

**ДИФРАКЦИЯ УДАРНОЙ ВОЛНЫ НА ТОНКОМ КЛИНЕ,
ДВИЖУЩЕМСЯ СО СВЕРХЗВУКОВОЙ СКОРОСТЬЮ,
ПРИ НЕРЕГУЛЯРНОМ ВЗАИМОДЕЙСТВИИ ВОЛН**

Л. Е. Пекуровский

(Москва)

Изучается дифракция ударной волны произвольной интенсивности на тонком клине, движущемся со сверхзвуковой скоростью. Плоскость ударной волны образует с плоскостью симметрии клина угол, мало отличающийся от прямого. Взаимодействие фронтов предполагается нерегулярным.

В возмущении давления вдоль фронта обнаруживается особенность того же типа, что и при дифракции слабого скачка давления на клине конечного угла раствора с присоединенным скачком уплотнения, изученной в работе [1]. Возникающая здесь крайняя задача, в решении которой использованы результаты работ [2, 3], позволяет найти возмущения давлений на стенку и вдоль ударного фронта, а также формы фронта в элементарных функциях.

Для случая регулярного взаимодействия та же задача разобрана в работе [3]. Там предложен путь обобщения решения и на случай нерегулярного взаимодействия, однако он представляется нереализуемым.

1. Тонкий клин движется в покоящемся идеальном газе со сверхзвуковой скоростью $a_\infty M_\infty$; a_∞ — скорость звука в газе. Угол полураствора клина ε — малый параметр задачи. Ребро клина в момент времени $t = 0$ встречается с фронтом плоской ударной волны произвольной интенсивности, распространяющейся со скоростью $a_\infty M$. Плоскость ударной волны образует с плоскостью симметрии клина угол $\chi = \pi / 2 - \delta$, мало отличающийся от прямого (угол δ порядка ε).

Возникающее при $t > 0$ плоское автомодельное движение представляет собой возмущение однородного потока за ударной волной. Картина течения в плоскости, перпендикулярной ребру клина, изображена на фиг. 1, а. Дуга окружности Маха, центр E которой совпадает с частицей газа, находившейся в момент $t = 0$ у острия клина, вместе с участками ударного фронта $I'F'$ и стенки $D'F'$ ограничивает возникающую область неоднородных возмущений. Последние, распространяясь со скоростью a_1 в области 1, достигнут фронта ударной волны, но не пройдут далее, а вызовут слабое его искривление на участке $I'F'$. К дифракционной области $I'B'D'EF'I'$ примыкают области однородных возмущений: слева — область 5 — $NB'D'$, а справа — область 2, отделенная от области ∞ фронтом слабого скачка давления.

