

О СОБСТВЕННО ТРАНСЗВУКОВЫХ ТЕЧЕНИЯХ ИЗЛУЧАЮЩЕГО ГАЗА В КАНАЛАХ СО СЛАБО МЕНЯЮЩИМИСЯ ПАРАМЕТРАМИ

В. В. Александров, А. А. Фролова

(Москва)

Рассматриваются течения газа с близкими изэнтропической и изотермической скоростями звука в каналах со слабо меняющимися температурой и кривизной стенки. Такая модель учитывает конвективную нелинейность, обусловленную кумулятивным эффектом распространения возмущений, и позволяет рассматривать произвольное влияние излучения на движение газа. Полученная в работе нелинейная система уравнений описывает течения газа в каналах с поперечной оптической толщиной порядка единицы. Аналогичные уравнения для квазиизэнтропических течений получены в [1].

1. Исходные уравнения. Рассмотрим стационарное равновесное течение невязкого нетеплопроводного излучающего газа в каналах с плоской или осевой симметрией. Стенки канала близки к параллельным плоскостям или, при осевой симметрии, к цилиндрической поверхности. В плоском случае рассматриваются каналы, симметричные относительно плоскости $y = 0$.

Будем предполагать, что излучение дает малый вклад в плотность внутренней энергии и в давление. Движение такой среды описывается следующими уравнениями:

$$(1.1) \quad \frac{\partial \rho u}{\partial x} + \frac{1}{y^{d-1}} \frac{\partial}{\partial y} y^{d-1} \rho v = 0$$

$$u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} = 0, \quad u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} = 0$$

$$\rho T \left(u \frac{\partial s}{\partial x} + v \frac{\partial s}{\partial y} \right) + \operatorname{div} \mathbf{q} = 0$$

Здесь p — давление, ρ — плотность, T — температура, s — энтропия газа, \mathbf{q} — поток лучистой энергии, u и v — составляющие скорости газа вдоль продольной координаты x и поперечной координаты y соответственно. В плоском случае $d = 1$, в осесимметричном $d = 2$. Поток лучистой энергии \mathbf{q} равен

$$(1.2) \quad \mathbf{q} = \int_0^\infty \mathbf{q}_\nu d\nu, \quad \mathbf{q}_\nu = \int_{4\pi} \Omega I_\nu d\Omega$$

$$(1.3) \quad \Omega \operatorname{grad} I_\nu(\mathbf{r}, \Omega) = \kappa_\nu(\mathbf{r}) [B_\nu(T) - I_\nu(\mathbf{r}, \Omega)]$$

$$B_\nu = \frac{2h\nu^3}{c^2} (e^{h\nu/kT} - 1)^{-1}$$

где ν — частота излучения, \mathbf{r} — радиус-вектор точки, $\mathbf{\Omega}$ — единичный вектор в направлении светового луча, κ_ν — объемный коэффициент поглощения, B_ν — функция Планка.

[Уравнения состояния и зависимость κ от ρ и s

$$(1.4) \quad p = p(\rho, s), \quad T = T(\rho, s), \quad \kappa_\nu = \kappa_\nu(\rho, s)$$

замыкают систему уравнений (1.1) — (1.4).

Из (1.1) с учетом уравнений состояния (1.4) можно получить следствия [2]

$$(1.5) \quad (a_s^2 - u^2) \frac{\partial u}{\partial x} - uv \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) + (a_s^2 - v^2) \frac{\partial v}{\partial y} + \\ + \frac{d-1}{y} va_s^2 = - \frac{1}{\rho^2 T} \left(\frac{\partial p}{\partial s} \right)_\rho \operatorname{div} \mathbf{q}$$

$$(a_T^2 - u^2) \frac{\partial u}{\partial x} - uv \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) + (a_T^2 - v^2) \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{d-1}{y} va_T^2 = \\ = \frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial p}{\partial T} \right)_\rho \left(u \frac{\partial T}{\partial x} + v \frac{\partial T}{\partial y} \right)$$

где через a_s и a_T обозначены изэнтропическая и изотермическая скорости звука, удовлетворяющие соотношениям [2]

$$a_s^2 = a_T^2 + \frac{c_V}{\rho^2 T} e_{12}^2, \quad e_{12} = - \sqrt{\frac{\gamma-1}{\gamma} \frac{\rho^2 a_s^2 T}{c_V}}, \quad \gamma = \frac{c_p}{c_V}$$

$$a_s = (\partial p / \partial \rho)_s^{1/2}, \quad a_T = (\partial p / \partial \rho)_T^{1/2}$$

Здесь c_p и c_V — теплоемкости газа при постоянном давлении и постоянном объеме.

