

О НЕЛИНЕЙНОМ ЗАТУХАНИИ ПЛОСКИХ АКУСТИЧЕСКИХ ИМПУЛЬСОВ В ИЗЛУЧАЮЩЕМ ГАЗЕ

В. Н. Котеров
(Москва)

На примере задачи о поршне исследуется нелинейная эволюция волн малой амплитуды в вязком теплопроводном излучающем газе в режимах больших и малых радиационных чисел Больцмана. Приводятся результаты расчетов формирования слабых стационарных ударных волн и затухания треугольных импульсов сжатия.

Учету переноса лучистой энергии в волнах малой амплитуды посвящено много работ (см., например, библиографию в [1,2]). Большинство работ по акустике излучающего газа выполнено в рамках линейного приближения. Линейный анализ, в частности, показывает, что в излучающем газе скорость распространения и затухание малых возмущений зависят от их характерной оптической толщины τ и от радиационного числа Больцмана N_{Bo} , характеризующего отношение конвективного и лучистого потоков энергии.

Если $N_{Bo} \sim 1$ и $\tau \sim 1$, то скорость a распространения возмущений лежит между изотермической a_T и изэнтропической a_s скоростями звука. Основным процессом, приводящим к затуханию возмущений, является, в данном случае, лучистая диссипация энергии из возмущенной области. Затухание происходит за сравнительно короткое время, так что нелинейные конвективные эффекты, имеющие кумулятивный характер и обусловленные исходными уравнениями газовой динамики, еще не успевают проявиться. Поэтому при $N_{Bo} \sim 1$ и $\tau \sim 1$ уравнения линейной акустики излучающего газа полностью описывают процесс затухания.

Если $N_{Bo} \gg 1$, а также при $\tau \gg 1$ и $\tau \ll 1$, скорость a близка к a_s . При $N_{Bo} \ll 1$ и $\tau \sim 1$ скорость a близка к a_T . В перечисленных предельных случаях затухание возмущений, вызванное лучистой диссипацией энергии, оказывается малым, и нелинейные конвективные эффекты могут проявляться в полной мере.

Уравнения нелинейной акустической теории для волн в излучающем газе построены в [2]. В [3] исследованы законы нелинейного затухания оптически толстых и оптически тонких возмущений. Следует отметить, что даже в холодном газе лучистый перенос энергии может сильно влиять на затухание возмущений. Например, по оценкам линейной теории затухание низкочастотных звуковых волн в атмосфере Земли на уровне моря осуществляется, в основном, за счет переноса энергии в инфракрасных полосах поглощения водяного пара [4,5]. С другой стороны, известно¹, что инфразвуковые волны в атмосферах планет распространяются на значительные расстояния. Поэтому нелинейные эффекты могут оказать заметное воздействие на закон их затухания. Представляет интерес совместный учет лучистого переноса и нелинейных конвективных эффектов.

1. Рассмотрим полупространство, заполненное вязким теплопроводным излучающим газом, которое ограничено плоской стенкой (поршнем), движущейся по закону

$$(1.1) \quad x_w(t) = \varepsilon L f(a_0 t / L), \quad u_w(t) = \varepsilon a_0 f'(a_0 t / L), \quad \varepsilon \ll 1$$

¹ См., например, Голицын Г. С., Чунгузов Е. П. Акустико-гравитационные волны в атмосфере. Обзор данных наблюдений и теории, 1973. ВИНТИ, 1974, деп. № 7200-73. (РЖГеофиз., 1974, № 3, ЗА-144.)

Здесь и везде ниже штрихами обозначаются производные безразмерной функции f , задающей закон движения поршня, по ее аргументу; x_w — положение поршня в системе координат, ось x которой направлена по нормали к его поверхности; t — время; L — характерная длина смещения поршня; ε — малый безразмерный параметр; a_0 — характерная скорость распространения малых возмущений; u_w — скорость поршня. В дальнейшем будет удобно считать, что a_0 совпадает либо с изэнтропической, либо с изотермической скоростью звука.

Если принять обычные для динамики излучающего газа предположения о локальном термодинамическом равновесии, отсутствии рассеяния и о пренебрежимой малости давления и внутренней энергии излучения по сравнению с давлением и внутренней энергией газа, то движение газа будет описываться уравнениями [6]

$$(1.2) \quad \begin{aligned} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial \rho u}{\partial x} &= 0, \quad \rho \left(\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} \right) + \frac{\partial p}{\partial x} = \frac{d}{dx} \zeta \frac{\partial u}{\partial x} \\ \rho T \left(\frac{\partial s}{\partial t} + u \frac{\partial s}{\partial x} \right) &= \zeta \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \frac{\partial}{\partial x} \lambda \frac{\partial T}{\partial x} - \frac{\partial q}{\partial x} \\ \mu \frac{\partial I_\nu}{\partial x} &= \kappa_\nu (B_\nu - I_\nu), \quad q = \int_0^\infty 2\pi \int_{-1}^1 \mu I_\nu d\mu d\nu \end{aligned}$$

Здесь s — удельная энтропия газа, ζ — коэффициент продольной вязкости, λ — коэффициент теплопроводности, q — полный поток лучистой энергии, ν — частота излучения, μ — косинус угла между осью x и световым лучом, I_ν — интенсивность излучения, κ_ν — коэффициент поглощения газа, B_ν — функция Планка, задающая интенсивность равновесного излучения.

К системе (1.2) необходимо добавить два соотношения (уравнения состояния), связывающие термодинамические переменные ρ , p , T , s , и задать зависимости коэффициентов вязкости ζ , теплопроводности λ и коэффициента поглощения κ_ν от двух из них.

Краевое условие для уравнений (1.2), выражающее отсутствие потока массы через поверхность поршня, имеет вид

$$(1.3) \quad u [t, x_w(t)] = u_w(t)$$

Второе краевое условие, определяющее лучистый перенос энергии на поверхности поршня, будет сформулировано ниже, там, где оно окажется необходимым.