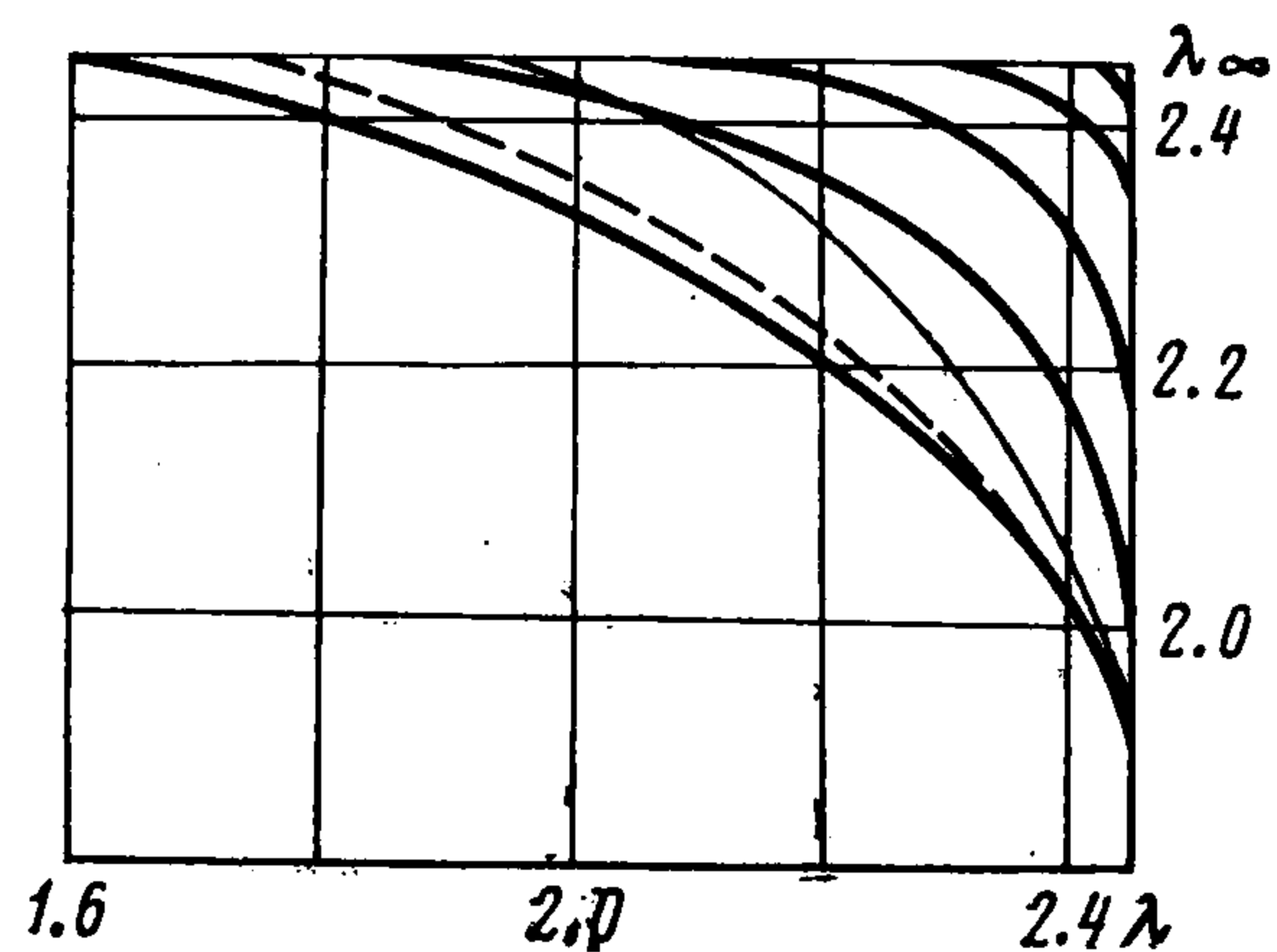
Дифракция ударной волны осложнена взаимодействием ее со слабым плоским скачком давления, вызванным сверхзвуковым обтеканием клина.

Из последней формулы можно получить зависимость между M и M_∞ , соответствующую заданному положению точки пересечения фронтов G

$$M_\infty = [Ma_\infty^2/a_1^2 + y_G \sqrt{y_G^2 + (M^2 - 1)a_\infty^2/a_1^2}] / (y_G^2 - a_\infty^2/a_1^2)$$

Графически, однако, удобнее представить ее как зависимость между величинами λ и λ_∞ (отношениями скоростей ударной волны и клина к критической скорости звука в области ∞). Диапазон значений λ , λ_∞ , отвечающий нерегулярным взаимодействиям, соответствует области, лежащей выше нижней сплошной кривой, вдоль которой $y_G^* = y_G/y_0 = 1$ (фиг. 2). Остальные жирные линии соответствуют значениям y_G^* , равным 0.8, 0.6, 0.4, 0.2 ($\kappa = 1.4$).

Если зафиксировать λ и приближать λ_∞ к $\sqrt{(\kappa + 1)/(\kappa - 1)}$, то точка G будет стремиться к некоторому положению, находящемуся на конечном расстоянии от стенки. Она асимптотически приблизится к стенке, лишь если одновременно $\lambda, \lambda_\infty \rightarrow \sqrt{(\kappa + 1)/(\kappa - 1)}$.