В системе (1.1) — (1.4) вместо первого и четвертого уравнений (1.1) будут в дальнейшем использованы уравнения (1.5). Новая система уравнений эквивалентна исходной.

2. Вывод приближенных уравнений. Пусть профиль f и температура стенки T_w заданы формулами

$$y = L_y + \delta L_x f(x / L_x), \quad T_w = T_0 (1 + \varepsilon_w T_w' (x / L_x))$$

Здесь L_x — характерный размер возмущения температуры или формы стенки, L_y — ширина канала на входе, T_0 — температура набегающего потока, а δ и ε_w — малые параметры.

Пусть функции f и T_w' при конечных значениях аргумента имеют порядок $O(1)$, а на бесконечности удовлетворяют предельным соотношениям

$$f(-\infty) = T_w'(-\infty) = 0, \quad df(\infty)/dx = dT_w(\infty)/dx = 0$$

Будем рассматривать движение газа, у которого скорости звука a_s и a_T близки по величине. Невозмущенные величины обозначим нулевым индексом, возмущенные — штрихом.

Термодинамическую производную e_{120} представим в виде [2]

$$e_{120} = \varepsilon_a \frac{r_0}{c_{V_0}} e'_{120}, \quad \varepsilon_a \ll 1, \quad e'_{120} \sim 1$$

Пусть скорость набегающего потока слабо отклоняется от изэнтропической и изотермической скоростей звука

$$u_0 - a_{s_0} = \varepsilon_a^2 u_0 A_{s_0}, \quad u_0 - a_{T_0} = \varepsilon_a^2 u_0 A_{T_0}$$

Предположим, что состояние газа в области течения мало отличается от равномерного потока с температурой T_0 и скоростью u_0 на входе. Положим $\varepsilon_w = \varepsilon_a \varepsilon_T$ и выпишем первые члены разложения искомых функций в асимптотические ряды

$$(2.1) \quad u = u_0 (1 + \varepsilon u'), \quad v = \delta u_0 v', \quad p = p_0 (1 + \varepsilon p'), \quad \rho = \rho_0 (1 + \varepsilon \rho')$$

$$(2.2) \quad T = T_0 (1 + \varepsilon_a \varepsilon_T T'), \quad \mathbf{q} = 16 \varepsilon_a \varepsilon_T \sigma T_0^4 \mathbf{q}'$$

$$I_\nu = B_{\nu_0} + \varepsilon_a \varepsilon_T T_0 H_\nu I_\nu', \quad \mathbf{q}_\nu = 4\pi \varepsilon_a \varepsilon_T T_0 H_\nu \mathbf{q}_\nu'$$

$$w_\nu = \frac{1}{c} \int_{4\pi} I_\nu d\Omega = \frac{4\pi}{c} (B_{\nu_0} + \varepsilon_a \varepsilon_T T_0 H_\nu w_\nu'), \quad H_\nu = \frac{\partial B_\nu}{\partial T_0}$$

Здесь σ — постоянная Стефана — Больцмана, w_ν — спектральная плотность лучистой энергии.

Подставляя разложения (2.2) в уравнение переноса (1.3), в первом приближении получим

$$\operatorname{div} \mathbf{q}' = \kappa_0 (T' - w')$$

$$w' = \int_0^\infty \kappa_{\nu_0} H_\nu w_\nu' d\nu \Big| \int_0^\infty \kappa_{\nu_0} H_\nu d\nu, \quad w_\nu' = \frac{1}{4\pi} \int_{4\pi} I_\nu' d\Omega$$

$$\kappa_0 = \int_0^\infty \kappa_{\nu_0} H_\nu d\nu \Big| \int_0^\infty H_\nu d\nu$$