В дальнейшем удобно пользоваться двумя следствиями уравнений (1.2) [2]

$$(1.4) \quad \begin{aligned} \frac{\partial p}{\partial t} + (u + a_s) \frac{\partial p}{\partial x} + \rho a_s \left[\frac{\partial u}{\partial t} + (u + a_s) \frac{\partial u}{\partial x} \right] &= \\ = \frac{1}{\rho T} \left(\frac{\partial p}{\partial s} \right)_\rho \left[\zeta \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \frac{\partial}{\partial x} \lambda \frac{\partial T}{\partial x} - \frac{\partial q}{\partial x} \right] + a_s \frac{\partial}{\partial x} \zeta \frac{\partial u}{\partial x}, \\ a_s &= \left(\frac{\partial p}{\partial \rho} \right)_s \end{aligned}$$

$$(1.5) \quad \begin{aligned} a_T \left[\frac{\partial p}{\partial t} + (u + a_T) \frac{\partial p}{\partial x} \right] + \rho \left[\frac{\partial u}{\partial t} + (u + a_T) \frac{\partial u}{\partial x} \right] &= \\ = \frac{\partial}{\partial x} \zeta \frac{\partial u}{\partial x} - \left(\frac{\partial p}{\partial T} \right)_\rho \frac{\partial T}{\partial x}, \quad a_T &= \left(\frac{\partial p}{\partial \rho} \right)_T \end{aligned}$$

Построим число Рейнольдса N_{Re} , число Прандтля N_{Pr} и число Больцмана N_{Bo} с помощью параметров невозмущенного состояния газа, которому ниже всегда будем относить нулевой индекс

$$(1.6) \quad N_{Re} = \rho_0 a_0 L / \zeta_0, \quad N_{Pr} = C_{p0} \zeta_0 / \lambda_0, \quad N_{Bo} = \rho_0 a_0^3 / (\sigma T_0^4)$$

Здесь C_{p0} — удельная теплоемкость газа при постоянном давлении, а $\sigma = 2\pi^5 k^4 / (15h^3 c^2)$ — постоянная Стефана — Больцмана. Через C_V , как обычно, обозначим удельную теплоемкость газа при постоянном объеме.

В работе будут рассмотрены два предельных режима $N_{Bo} \gg 1$ и $N_{Bo} \ll 1$, в которых необходим учет конвективной нелинейности течения. В первом случае возмущение движется по сравнительно холодному и достаточно плотному газу. Второй случай соответствует распространению возмущения в достаточно горячем газе, плотность которого сравнительно мала. Будем считать также, что

$$(1.7) \quad N_{Re} \gg 1$$

поскольку $N_{Re} \sim L/l_m$, где l_m — средняя длина свободного пробега частиц газа.

Для того чтобы учесть краевое условие (1.3), необходимо ввести безразмерные переменные

$$(1.8) \quad t_1 = a_0 t / L, \quad x_1 = x / L$$

Решение задачи естественно искать в виде асимптотических разложений [2]

$$(1.9) \quad \begin{aligned} u &= \varepsilon a_0 u_1 + \dots, \quad \rho = \rho_0 (1 + \varepsilon \rho_1 + \dots) \\ p &= p_0 + \varepsilon \rho_0 a_0^2 p_1 + \dots, \quad s = s_0 (1 + \varepsilon_s s_1 + \dots) \\ T &= T_0 (1 + \varepsilon_T T_1 + \dots), \quad q = \varepsilon_T \sigma T_0^4 q_1 + \dots \\ I_v &= B_{v0} + \varepsilon_T T_0 \frac{\partial B_v}{\partial T_0} I_{v1} + \dots \end{aligned}$$

Тогда для возмущения скорости u_1 из (1.1) и (1.3) получается следующее краевое условие [7]:

$$(1.10) \quad u_1(t_1, 0) = u_w(t_1)$$

В разложениях (1.9) ε_s и ε_T — малые параметры. Их связь с параметром ε , характеризующим скорость поршня, и числом Больцмана N_{Bo} зависит от рассматриваемого режима ($N_{Bo} \gg 1$ или $N_{Bo} \ll 1$).

В переменных (1.8) для возмущений получаются линейные уравнения. Однако эти уравнения справедливы при $t_1 \sim 1$, когда возмущение находится сравнительно близко от поршня (в ближней зоне). Спустя достаточно большое время ($t_1 \gg 1$), когда возмущение находится далеко от поршня (в дальней зоне), эти уравнения теряют силу хотя бы потому, что уравнения второго приближения линейной акустики содержат особенность [7]. Для правильного описания эволюции возмущения при $t_1 \gg 1$ необходимо использовать переменные

$$(1.11) \quad t_2 = \Delta a_0 t / L, \quad x_2 = (x - a_0 t) / L, \quad \Delta \ll 1$$

которые совместно с разложениями (1.9) приводят к уравнениям нелинейных коротких волн [2]. Начальное условие для этих уравнений можно получить при помощи асимптотического сращивания [7] с линейным решением, справедливым в начальные моменты времени.

2. Рассмотрим вначале режим больших чисел Больцмана

$$(2.1) \quad N_{Bo} \gg 1$$

В этом случае скорость распространения возмущений близка к изэнтропической скорости звука. Поэтому в (1.1), (1.6), (1.8), (1.9) и (1.11) положим $a_0 = a_{s_0}$ и используем уравнения состояния в форме $p = p(\rho, s)$, $T = T(\rho, s)$.