Фиг. 2

2. Известно, что после перехода к полярным координатам $x = r \cos \theta$, $y = r \sin \theta$ и преобразования Буземана $R = (1 - \sqrt{1 - r^2})/r$ функция p удовлетворяет внутри возмущенной области уравнению Лапласа, ее нормальная производная на участке DF границы равна нулю, а вдоль участков дуг IB и BD давление постоянно: $p = 0$ на IB и $p = p_5$ на BF

$$(2.1) \quad p_5 = \frac{(M_1 + M_\infty a_\infty/a_1)^2}{\sqrt{(M_1 + M_\infty a_\infty/a_1)^2 - 1}} \left(1 + \frac{M_1 \delta / \varepsilon}{M_1 + M_\infty a_\infty/a_1} \right)$$

При этом существенно доказанная Смирлом [3] непрерывность второй производной функции p по нормали к тангенциальному разрыву.

Линеаризация законов сохранения на ударном фронте, уравнение которого $x = x_0 + \varepsilon f(y)$, приводит к краевым значениям для функций u , v , p на участке IF границы области, выражения для которых отличаются лишь знаком аргумента ϑ — функции от формул (2.1) работы [1] (в последние вместо M_c следует подставить число M). Входящие туда величины h_u , h_v , h_p в рассматриваемой задаче имеют вид [3].

$$(2.2) \quad h_u = \frac{1}{\kappa + 1} \frac{a_\infty}{a_1} \frac{2M_\infty - (\kappa - 1) M_\infty M (M + 2M_\infty)}{M^2 \sqrt{M^2 - 1}}$$

$$h_v = \frac{a_\infty}{a_1} M_\infty, \quad h_p = \frac{M_\infty}{\kappa + 1} \frac{p_\infty}{p_1} \frac{4M + (2M^2 - \kappa + 1) M_\infty}{\sqrt{M_\infty^2 - 1}}$$

Из выражений для возмущений u , v , p на участке IF можно получить краевое условие для одной только функции p , а также соотношение, используемое ниже для нормировки решения, отличающиеся знаком перед δ -функцией от формул (2.2) и (2.3) той же работы.

Преобразование Буземана, переводящее участок IF границы в дугу окружности плоскости $\zeta = R \exp i\theta$, приводит к краевому условию для давления вдоль этой дуги, отличающемуся также лишь знаком перед δ -функцией от выражения (2.5) работы [1].

Суперпозиция конформных преобразований образа области дифракции в верхнюю полуплоскость плоскости $\omega = \xi + i\eta$ имеет вид [2]

$$\omega = (z^2 + z^{-2}) / 2, \quad z = i(\zeta\zeta_0 - 1) / (\zeta - \zeta_0), \quad \zeta = x_0 + iy_0$$

При этом образом стенки оказывается отрезок $-1 < \xi < 1$, образами фронта и маховской дуги — лучи $\xi > 1$ и $\xi < -1$, точки B и G приобретают координаты

$$\xi_B = -[(1 - x_0x_1)^2 + y_0^2y_1^2] / [(1 - x_0x_1)^2 - y_0^2y_1^2], \quad \eta_B = 0$$

$$\xi_G = (y_0^2 + y_G^2) / (y_0^2 - y_G^2), \quad \eta_G = 0.$$

Учет условий на всех участках контура позволяет замкнуть постановку краевой задачи Римана — Гильберта для аналитической функции $\Gamma = \partial p / \partial \eta + i \partial p / \partial \xi$ единым соотношением, имеющим место вдоль действительной оси $\eta = 0$

$$(2.3) \quad P(\xi) \partial p / \partial \eta - Q(\xi) \partial p / \partial \xi = S \delta(\xi - \xi_G) - p_5 \delta(\xi - \xi_B)$$

где соответственно

$$P(\xi) = b(\xi), 1, 0; \quad Q(\xi) = 1, 0, 1 \text{ при } \xi > 1, -1 < \xi < 1, \xi < -1$$

$$b(\xi) = (\gamma_1 + \gamma_2) \sqrt{\xi - 1} / (\gamma_1\gamma_2 - \xi + 1)$$

$$\gamma_{1,2} = \sqrt{2x_0M} \{M \pm (M^2 - 1)[M^2 + 2 / (\kappa - 1)]^{-1/2}\}$$

Величина S определяется формулой (2.4) работы [1] при $y = y_G$. Ниже через b будет обозначено $b(\xi_G)$.

