Delta w$  плоскости. После того, как фигура построена, поскольку  $\Delta v$  и  $\Delta w$  известны, выясняем, в какой области лежит точка с этими координатами, т. е. узнаем комбинацию волн и разрывов, на которые распадается начальный разрыв.



Фиг. 4



Фиг. 5



Фиг. 6

Приравнивая суммы скачков каждой магнитогидродинамической величины на каждой из возникающих волн и разрывов первоначальному скачку, получаем систему алгебраических уравнений, которую нужно решать численно.

Авторы благодарят В. В. Гогосова за предложенную тему.

Поступила 30 VI 1975

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Kotchine N. E. Sur la theorie des ondes de choc dans un fluide. Rend. Circolo Nat. Palermo, 1926, vol. 50.
2. Кочин Е. Н. К теории разрывов в жидкости. Собр. соч., т. 2. М.-Л., Изд-во АН СССР, 1949.
3. Седов Л. И. Методы подобия и размерности в механике. М., «Наука», 1967.
4. Бам-Зеликович Г. М. Распадение произвольного разрыва в горючей смеси. В сб.: Теоретическая гидромеханика, № 4. М., Оборонгиз, 1949.
5. Гогосов В. В. Распад произвольного разрыва в магнитной гидродинамике. ПММ, 1961, т. 25, вып. 1.
6. Седов Л. И. Механика сплошной среды, т. 1. М., «Наука», 1973.
7. Тарапов И. Е. К гидродинамике поляризующихся и намагничивающихся сред. Магнитная гидродинамика, 1972, № 1.
8. Гогосов В. В., Васильева Н. Л., Тактаров Н. Г., Шапошникова Г. А. Уравнения гидродинамики поляризующихся и намагничивающихся многокомпонентных и многофазных сред. Разрывные решения. Исследование разрывных решений со скачком магнитной проницаемости. Изд-во МГУ, 1975.
9. Тарапов И. Е. Поперечные волны и разрывы в идеальной намагничивающейся жидкости. Изв. АН СССР, МЖГ, 1972, № 6.
10. Тарапов И. Е. Звуковые волны в намагничивающейся среде. ПМТФ, 1973, № 1.
11. Ахиезер А. И., Любарский Г. Я., Половин Р. В. Об устойчивости ударных волн в магнитной гидродинамике. ЖЭТФ, 1958, т. 35, вып. 3.
12. Сыроватский С. И. Об устойчивости ударных волн в магнитной гидродинамике. ЖЭТФ, 1958, т. 35, вып. 6.