При учете предположений (1.7), (2.1) и краевого условия (1.10) из (1.2) и (1.9) в ближней зоне $t_1 \sim 1$ можно найти возмущения газодинамических величин (индексы у возмущений здесь и ниже опущены) и определить порядки малых параметров ε_T и ε_s

$$(2.2) \quad u = \rho = p = T = f'(t_1 - x_1), \quad \frac{\partial s}{\partial t_1} = \frac{N_{Bo}}{N_{Re} N_{Pr}} \frac{C_{p0} T_0}{a_{s0}^2} \frac{\partial^2 T}{\partial x_1^2} - \frac{\partial q}{\partial x_1}$$

$$(2.3) \quad \varepsilon_T = \varepsilon \left(\frac{\partial \ln T}{\partial \ln \rho_0} \right)_s \sim \varepsilon, \quad \varepsilon_s = \frac{\varepsilon}{N_{Bo}} \frac{a_{s0}^2}{T_0 s_0} \ll \varepsilon$$

Таким образом, в режиме $N_{Bo} \gg 1$ возмущение энтропии оказывается много меньше возмущений остальных газодинамических величин. Подобные течения в [2] названы квазиизэнтропическими (изэнтропическими в первом приближении). Лучистый перенос энергии в первом приближении не влияет на динамику течения в ближней зоне, а решение (2.2) описывает возмущение, распространяющееся без изменения своей формы с изэнтропической скоростью звука. Интенсивность излучения, лучистый тепловой поток и возмущение энтропии определяются после интегрирования уравнения переноса, в котором зависимости коэффициента поглощения κ_ν и функции Планка B_ν от координаты x_1 и времени t_1 определены заранее при помощи (2.2).

В дальней зоне $t_2 \sim 1$, $x_2 \sim 1$ предположения (1.7), (2.1) также приводят к связям (2.3) между малыми параметрами и к интегралам для возмущений [2]

$$(2.4) \quad u = \rho = p = T$$

В переменных (1.11) дальней зоны поршню отвечает координата $x_{w2} = \varepsilon f(t_2 / \Delta) - t_2 / \Delta$, $\Delta \ll 1$. Поэтому в дальней зоне можно полагать в первом приближении $x_{w2} = -\infty$ и рассматривать перенос лучистой энергии в безграничном пространстве. В этом случае разложения (1.9) приводят к следующему выражению для производной потока лучистой энергии [2]:

$$(2.5) \quad \frac{\partial q}{\partial x_2} = 16\tau_0(T - w), \quad \tau_0 = L\kappa_0, \quad \kappa_0 = \int_0^\infty \kappa_{\nu 0} \frac{\partial B_\nu}{\partial T_0} d\nu \bigg/ \int_0^\infty \frac{\partial B_\nu}{\partial T_0} d\nu$$

Здесь κ_0 — акустический коэффициент поглощения, а τ_0 — акустическая оптическая толщина. Величина w — соответствующим образом осредненное по частоте излучения возмущение плотности лучистой энергии,

которое связано с возмущением температуры интегральным оператором

$$(2.6) \quad w = \frac{\tau_0}{2} \int_{-\infty}^{\infty} T(t_2, \xi) F_1(\tau_0 |x_2 - \xi|) d\xi$$

$$F_1(y) = \int_0^{\infty} \kappa_{\nu 0} \frac{\partial B_{\nu}}{\partial T_0} E_1\left(\frac{\kappa_{\nu 0}}{\kappa_0} y\right) d\nu \Big/ \left(\kappa_0^2 \int_0^{\infty} \frac{\partial B_{\nu}}{\partial T_0} d\nu \right), \quad E_1(z) = \int_1^{\infty} \frac{e^{-sz}}{s} ds$$

Подчеркнем, что соотношения (2.5), (2.6) оказываются справедливыми при любом отношении $\varepsilon / \varepsilon_T$.

Для простоты применим приближенный подход, предложенный и проанализированный в [8]. Именно, аппроксимируем ядро F_1 интегрального оператора (2.6) экспонентой

$$(2.7) \quad F_1(y) \approx n \exp(-ny), \quad n = \text{const} > 0$$

после чего двойным дифференцированием по координате (2.6) может быть сведено к дифференциальному уравнению

$$(2.8) \quad \partial^2 w / \partial x_2^2 = n^2 \tau_0^2 (w - T)$$

Вопрос об оптимальном выборе постоянной аппроксимации n связан с конкретной зависимостью коэффициента поглощения $\kappa_{\nu 0}$ от частоты ν и здесь обсуждаться не будет.

Далее удобно воспользоваться уравнением (1.4) [2]. Тогда при учете предположений (1.7) и (2.1), разложений (1.9), связей (2.3) между малыми параметрами, выражения (2.5) для производной потока лучистой энергии, уравнения (2.8) и интегралов (2.4) в переменных (1.11) получаются следующие уравнения, описывающие нелинейное распространение акустических возмущений в излучающем газе при $N_{\text{Bo}} \gg 1$:

$$(2.9) \quad \frac{\partial u}{\partial t_2} + u \frac{\partial u}{\partial x_2} = \frac{1}{N_s} \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} + \frac{\tau}{b_s} (w - u), \quad \frac{\partial^2 w}{\partial x_2^2} = \tau^2 (w - u)$$

$$N_s = \frac{2N_{\text{Re}} \varepsilon m_{s0}}{1 + (\gamma_0 - 1) / N_{\text{Pr}}}, \quad b_s = \frac{N_{\text{Bo}} \varepsilon n C_{p0} T_0 m_{s0}}{8a_{s0}^2 (\gamma_0 - 1)}, \quad \tau = n \tau_0$$

$$m_{s0} = \frac{1}{2\rho_0^3 a_{s0}^2} \left(\frac{\partial^2 p}{\partial V_0^2} \right)_s, \quad V = \frac{1}{\rho}, \quad \gamma_0 = \frac{C_{p0}}{C_{v0}}, \quad \Delta = \varepsilon m_{s0}$$

Параметр N_s , фигурирующий в уравнениях (2.9), описывает влияние вязкости и корпускулярной теплопроводности. Это влияние мало, если $N_s \gg 1$. Параметр b_s , пропорциональный числу Больцмана, описывает влияние излучения. Оно мало при $b_s \gg 1$. Параметр τ — эффективная оптическая толщина возмущения.