3. В случае, когда в правой части краевого условия (2.3) первое слагаемое отсутствует, решение построено Лайтхиллом [2] и использовано, в частности, в работе [3] при рассмотрении той же задачи при регулярном взаимодействии волновых фронтов. Если вся правая часть (2.3) тождественно равна нулю (однородная задача), оно дается выражением

$$\Phi(\omega) = [\sqrt{\omega^2 - 1} (\gamma_1 - i\sqrt{\omega - 1})(\gamma_2 - i\sqrt{\omega - 1})]^{-1}$$

Поэтому решение исходной неоднородной задачи (2.3) может быть записано в виде [4,5]

$$\Gamma(\omega) = \Phi(\omega)[K_1(\omega - \xi_B)^{-1} + K_2(\omega - \xi_G)^{-1} + K_3]$$

$$K_1 = (p_5 / \pi)(\gamma_1 + \sqrt{1 - \xi_B})(\gamma_2 + \sqrt{1 - \xi_B}) \sqrt{\xi_B^2 - 1}$$

$$K_2 = (S / \pi)(\xi_G - 1 - \gamma_1\gamma_2) \sqrt{\xi_G^2 - 1}$$

На действительной оси оно принимает значение

$$\Gamma^+(\xi) = \Phi^+(\xi) \left[\frac{K_1}{\xi - \xi_B} + \frac{K_2}{\xi - \xi_G} + K_3 \right] - ip_5 \delta(\xi - \xi_B) -$$

$$- \frac{S}{b + i} \delta(\xi - \xi_G)$$

Отделение мнимой части этого выражения дает производную функции p вдоль образа стенки и вдоль образа ударного фронта

$$(3.1) \quad \frac{\partial p}{\partial \xi} = - \frac{K_1(\xi - \xi_B)^{-1} + K_2(\xi - \xi_G)^{-1} + K_3}{\sqrt{1 - \xi^2}(\gamma_1 + \sqrt{1 - \xi})(\gamma_2 + \sqrt{1 - \xi})}$$

$$(3.2) \quad \frac{\partial v}{\partial \xi} = \frac{(\gamma_1 + \gamma_2) [K_1(\xi - \xi_B)^{-1} + K_2(\xi - \xi_G)^{-1} + K_3]}{(\gamma_1^2 + \xi - 1)(\gamma_2^2 + \xi - 1)\sqrt{\xi + 1}} + \frac{S}{b^2 + 1} \delta(\xi - \xi_G)$$

$\xi > 1, \eta = 0$

Условие нормировки

$$B \int_1^{\infty} \frac{\partial v}{\partial \xi} \frac{d\xi}{y(\xi)} = h_v - \frac{h_p B}{y_G} - \frac{a_{\infty}}{a_1} M_{\infty} - M_1 \left(1 + \frac{\delta}{\varepsilon}\right)$$

в котором интеграл понимается в смысле главного значения по Коши, дает выражение для константы K_3 , которое за его громоздкостью опущено.

4. Интегрирование выражений (3.1) и (3.2) дает в элементарных функциях возмущение давления на стенку и вдоль ударного фронта (формулы (4.1) и (4.2) соответственно)

$$(4.1) \quad p(\tau) = p_5 - \sum_{i=1}^4 c_i \operatorname{arctg} \sqrt{\frac{\gamma_i - \sqrt{2}}{\gamma_i + \sqrt{2}}} \tau - c_5 \operatorname{arctg} \frac{2y_G^* \tau}{1 - \tau^2} +$$

$$+ c_0 \ln \frac{\tau^2 - 2\sqrt{1 - y_G^{*2}} + 1}{\tau^2 + 2\sqrt{1 - y_G^{*2}} + 1}, \quad \tau = \sqrt{\frac{(1 - x_0)(1 + x)}{(1 + x_0)(1 - x)}}$$

$$(4.2) \quad p(y) = -\frac{1}{2} \sum_{i=1}^3 d_i \operatorname{arctg} \sqrt{\frac{(\gamma_i^2 - 2)(y_0^2 - y^2)}{2y_0^2}} -$$

$$- c_0 \ln \frac{(\sqrt{y_0^2 - y_G^2} + \sqrt{y_0^2 - y^2})^2}{|y^2 - y_G^2|} - \frac{S}{b^2 + 1} \vartheta(y_G - y)$$