В [1] показано, что в слабо неоднородной среде уравнение переноса всегда можно аппроксимировать уравнением для эффективной плотности лучистой энергии w'

$$(2.3) \quad \Delta w' = 3\kappa_0^2 (w' - T')$$

Введем безразмерные координаты $x^\circ = x / L_x$, $y^\circ = 3^{1/2} \kappa_0 y$, и определим характерные оптические толщины

$$\tau_x = 3^{1/2} \kappa_0 L_x, \quad \tau_y = 3^{1/2} \kappa_0 L_y$$

Подставим разложения (2.1) во второе и третье уравнения движения (1.1).

Для первых членов разложения получим

$$(2.4) \quad p = -(\rho_0 u_0^2 / p_0) u, \quad p = p(x)$$

Здесь и в дальнейшем штрихи, обозначающие отклонения от равновесия, и волна в обозначении безразмерных координат опущены.

Первое соотношение (2.4) справедливо при $\delta \tau_x \ll 1$, второе — при $\delta / \tau_x \ll \varepsilon$ и $\delta^2 \ll \varepsilon$. При $\tau_x \sim 1$ приведенные неравенства сводятся к $\delta \ll \varepsilon$. При слабом отклонении скорости набегающего потока от изотермической скорости звука $\varepsilon_a \varepsilon_T \ll \varepsilon$.

Подставляя разложение (2.1) и (2.2) в уравнения (1.5), получим

$$(2.5) \quad \begin{aligned} -2\varepsilon^2 m_0 (u + B_{s_0}) \frac{\partial u}{\partial x} + \delta\tau_x \left(\frac{\partial v}{\partial y} + \frac{d-1}{y} v \right) &= \varepsilon_a^2 \varepsilon_T \frac{\rho_0 e_{120}}{b \rho_0 u_0^2} (T - w) \\ -2\varepsilon^2 m_0 (u + B_{T_0}) \frac{\partial u}{\partial x} + \delta\tau_x \left(\frac{\partial v}{\partial y} + \frac{d-1}{y} v \right) &= -\varepsilon_T \varepsilon_a^2 \frac{\rho_0 e_{120}}{\rho u_0^2} \frac{\partial T}{\partial x} \end{aligned}$$

Здесь

$$B_{s_0} = \frac{\varepsilon_a^2}{\varepsilon} \frac{A_{s_0}}{m_0}, \quad B_{T_0} = \frac{\varepsilon_a^2}{\varepsilon} \frac{A_{T_0}}{m_0}, \quad m_0 = \frac{1}{2\rho_0^3 u_0^2} \frac{\partial^2 p}{\partial (1/\rho_0)^2}$$

$$N_{B_0} = \frac{\rho_0 u_0^3}{\sigma T_0^4}, \quad b = \frac{3^{1/2} N_{B_0} c_{V_0} T_0}{\tau_x u_0^2}$$

Из уравнений состояния и первого соотношения (2.4) при $\varepsilon_a \varepsilon_T \ll \varepsilon$ получим

$$(2.6) \quad \rho + u = 0$$

Подчиним малые параметры связям

$$(2.7) \quad 2\varepsilon^2 m_0 = \delta\tau_x = \varepsilon \varepsilon_a^2 = -\varepsilon_a^2 \varepsilon_T \frac{\rho_0 e_{120}}{\rho_0 u_0^2} = -2\varepsilon_T \varepsilon \frac{m_0 \rho_0 c_{V_0} T_0}{\rho_0 e_{120}}$$

Из двух последних равенств следует, что $B_{T_0} - B_{s_0} = 1$. Учитывая связи (2.7) и уравнения (2.4), из (2.5) получим

$$(2.8) \quad -(u + B_{s_0}) \frac{du}{dx} + \frac{\partial v}{\partial y} + (d-1) \frac{v}{y} = \frac{1}{b} (w - T)$$

$$(2.9) \quad -(u + B_{T_0}) \frac{du}{dx} + \frac{\partial v}{\partial y} + (d-1) \frac{v}{y} = \frac{\partial T}{\partial x}$$

Вычитая из (2.8) уравнение (2.9), имеем

$$(2.10) \quad \frac{du}{dx} = \frac{1}{b} (w - T) - \frac{\partial T}{\partial x}$$