Начальное условие для уравнений (2.9) получается при помощи сращивания с решением (2.2), справедливым в начальные моменты времени. Сращивание проводится в промежуточном пределе [7]

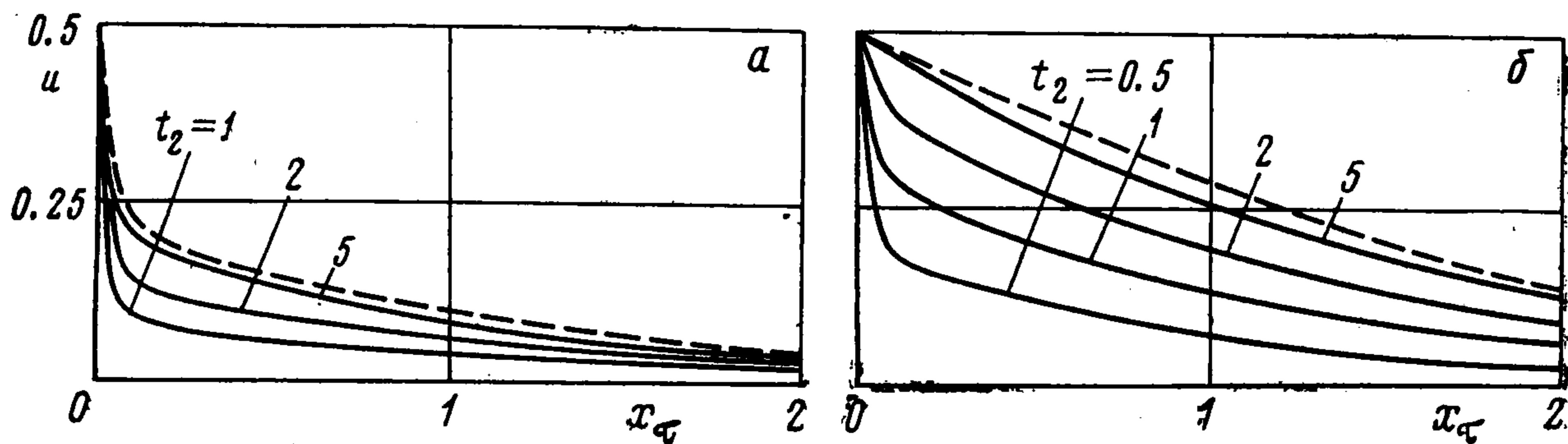
$$(2.10) \quad x_* \equiv x_2 = x_1 - t_1, \quad t_* = \delta(\varepsilon) t_1$$

$$\delta(\varepsilon) \rightarrow 0, \quad \delta(\varepsilon) / \varepsilon \rightarrow \infty \quad \text{при } \varepsilon \rightarrow 0$$

и дает начальное условие

$$(2.11) \quad u(0, x_2) = f'(-x_2)$$

На фиг. 1 и 2 представлены результаты численных расчетов уравнений (2.9). Для того, чтобы выделить влияние лучистого переноса энергии, во всех расчетах полагали $N_s = 200$, поскольку при больших значениях параметра N_s влияние вязкости сводится, в основном, к сглаживанию слабых и сильных разрывов. Учет малой вязкости позволяет осуществить сквозной счет через ударные волны, которые могут появляться в решении при достаточно больших значениях параметра b_s . Расчеты проводили по двуслойной неявной разностной схеме. Члены, описывающие в (2.9) вязкость и из-