Здесь

$$c_1 = \frac{4\gamma_1}{\pi \sqrt{\gamma_1^2 - 2}} \frac{\gamma_2 + \gamma_1}{\gamma_2 - \gamma_1} \left[\frac{\sqrt{\gamma_3^2 - 2}}{\gamma_3 - \gamma_1} p_5 + s(Ay_0^2 - x_0 B) y_G^* + \frac{y_0 \gamma_2 K_0}{(\gamma_1 + \gamma_2) B} \right]$$

$$c_2 = \frac{4\gamma_2}{\pi \sqrt{\gamma_2^2 - 2}} \frac{\gamma_1 + \gamma_2}{\gamma_1 - \gamma_2} \left[\frac{\sqrt{\gamma_3^2 - 2}}{\gamma_3 - \gamma_2} p_5 + s(Ay_0^2 - x_0 B) y_G^* + \frac{y_0 \gamma_1 K_0}{(\gamma_1 + \gamma_2) B} \right]$$

$$c_3 = \frac{2p_5}{\pi} \frac{(\gamma_1 + \gamma_3)(\gamma_2 + \gamma_3)}{(\gamma_1 - \gamma_3)(\gamma_2 - \gamma_3)}, \quad c_4 = \frac{2p_5}{\pi}, \quad c_5 = \frac{2}{\pi} \frac{S}{b^2 + 1}$$

$$c_0 = -(1/\pi) S b / (b^2 + 1) = (s/\pi) y_G \sqrt{y_0^2 - y_G^2}, \quad y_G^* = y_G / y_0$$

$$s = S / [(b^2 + 1)(Ay_G^2 - x_0 B)], \quad K_0 = -M_1(1 + \delta/\varepsilon) -$$

$$- B [h_p + S/(b^2 + 1)] / y_G$$

$$\gamma_3 = \sqrt{1 - \xi_B}, \quad \gamma_4 = -\gamma_3, \quad d_1 = c_1, \quad d_2 = c_2, \quad d_3 = c_3 - c_4$$

$$\vartheta(y_G - y) = \begin{cases} 0, & y > y_G \\ 1, & y < y_G \end{cases}$$

Следует заметить, что если $\kappa > 5/3$, то при значениях M , связанных нужным неравенством с числом κ в работе [6], $\gamma_2^2 - 2 < 0$; в этих случаях в слагаемых выражений (4.1) и (4.2) с коэффициентами c_2 и d_2 символ arctg заменяется на символ Arth , $\gamma_2^2 - 2$ на $2 - \gamma_2^2$ и $\gamma_2 - \sqrt{2}$ на $\sqrt{2} - \gamma_2$.

Из (4.2) видно, что, как и в случае дифракции, изученной в работе [1], возмущение давления вдоль ударного фронта состоит из гладкой функции, скачка давления величиной $S / (b^2 + 1)$ и логарифмической особенности в точке G .

На фиг. 2 тонкой линией указана зависимость между характерными параметрами изучаемой задачи λ и λ_∞ , отвечающая ветвлению $S = 0$, когда в малой окрестности точки G течение состоит из однородных потоков, разделенных тангенциальным разрывом. Кривая ветвления здесь соответствует части одной из кривых ветвления (нижней), характеризующих течение в упомянутой задаче дифракции [1].

Ветвление второго рода, когда сохраняется лишь скачок давления, имеет место при попадании тройной точки G в точку I ($y_G = y_0$). Этим случаям на фиг. 2 соответствует нижняя сплошная линия. Логарифмический член в решении отсутствует и при $y_G = 0$ (в работе [1] это представляется средней жирной линией фиг. 2), однако в разбираемом случае ударной волны и тонкого клина последнее никогда не может быть реализовано: координата y_G лишь асимптотически стремится к нулю при неограниченном одновременном возрастании чисел M и M_∞ .