Перепишем уравнение (2.3), используя безразмерные координаты

$$(2.11) \quad \frac{1}{\tau_x^2} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + (d-1) \frac{1}{y} \frac{\partial w}{\partial y} = (w - T)$$

Рассмотрим граничные условия для полученных уравнений. В [1] показано, что для уравнения (2.11) граничные условия формулируются следующим образом:

на абсолютной черной стенке с температурой T_w $w + (2/3\kappa_0) \partial w / \partial n = T_w$, на адиабатической стенке $\partial w / \partial n = 0$.

Здесь n — внешняя нормаль к поверхности стенки. Учитывая форму стенки, получим граничные условия для первого приближения для абсолютной черной и для адиабатической стенки

$$(2.12) \quad y = \tau_y: w + (2/3\kappa_0) \partial w / \partial y = T_w$$

$$(2.13) \quad y = \tau_y: \partial w / \partial y = 0$$

На стенке удовлетворяется условие непротекания

$$(2.14) \quad y = \tau_y: v = f'(x)$$

Здесь и ниже штрихом обозначена производная по координате x .

На оси или плоскости симметрии выполняются условия

$$(2.15) \quad y = 0: v = 0, \quad \partial w / \partial y = 0$$

При $x = \pm \infty$ излучение находится в равновесии с газом, а течение представляет собой равномерный поток

$$(2.16) \quad \begin{aligned} x = -\infty: u = v = 0, \quad w = T = 0 \\ x = +\infty: u = \text{const}, \quad v = 0, \quad w = T = T_w = \text{const} \end{aligned}$$

Процесс в первом приближении описывается системой уравнений (2.8), (2.9), (2.11) с граничными условиями (2.12) или (2.13) и (2.14) — (2.16). Незвестные функции v , T , w зависят от двух аргументов, продольная скорость u только от координаты x .

Рассмотрим обратную задачу для течения газа в канале с абсолютно черной стенкой. В этом случае будем считать, что функции $u(x)$ и $f(x)$ известны. Тогда для определения функций w , v , T , T_w имеются четыре уравнения (2.8), (2.9), (2.11), (2.12) с граничными условиями (2.14) — (2.16). Давление газа p находится по формуле (2.4), а плотность ρ из соотношения (2.6).

Найдем зависимость поперечной скорости v от продольной скорости $u(x)$ и от плотности лучистой энергии w . Умножив (2.8) на b , проинтегрируем уравнения (2.8), (2.11) по y . Приравняем правые части полученных равенств и, учитывая условия (2.15) на оси симметрии, получим

$$(2.17) \quad v = \frac{y}{d} (u + B_{s0}) \frac{du}{dx} + \frac{1}{b} \left[\frac{\partial w}{\partial y} + \frac{1}{\tau_x^2 y^{d-1}} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \int_0^y \eta^{d-1} w(x, \eta) d\eta \right]$$

Из условий непротекания (2.14) следует

$$(2.18) \quad \begin{aligned} f'(x) = \frac{\tau_y}{d} (u + B_{s0}) \frac{du}{dx} + \\ + \frac{1}{b} \left[\frac{\partial w(x, \tau_y)}{\partial y} + \frac{1}{\tau_x^2 \tau_y^{d-1}} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \int_0^{\tau_y} \eta^{d-1} w(x, \eta) d\eta \right] \end{aligned}$$

Параметр b характеризует влияние излучения на движение газа. При $b = \infty$ излучение отсутствует, а из выражений (2.17), (2.18), (2.10) имеем

$$(2.19) \quad v = (y/d)(u + B_{s0}) du/dx, \quad f = (\tau_y/2d)(u + 2B_{s0})u, \quad u = -T$$

Температура газа зависит в этом случае только от координаты x , а поперечная скорость v является линейной функцией от y . Формулы (2.19) описывают течение газа в гидравлическом приближении [3].