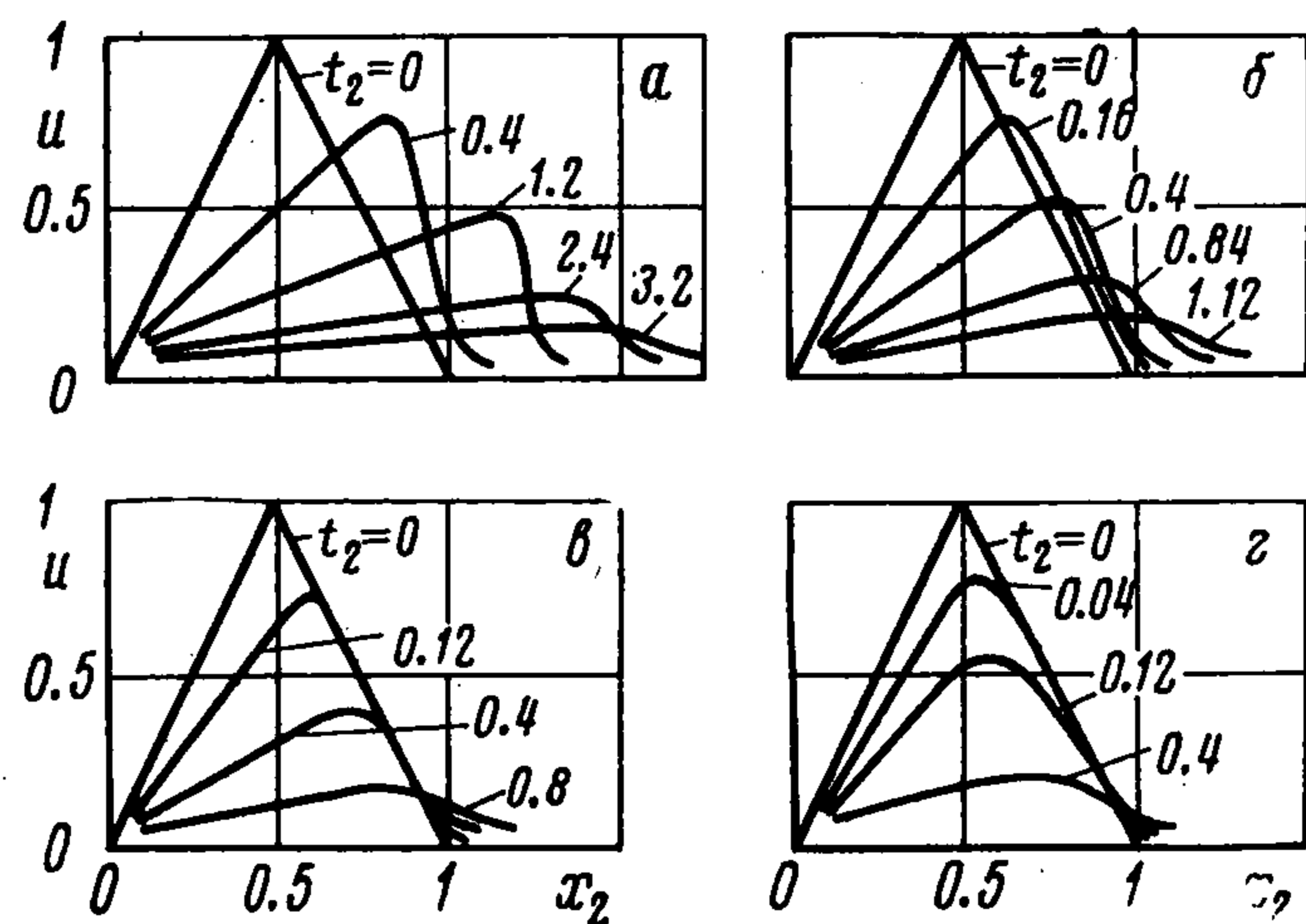
Фиг. 1

лучение, брали с верхнего временного слоя для того, чтобы избежать трудностей, связанных с неустойчивостью счета по явной схеме. Разностные уравнения решали с помощью матричной прогонки.

Фиг. 1 иллюстрирует формирование слабой стационарной ударной волны, возбуждаемой поршнем, который в момент времени $t = 0$ начинает двигаться в газ с малой постоянной скоростью. В этом случае $f(t_1) = 0$ при $t_1 < 0$ и $f(t_1) = t_1$ при $t_1 \geq 0$. При описании переноса излучения с помощью модели одночленной экспоненциальной аппроксимации (2.8) в данной задаче присутствует только один характерный линейный размер: эффективная длина свободного пробега излучения $l_0 = 1 / (n\kappa_0)$. Поэтому без ограничения общности в (2.9) можно полагать $\tau = 1$. Координата $x_\tau = x_2 - t_2 / 2$; на фиг. 1, в которой фронт ударной волны неподвижен, отсчитывается от звуковой плоскости, где $u = 1/2$. Решение уравнений (2.9) в данном случае оказывается симметричным относительно точки $x_\tau = 0$, $u = 1/2$, поэтому на графиках показана только правая половина течения. Штриховыми кривыми нанесены стационарные решения, к которым эволюционирует возмущение.

На фиг. 1 ясно видны частично диспергированные излучением скачки уплотнения. При умеренном влиянии излучения (фиг. 1, а, на которой представлен вариант $b_s = 4$) скачок уплотнения сохраняется и в стационарном решении. При более сильном влиянии излучения (фиг. 1, б, вариант $b_s = 1$) излучение с течением времени полностью размывает скачок уплотнения, и стационарная ударная волна оказывается полностью диспергированной.)

Если при $N_s = \infty$ проанализировать стационарный аналог уравнений (2.9) в окрестности особой точки, соответствующей звуковой плоскости, то, точно так же как в [9], можно получить достаточное условие существования слабых стационарных частично-диспергированных ударных волн $b_s > \sqrt{2}$. Численные расчеты показывают, что это условие является также и необходимым: при $b_s < \sqrt{2}$ слабая стационарная ударная волна оказывается полностью диспергированной излучением.



Фиг. 2

На фиг. 2 представлены результаты расчетов затухания треугольного импульса сжатия оптической толщины $\tau = 1$, возбуждаемого равномерно ускоряющимся, а затем замедляющимся поршнем. При не слишком сильном влиянии излучения (фиг. 2, а, на которой представлен вариант $b_s = 2$) вначале образуется слабо диспергированный излучением скачок уплотнения, который распространяется со скоростью, несколько превышающей изэнтропическую скорость звука. Спустя некоторое время излучение полностью размывает скачок, и акустический импульс становится оптически толстым возмущением с пологими передним и задним фронтами. При более сильном влиянии излучения (фиг. 2, б, вариант $b_s = 0.6$) образующийся скачок уплотнения сильно диспергирован излучением, что видно из сравнения наклонов фронтов скачка на фиг. 2, а и 2, б. На фиг. 2, в приведен вариант $b_s = 0.4$, в котором конвективные нелинейные эффекты уравниваются излучением, и наклон переднего фронта возмущения практически не меняется. Наконец, при сильном влиянии излучения (фиг. 2, г, вариант $b_s = 0.2$) возмущение быстро затухает, и конвективная нелинейность почти не влияет на течение.

На фиг. 2 видно, что в поздние моменты времени импульс становится оптически толстым, а его амплитуда малой по сравнению с первоначальной амплитудой. Поэтому, интересуясь асимптотическим законом нелинейного затухания импульса при $t_2 \rightarrow \infty$, введем переменные

$$t_3 = \Delta_t t_2, \quad x_3 = \Delta_x x_2, \quad \Delta_t \ll 1, \quad \Delta_x \ll 1$$

и разложения

$$u = \varepsilon_u u_3 + \dots, \quad w = \varepsilon_w w_3 + \dots, \quad \varepsilon_u \ll 1, \quad \varepsilon_w \ll 1$$

Подставляя эти разложения в (2.9), получим

$$\frac{\partial u_3}{\partial t_3} + u_3 \frac{\partial u_3}{\partial x_3} = \left(\frac{1}{N_s} + \frac{1}{b_s \tau} \right) \frac{\partial^2 u_3}{\partial x_3^2}, \quad w_3 = u_3, \quad \Delta_x = \varepsilon_u = \varepsilon_w = \sqrt{\Delta_t}$$

Аналогичное уравнение, называемое часто уравнением Бюргерса, описывает нелинейное распространение волн малой амплитуды в вязком газе [10]. Таким образом, при $t_2 \rightarrow \infty$ нелинейное возмущение в излучающем газе затухает так же, как возмущение в вязком газе с эффективным параметром $N_s^* = N_s b_s \tau / (N_s + b_s \tau)$.