Ветвлению третьего рода (остается только логарифмическая особенность), наступающему при $y_G = \sqrt{x_0 B/A}$, на фиг. 2 соответствует пунктирная линия.

Следует заметить, что все три кривые на фиг. 2, описанные выше, выходят из одной точки.

Когда взаимодействие волн регулярно ($y_G > y_0$), возникает преломленный волновой фронт, касающийся маховской дуги, при этом образуются области 3 и 4 (фиг. 1, работа [3]), разделенные тангенциальным разрывом. Можно показать, что в этом случае

$$(4.3) \quad p_3 = p_4 = (x_0 B - A y_G^2) S / (A y_G^2 - x_0 B + y_G \sqrt{y_G^2 - y_0^2})$$

Полученные в работе [3] формулы для давления на стенку и вдоль ударного фронта при регулярном взаимодействии, которому в плоскости λ , λ_∞ отвечает область, находящаяся ниже нижней сплошной линии, непрерывно переходят при $y_G \rightarrow y_0$ в формулы, полученные из (4.1) и (4.2), когда $y_G = y_0$; области 3 и 4 стягиваются при этом в точку I , а, как видно из (4.3), $p_3 = p_4 \rightarrow (-S)$.

Таким образом, решение данной задачи и решение задачи с регулярным взаимодействием непрерывно переходят одно в другое вместе со сменной типа взаимодействия волн.

5. Краевое условие, связывающее возмущение давления на фронте с его формой, можно считать дифференциальным уравнением для $f(y)$

$$(5.1) \quad f - y f' = (B / M_1) [p(y) - h_p \vartheta(y_G - y)]$$

в котором $p(y)$ дается выражением (4.2). Его решение с учетом краевого условия $f = 0$ при $y = y_0$ имеет вид

$$(5.2) \quad f(y) = \frac{B}{M_1} \left[F(y) - \frac{c_0 y_0}{y_G} (y - y_G) \ln |y - y_G| - \left(h_p + \frac{S}{b^2 + 1} \right) \frac{y_G - y}{y_G} \vartheta(y_G - y) \right]$$

$$F_1(y) = F_1(y) - (y/y_0) F_2(y)$$

Здесь функцию $F_1(y)$ можно считать даваемой формулой (4.2), в которой последнее слагаемое следует опустить, а знаменатель в предпоследнем — модуль разности квадратов — заменить суммой тех же величин;

$$F_2(y) = \sum_{i=1}^3 \frac{\sqrt{\gamma_i^2 - 2}}{2\gamma_i} d_i \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{2}y}{\gamma_i \sqrt{y_0^2 - y^2}} + \\ + \frac{c_0 y_0}{y_G} \ln \frac{y_0^2(y + y_G)}{(y_G \sqrt{y_0^2 - y^2} + y \sqrt{y_0^2 - y_G^2})^2} + \\ + \left(1 + \frac{\delta}{\varepsilon}\right) \frac{M_1}{B} + \left(h_p + \frac{S}{b^2 + 1}\right) \frac{y_0}{y_G}$$

В точке I возмущенный фронт касается вертикали, поскольку $f'(y_0) = 0$, т. е., как и в случае задачи, разобранный в [1], ударная волна не претерпевает излома в точке своего пересечения с маховской дугой.

Два последних слагаемых в (5.2) указывают характер особенности формы фронта в окрестности точки G , где можно приближенно представить наклон фронта зависимостью

$$f'(y) = \frac{B}{M_1 y_G} \left[\left(h_p + \frac{S}{b^2 + 1} \right) \vartheta(y_G - y) - c_0 y_0 \ln |y - y_G| + \operatorname{const} \right]$$