3. Случай больших τ_x . Рассмотрим случай, в котором оптическая толщина $\tau_x \gg 1$. Тогда уравнение переноса (2.11) имеет вид

$$(3.1) \quad \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \frac{d-1}{y} \frac{\partial w}{\partial y} = w - T$$

Уравнение (3.1) описывает одномерный перенос излучения в поперечном направлении. Подставляя выражение для температуры T из уравнения (3.1) в (2.10), получим

$$(3.2) \quad \frac{\partial w}{\partial x} = \left(\frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{d-1}{y} \frac{d}{dx} \right) \left(\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{w}{b} \right) - \frac{du}{dx}$$

Это уравнение связывает плотность лучистой энергии w с продольной скоростью u и рассматривалось в линейной одномерной теории нестационарного переноса излучения [4, 5] при $d = 1$. Координата x играла там роль времени, а y — роль оптической толщины.

При $\tau_x \gg 1$ формулы (2.17), (2.18) также упрощаются

$$(3.3) \quad v = (y/d)(u - u_s)u' + (1/b)\partial w / \partial y$$

$$(3.4) \quad f'(x) = (\tau_y/d)(u - u_s)u' + (1/b)\partial w(x, \tau_y) / \partial y$$

Здесь через $u_s = -B_{s_0}$ и $u_T = -B_{T_0}$ обозначены скорости газа в точках, где выполняются условия $u(x) = a_s(x)$ и $u(x) = a_T(x)$ соответственно. Отметим, что $u_s - u_T = 1$.

Введем обозначения

$$(3.5) \quad \varphi_s(u, f) = f - 1/2 (\tau_y/d) u (u - 2u_s)$$

$$\varphi_T(u, f) = f - 1/2 (\tau_y/d) u (u - 2u_T)$$

Условие непротекания (3.4) с использованием обозначений (3.5) можно записать в виде

$$y = \tau_y: \partial w / \partial y = b\varphi_s'$$

Для плотности лучистой энергии w имеется неоднородное уравнение (3.2) с граничными условиями

$$(3.6) \quad y = \tau_y: \partial w / \partial y = b\varphi_s'; \quad y = 0: \partial w / \partial y = 0; \quad x = -\infty: w = 0$$

Здесь решается обратная задача: u и f — заданные функции аргумента x . Подстановка $W = w - (b/\tau_y)(d + y^2/2)\varphi_s' - (d/\tau_y)\varphi_T$ приводит к однородным граничным условиям и неоднородному уравнению для функции W

$$(3.7) \quad y = \tau_y: \partial W / \partial y = 0; \quad y = 0: \partial W / \partial y = 0; \quad x = -\infty: W = 0$$

$$(3.8) \quad \frac{\partial W}{\partial x} = \left(\frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{d-1}{y} \frac{\partial}{\partial y} \right) \left(\frac{\partial W}{\partial x} + \frac{W}{b} \right) - \frac{b}{2\tau_y} y^2 \varphi_s''$$

Первое условие в (3.6) получено из условия непротекания (3.4) а не из энергетического баланса (2.12) на стенке.

Рассмотрим плоский случай, когда $d = 1$. Решение задачи (3.7), (3.8) ищем в виде ряда Фурье

$$(3.9) \quad W = \frac{1}{2} W_0 + \sum_{n=1}^{\infty} W_n(x) \cos \alpha_n y, \quad \alpha_n = \frac{\pi n}{\tau_y}$$

Коэффициенты $W_n(x)$ удовлетворяют дифференциальным уравнениям

$$(3.10) \quad (1 + \alpha_n^2)W_n' + (1/b)\alpha_n^2 W_n + 1/2 (b/\tau_y) c_n \varphi_s'' = 0, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

$$c_0 = 2/3\tau_y^2, \quad c_n = (-1)^n \cdot 4 / \alpha_n^2, \quad n \geq 1$$

Здесь c_n — коэффициенты Фурье функции y^2 .