3. Рассмотрим режим малых чисел Больцмана

$$(3.1) \quad N_{Bo} \ll 1$$

Если отсутствуют внешние источники излучения с температурой, значительно отличающейся от температуры газа, то при $N_{Bo} \ll 1$ мощный перенос энергии излучением приводит к выравниванию температур в различных областях течения. Поэтому возмущение температуры должно быть много меньшим возмущений остальных термодинамических величин, так что

$$(3.2) \quad \varepsilon_T \ll \varepsilon$$

Такие течения в [2] названы квазиизотермическими.

Пусть в рассматриваемой задаче поршень излучает как абсолютно черное тело с температурой T_w . Тогда течение будет квазиизотермическим, если $|T_w - T_0| \sim \varepsilon_T T_0$. Другой случай квазиизотермичности, который для определенности будет рассмотрен ниже, — адиабатический поршень, полностью или почти полностью отражающий излучение.

При $N_{Bo} \ll 1$ скорость распространения возмущений близка к изотермической скорости звука. Поэтому в (1.1), (1.6), (1.8), (1.9) и (1.11)

положим $a_0 = a_{T_0}$ и используем уравнения состояния в форме $p = p(\rho, T)$, $s = s(\rho, T)$. Тогда при учете предположений (1.7), (3.1), (3.2) и краевого условия (1.10) из (1.2) и (1.9) в ближней зоне $t_1 \sim 1$, $x_1 \sim 1$ можно найти возмущения газодинамических величин

$$(3.3) \quad u = \rho = p = -s = f'(t_1 - x_1), \quad \frac{\partial s}{\partial t_1} = \frac{1}{16\tau_0} \frac{\partial q}{\partial x_1}$$

определить малые параметры ε_s и ε_T

$$(3.4) \quad \varepsilon_s = -\varepsilon \left(\frac{\partial \ln s}{\partial \ln \rho_0} \right)_T \sim \varepsilon, \quad \varepsilon_T = -\frac{\varepsilon N_{B_0}}{16\tau_0} \left(\frac{\partial \ln p}{\partial \ln T_0} \right)_p \ll \varepsilon$$

Решение (3.3) описывает возмущение, распространяющееся без изменения своей формы с изотермической скоростью звука.

Определим возмущение температуры. В ближней зоне $t_1 \sim 1$, $x_1 \sim 1$ поршню в первом приближении отвечает координата $x_1 = 0$. Ради простоты будем считать, что поршень зеркальный и полностью отражает излучение по законам геометрической оптики. Тогда из-за симметрии лучистый перенос энергии в области $x_1 > 0$ не изменится, если формально рассмотреть неограниченное пространство, в котором возмущение температуры газа продолжено в область $x_1 < 0$ четным образом: $T(t_1, x_1) = T(t_1, -x_1)$. Далее воспользуемся разложениями (1.9), которые приводят к уравнениям, с точностью до замены t_2, x_2 на t_1, x_1 совпадающим с (2.5), (2.6). Если затем применить экспоненциальную аппроксимацию (2.7), то получается уравнение, имеющее вид (2.8), но с производной по x_1 в левой части. Наконец, используя соотношения (3.3), найдем окончательно уравнения, определяющие возмущение температуры и среднее возмущение плотности лучистой энергии

$$(3.5) \quad \partial^2 w / \partial x_1^2 = -\tau^2 f''(t_1 - x_1), \quad T = w + f'(t_1 - x_1), \quad \tau = n\tau_0$$

Так как поршень предполагается адиабатическим, то на поверхности поршня $q = 0$, т. е. $\partial w / \partial x_1 = 0$ при $x_1 = 0$. Кроме того, плотность лучистой энергии w должна быть непрерывной функцией. Эти условия и (3.5) позволяют вычислить возмущение температуры

$$(3.6) \quad T = f''(t_1 - x_1) - \tau^2 [f(t_1 - x_1) - f'(t_1)(t_1 - x_1)]$$

В частности, на поверхности поршня $x_1 = 0$

$$(3.7) \quad T = f''(t_1) - \tau^2 [f(t_1) - f'(t_1)t_1]$$

Если рассматривается импульсное движение поршня, причем такое

$$(3.8) \quad f(+\infty) = \text{const}, \quad f'(t_1)t_1 \rightarrow 0, \quad f''(t_1) \rightarrow 0 \quad \text{при } t_1 \rightarrow \infty$$

то спустя достаточно большое время (при $t_1 \rightarrow \infty$) температура газа у поверхности поршня достигает значения

$$(3.9) \quad T(\infty, 0) = -\tau^2 f(+\infty)$$

Это означает, что за распространяющимся акустическим импульсом сжатия ($f(+\infty) > 0$) температура газа понижена, а за импульсом разрежения ($f(+\infty) < 0$) повышена.

Если условия (3.8) не выполняются, то с течением времени возмущение температуры газа за прошедшей волной неограниченно растет. Это означает, что при таких движениях поршня течение не является квазиизэнтропическим во всей области при достаточно больших временах t_1 . Ограничимся рассмотрением только акустических импульсов.