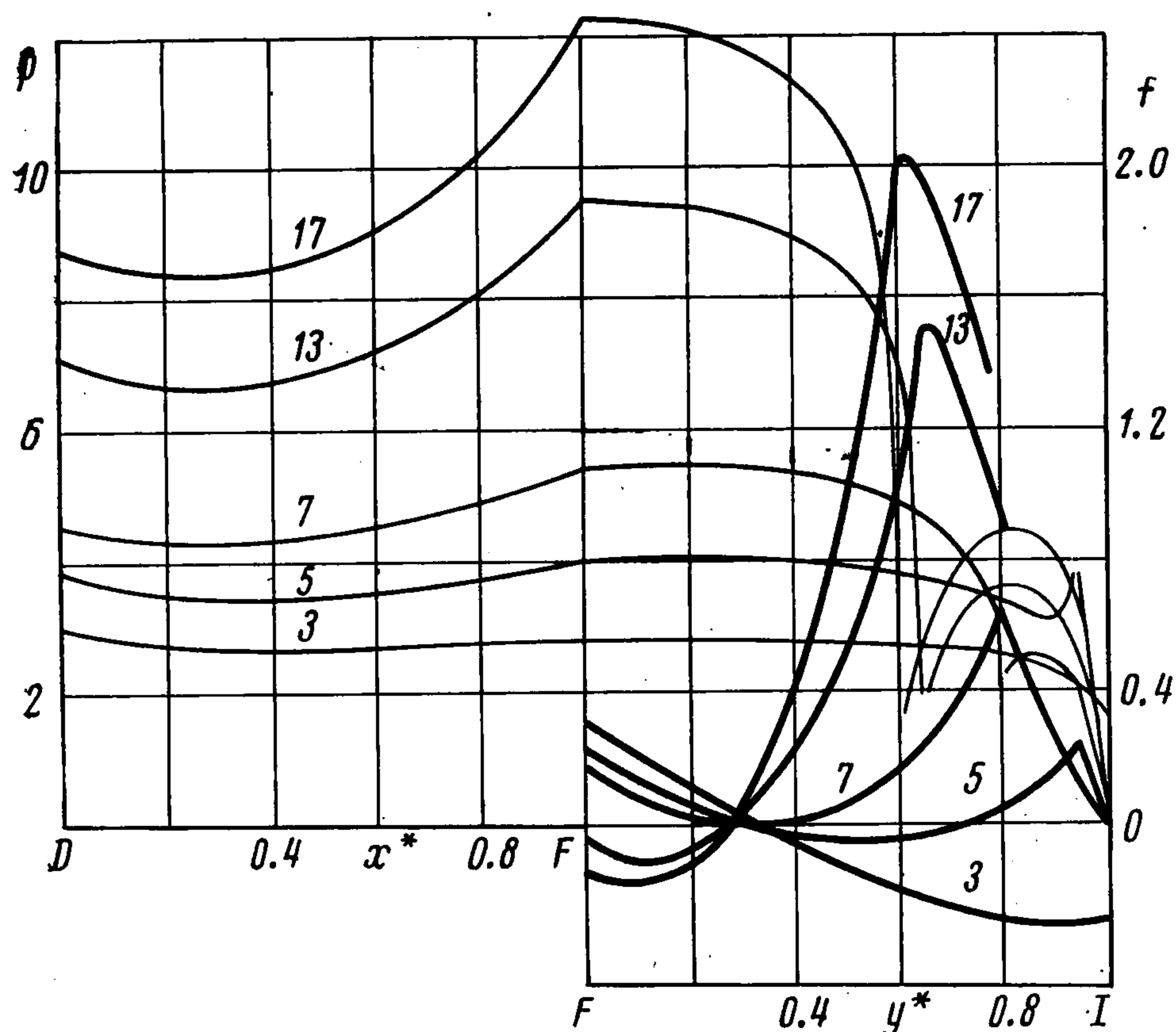
В случае ветвления, когда обращаются в нуль величины S и c_0 , значения f' оказываются различными по разные стороны от точки G , т. е. фронт ударной волны претерпевает излом в тройной точке. Излом фронта будет и при совпадении точки G с точкой I пересечения ударного фронта с маховской дугой (при этом $c_0 = 0$). Во всех остальных случаях значения производной формы фронта и ее кривизны стремятся к бесконечности при $y \rightarrow y_G$, излом фронта отсутствует; однако оказывается конечной разность значений f' в двух точках, симметрично отстоящих от точки G . Эту разность условно можно считать скачком угла наклона ударного фронта, относящимся к границам некоторой окрестности точки G [1].