Граничным условиям (3.7) ряд (3.9) удовлетворяет автоматически. Уравнения (3.10) имеют решения

$$W_0 = -1/3 b \tau_y \varphi_s'$$

$$W_n(x) = (-1)^{n+1} \frac{2b}{\tau_y \alpha_n^2 (1 + \alpha_n^2)} \int_{-\infty}^x \varphi_s''(\xi) \times$$

$$\times \exp \left[-\frac{\alpha_n^2}{b(1 + \alpha_n^2)} (x - \xi) \right] d\xi, \quad n \geq 1$$

Возвращаясь к функции w , получим

$$(3.11) \quad w(x, y) = \frac{b}{\tau_y} \left(1 + \frac{1}{2} y^2 - \frac{1}{6} \tau_y^2 \right) \varphi_s' + \frac{1}{\tau_y} \varphi_T + \sum_{n=1}^{\infty} W_n(x) \cos \alpha_n y$$

Из энергетического баланса (2.12) и выражения (3.11) находим температуру стенки

$$(3.12) \quad T_w(x) = \frac{b_0}{\tau_y} \varphi_s' + \frac{1}{\tau_y} \varphi_T - b \tau_y^3 \int_{-\infty}^x \varphi_s''(\xi) Q(b, \tau_y; x - \xi) d\xi$$

$$b_0 = b \left(1 + (2 / \sqrt{3}) \tau_y + 1/3 \tau_y^2 \right)$$

$$Q(b, \tau_y; \xi) = \frac{2}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2 (\tau_y^2 + n^2 \pi^2)} \exp \left[-\frac{n^2 \pi^2}{b (\tau_y^2 + n^2 \pi^2)} \xi \right]$$

Оценим ряд, входящий в (3.11), для непрерывной функции φ_s'' , воспользовавшись теоремой о среднем

$$W_n(x) = (-1)^{n+1} \frac{2b}{\tau_y \alpha_n^2 (1 + \alpha_n^2)} \varphi_s''(x_n) \times$$

$$\times \int_{-\infty}^x \exp \left[-\frac{\alpha_n^2}{b(1 + \alpha_n^2)} (x - \xi) \right] d\xi = (-1)^{n+1} \frac{2b^2}{\pi^4 n^4} \tau_y^3 \varphi_s''(x_n)$$

$$-\infty < x_n < \infty$$

Тогда

$$\left| \sum_{n=1}^{\infty} W_n \cos \alpha_n y \right| \leq \sum_{n=1}^{\infty} |W_n(x) \cos \alpha_n y| \leq \sum_{n=1}^{\infty} |W_n(x)| =$$

$$= \frac{2}{\pi^4} b \tau_y^3 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{|\varphi_s''(x_n)|}{n^4} \leq \frac{2}{\pi^4} b^2 \tau_y^3 m \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4} = \frac{1}{45} m b^2 \tau_y^3$$

$$m = \max_{1 < n < \infty} |\varphi_s''(x_n)|$$

Если сумма в (3.11) и (3.12) мала по сравнению с остальными членами, то w и T_w связаны с продольной скоростью u и с функцией f соотношениями

$$w(x, y) = (b / \tau_y) \left(1 + y^2 / 2 - \tau_y^2 / 6 \right) \varphi_s' + (1 / \tau_y) \varphi_T$$

$$T_w(x) = (b_0 / \tau_y) \varphi_s' + (1 / \tau_y) \varphi_T$$

Сумма в (3.11) будет малой для гладкого профиля скорости (m мало), при сильном влиянии излучения (b мало) и для канала с малой поперечной оптической толщиной (τ_y мало).

Вычислим температуру газа

$$(3.13) \quad T = w - \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = \frac{b}{2\tau_y} \left(y^2 - \frac{\tau_y^2}{3} \right) \varphi_s' + \frac{1}{\tau_y} \varphi_T + \sum_{n=1}^{\infty} (1 + \alpha_n^2) \times \\ \times W_n(x) \cos \alpha_n y$$