В дальней зоне $t_2 \sim 1$, $x_2 \sim 1$ (напомним, что теперь в (1.11) $a_0 = a_{T_0}$) предположения (1.7) и (3.1) также приводят к связям (3.4) между малыми параметрами и к интегралам [2]

$$(3.10) \quad u = \rho = p = -s = q / (16 \tau_0)$$

При этом производная потока лучистой энергии в приближении одночленной аппроксимации (2.7) оказывается связанной с возмущением температуры уравнениями (2.5), (2.8). Недостающее уравнение можно найти из (1.5) [2]. После преобразований получается следующая система уравнений, которая в приближении одночленной экспоненциальной аппроксимации описывает нелинейное распространение акустических импульсов в излучающем газе при $N_{Bo} \ll 1$:

$$(3.11) \quad \frac{\partial u}{\partial t_2} + u \frac{\partial u}{\partial x_2} = \left(\frac{1}{N_T} + \frac{b_T}{\tau} \right) \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} - \tau b_T u, \quad w = -\tau^2 \int_{x_2}^{\infty} u(t_2, \xi) d\xi$$

$$T = w - \frac{\partial u}{\partial x_2}, \quad N_T = 2\epsilon N_{Re} m_{T_0}, \quad b_T = \frac{N_{Bo}^n}{32\epsilon m_{T_0}} \left(\frac{\partial \ln \rho}{\partial \ln T_0} \right)_p$$

$$m_{T_0} = \frac{1}{2\rho_0^3 a_{T_0}^2} \left(\frac{\partial^2 p}{\partial V_0^2} \right)_T, \quad V = \frac{1}{\rho}, \quad \Delta = \epsilon m_{T_0}$$

Параметр N_T в (3.11) описывает влияние вязкости, а параметр b_T , пропорциональный числу Больцмана, — влияние излучения.

Начальное условие для (3.11) получается с помощью сращивания с решением (3.3) в промежуточном пределе (2.10). Оно имеет вид (2.11).

Из (3.11) нетрудно определить поведение температуры газа при $x_2 = -\infty$ (у поверхности поршня). Действительно, $u \rightarrow 0$ и $\partial u / \partial x_2 \rightarrow 0$ при $x_2 \rightarrow -\infty$. Поэтому

$$T(t_2, -\infty) = w(t_2, -\infty) = -\tau^2 \int_{-\infty}^{+\infty} u(t_2, \xi) d\xi$$

Теперь, интегрируя уравнение для u в (3.11) по координате в пределах от $-\infty$ до $+\infty$ и решая затем получившееся дифференциальное уравнение, с учетом (3.9) найдем

$$(3.12) \quad T(t_2, -\infty) = -\tau^2 f(+\infty) \exp(-\tau^2 b_T t_2)$$

Соотношения (3.7) и (3.12) полностью описывают поведение температуры у поверхности поршня: вначале возмущение температуры нарастает по абсолютной величине, а затем затухает по экспоненциальному закону.

На фиг. 3 представлены результаты расчетов затухания треугольного импульса сжатия оптической толщины $\tau = 1$ в невязком газе ($N_T = \infty$). Если величина параметра b_T не слишком сильно отличается от единицы (фиг. 3, а, вариант $b_T = 1$ и фиг. 3, б, вариант $b_T = 0.1$), то затухание возмущения происходит весьма быстро. При очень

малых значениях параметра b_T (фиг. 3, в, вариант $b_T = 0.01$) в потоке образуется узкая зона с резким градиентом скорости, распространяющаяся со скоростью, несколько превышающей изотермическую скорость звука. В этой зоне, как следует из уравнения для T в (3.11), возмущение температуры резко возрастает (см. фиг. 3, г, на которой штриховой кривой показано возмущение скорости, а сплошной — возмущение температуры).

Если разложить скорость u в асимптотический ряд по целым степеням параметра b_T , то в первом приближении из (3.11) получим уравнение

$$(3.13) \quad \frac{\partial u}{\partial t_2} + u \frac{\partial u}{\partial x_2} = 0$$

Решение этого уравнения при достаточно больших значениях времени t_2 может содержать разрывы, даже если в начальный момент скорость u непрерывна. Пусть t_{20} и x_{20} — момент и координата возникновения разрыва, $u_-(t_2)$ и $u_+(t_2)$ — скорости газа непосредственно за и перед ним, $c_S(t_2)$ — скорость перемещения разрыва. Чтобы раскрыть реальную структуру этого разрыва, введем внутреннюю переменную

$$z = \frac{\tau}{b_T} \left[x_2 - x_{20} - \int_{t_{20}}^{t_2} c_S(\xi) d\xi \right]$$

и опять воспользуемся разложениями по целым степеням параметра b_T . Тогда из (3.11) следует внутреннее уравнение

$$(3.14) \quad [u - c_S(t_2)] \frac{\partial u}{\partial x_2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2}$$

Процедура асимптотического сращивания с внешним решением, описываемым уравнением (3.13), выделяет требуемое решение уравнения (3.14) и позволяет определить скорость $c_S(t_2)$

$$u(t_2, z) = c_S(t_2) - \frac{\Delta_S(t_2)}{2} \operatorname{th} [\Delta_S(t_2) z], \quad c_S = \frac{u_- + u_+}{2}, \quad \Delta_S = u_- - u_+$$

Полученное решение по форме совпадает с известным тейлоровским решением для структуры вязкого скачка уплотнения. Оно позволяет из (3.11) найти форму температурного пика в зоне резких градиентов скорости