И, наконец, в точке F $f'(0) = -(1 + \delta/\varepsilon)$, т. е., как и следовало ожидать, фронт нормален стенке.

Замечание. В случае нерегулярного взаимодействия решение линейной задачи должно быть сингулярным в точке G , что не учтено Смирлом в п. 8 его работы [3], где предлагалось обобщить решение для регулярного взаимодействия на рассмотренный выше случай. При этом предполагалось, что в окрестности точки G функция $f(y)$ может быть представлена в виде линейной функции $f(y) = f(y_G) - (y - y_G) \delta_{1,2}/\varepsilon$, если касательные к ударной волне в тройной точке образуют с осью y углы δ_1 — выше и δ_2 — ниже точки G . Эти линейные функции предлагалось подставить в формулы, аналогичные формулам (2.1) работы [1], для нахождения u , v , p отдельно при $y > y_G$ и $y < y_G$. Найденные предельные значения u , v , p должны удовлетворять условиям на тангенциальном разрыве, из которых автор предлагал выразить излом фронта $\delta_1 - \delta_2$ через $f(y_G)$. Это позволило бы найти скачок скорости v , учесть его в условии нормировки и завершить обобщение задачи нахождением величины $f(y_G)$ после определения формы фронта.

Однако такой путь приводит к противоречию, ибо при подстановке этих предельных значений в условия на тангенциальном разрыве получается переопределенная система двух уравнений относительно одного лишь неизвестного $\delta_1 - \delta_2$, которая имеет решение только в случае ветвления.

Схему картины течения, изображенной на фиг. 1, *a*, можно рассматривать как предельное состояние несимметричной мостообразной конфигурации с двумя тройными точками I' и G' , соединенными фронтом $I'G'$. Анализ решения в п. 4 и 5 и расчеты, описанные в п. 6, указывают на некоторое количественное перераспределение возмущений вдоль фронта, значительные их градиенты в окрестности тройной точки G' и их плавное исчезновение около другой тройной точки I' .



Фиг. 3

6. Свойства найденных возмущений проиллюстрированы ниже для разных значений M_∞ . Давление p на стенку в зависимости от $x^* = (1+x)/(1+x_0)$ ($0 \leq x^* \leq 1$), давление вдоль фронта и форма фронта — от $y^* = y/y_0$ ($0 \leq y^* \leq 1$) для $M = 5$ и $\delta = 0$ представлены на фиг. 3 ($\kappa = 1.4$); числа M_∞ указаны над соответствующими кривыми. При $M_\infty = 3$ они отвечают регулярному взаимодействию ($y_{G'}^* = 1.13$). Форма фронта представлена жирными линиями. Здесь ветвлению соответствуют $M_\infty = 5.54$, скачок давления вдоль фронта меняет знак при $M_\infty = 4.56$. Видно, что при большем числе M_∞ клина, встречающегося с той же ударной волной, возмущение давления больше, и они круче растут по x^* вблизи фронта. Максимальное смещение последнего соответствует окрестности особенности давления.

Поступила 15 IV 1975

ЛИТЕРАТУРА

1. Пекуровский Л. Е., Тер-Минасянц С. М. Дифракция плоской волны на клине, движущемся со сверхзвуковой скоростью, при нерегулярном ударном взаимодействии. ПММ, 1974, т. 38, вып. 3.
2. Lighthill M. J. The diffraction of blast I. Proc. Roy. Soc. Ser. A, 1949, vol. 198, No. 1055, p. 454—470.
3. Smyrl J. L. The impact of a shock-wave on a thin two-dimensional aerofoil moving at supersonic speed. J. Fluid Mech., 1963, vol. 15, p. 2, p. 223—240.
4. Мухелишвили Н. И. Сингулярные интегральные уравнения. М., «Наука», 1968.
5. Гахов Ф. Д. Краевые задачи. М., Физматгиз, 1963.
6. Арутюнян Г. М. О дифракции ударных волн. ПММ, 1970, т. 34, вып. 4.