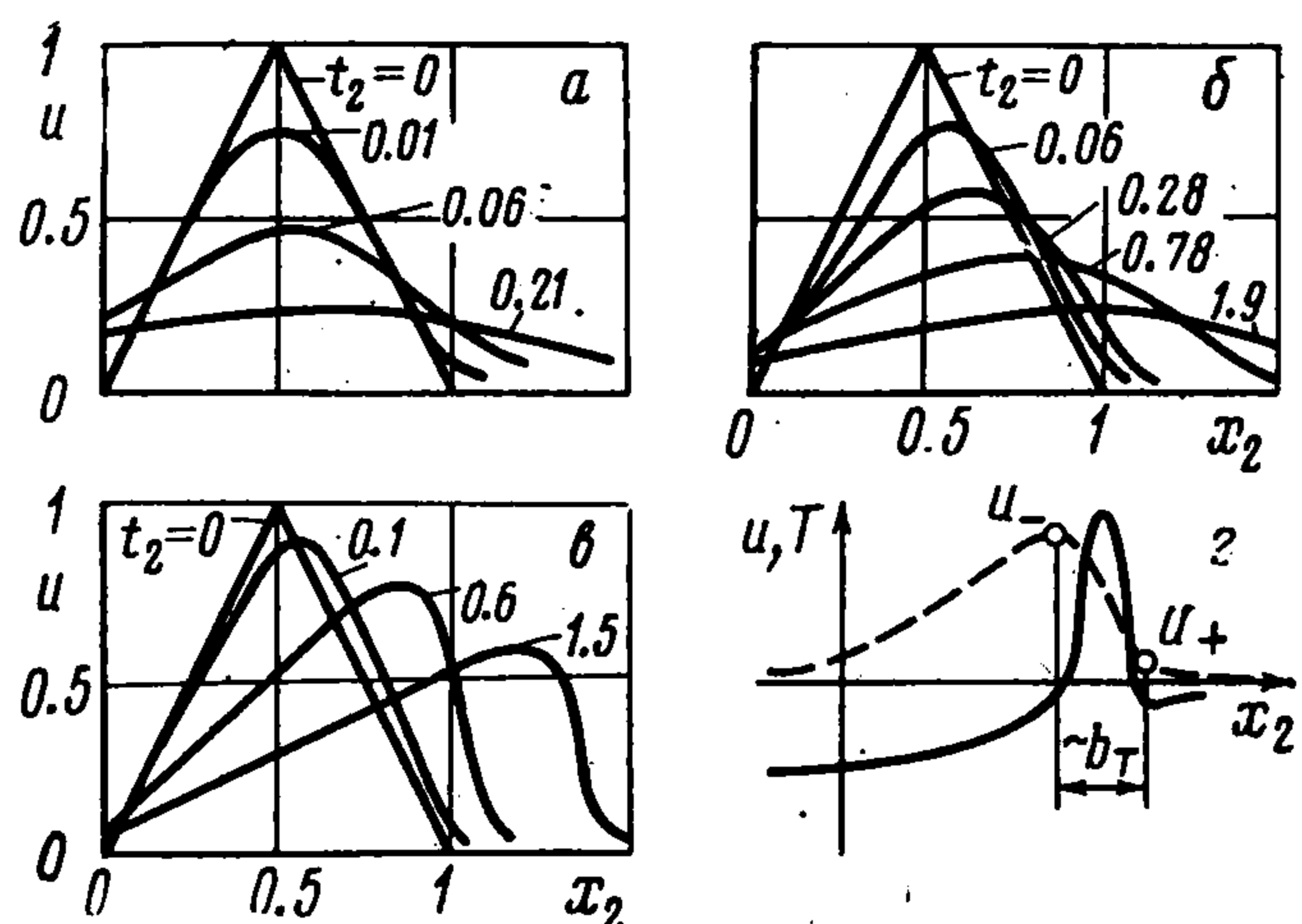
$$T(t_2, z) = w_S(t_2) + \frac{\tau \Delta_S^2}{2b_T} [\operatorname{ch}(\Delta_S z)]^{-2}$$

Здесь $w_S(t_2)$ — возмущение плотности лучистой энергии на разрыве внешнего решения, описываемого уравнением (3.13)

$$w_S(t_2) = -\tau^2 \int_{x_S(t_2)}^{\infty} u(t_2, x_2) dx_2, \quad x_S(t_2) = x_{20} + \int_{t_{20}}^{t_2} c_S(\xi) d\xi$$

Автор благодарит В. В. Александрова за постоянное внимание к работе и консультации, а также Ю. Б. Лифшица за обсуждение результатов и ценные замечания.

Поступила 23 XII 1974



Фиг. 3

ЛИТЕРАТУРА

1. *Alexandrov V. V., Ryzhov O. S.* Sur la décroissance des ondes courtes dans un gaz rayonnant. *Mécanique*, 1975, t. 14, № 1, p. 135—159.
2. *Александров В. В., Рыжов О. С.* О нелинейной акустике излучающего газа. I. Общий анализ уравнений. *Ж. вычисл. матем. и матем. физ.*, 1972, т. 12, № 6.
3. *Александров В. В., Рыжов О. С.* О нелинейной акустике излучающего газа. II. Слабые ударные волны. *Ж. вычисл. матем. и матем. физ.*, 1973, т. 13, № 3.
4. *Calvert J. B., Coffman J. W., Querfeld C. W.* Radiative absorption of sound by water vapour in the atmosphere. *J. Acoust. Soc. America*, 1966, vol. 39, No. 3, p. 532—536.
5. *Прокофьев В. А.* Влияние спектрального переноса радиации на близкое к адиабатическому волновое движение газа. *Изв. АН СССР, МЖГ*, 1969, № 2.
6. *Зельдович Я. Б., Райзер Ю. П.* Физика ударных волн и высокотемпературных гидродинамических явлений. М., «Наука», 1966.
7. *Коул Дж.* Методы возмущений в прикладной математике. М., «Мир», 1972.
8. *Gilles S. E., Cogley A. C., Vincenti W. G.* A substitute-kernel approximation for radiative transfer in a monogray gas near equilibrium, with application to radiative acoustics. *Internat. J. Heat Mass Transf.*, 1969, vol. 12, No. 4, p. 445—458.
9. *Александров В. В., Котеров В. Н.* Классификация ударных волн в излучающем газе. *Ж. вычисл. матем. и матем. физ.*, 1972, т. 12, № 3.
10. *Хейз У. Д.* Основы теории газодинамических разрывов. В сб.: Основы газовой динамики. М., Изд-во иностр. лит., 1963.