и величину скачка температуры $[T]_w$ на стенке

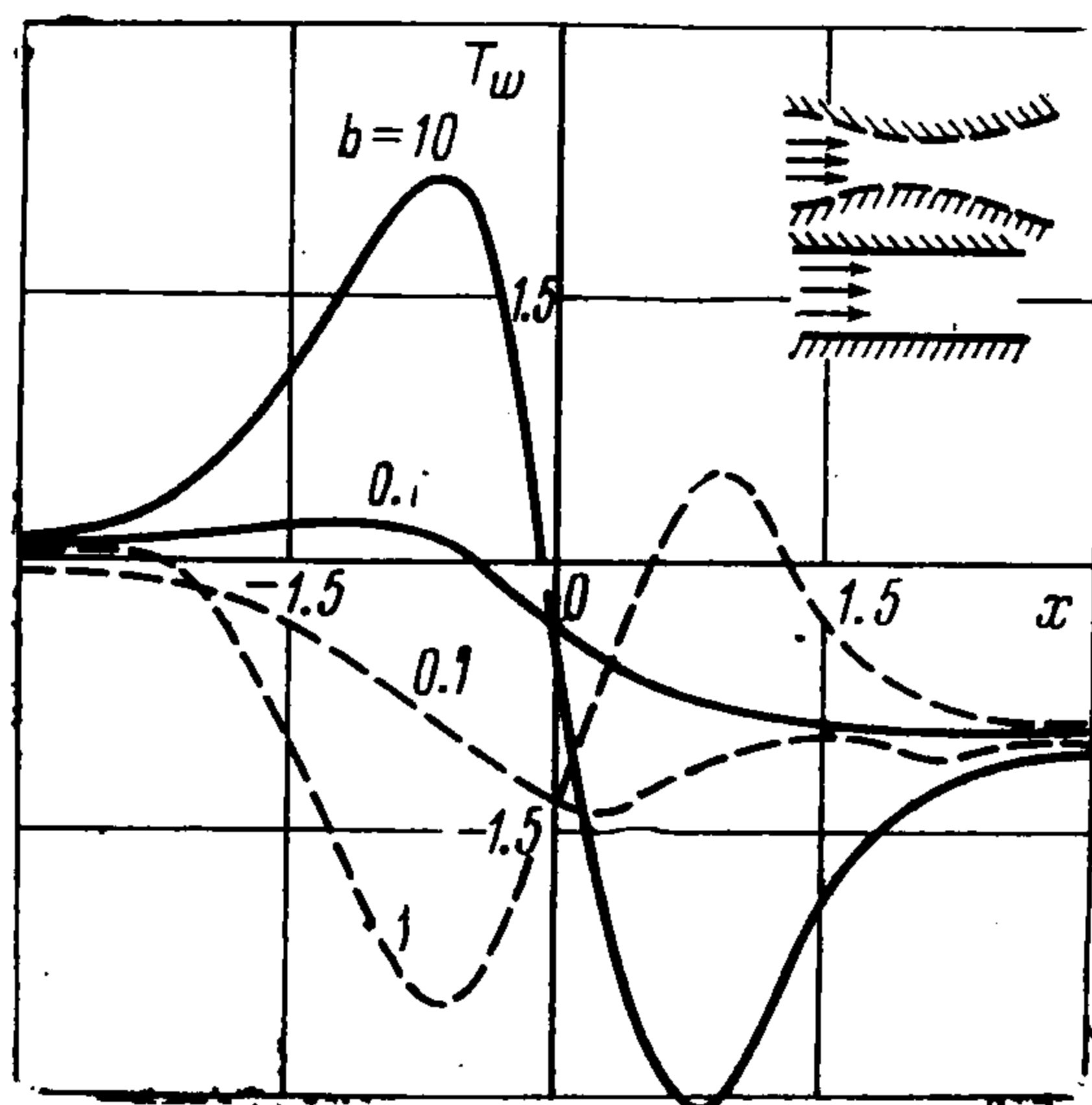
$$[T]_w = T_w(x) - T(x, \tau_y) = \\ = \frac{b}{\tau_y} \left(1 + \frac{2}{\sqrt{3}} \tau_y \right) \varphi_s' + 2b\tau_y \int_{-\infty}^x \varphi_s''(\xi) Q_1(b, \tau_y; x - \xi) d\xi \\ Q_1(b, \tau_y; \xi) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\tau_y^2 + \pi^2 n^2} \exp \left[- \frac{n^2 \pi^2}{b(\tau_y^2 + \pi^2 n^2)} \xi \right]$$

Решение обратной задачи полностью определяется формулами (3.11)–(3.13).

Обратную задачу можно поставить, задавая функции $u(x)$ и $T_w(x)$. Тогда для нахождения $f(x)$ нужно решать интегро-дифференциальное уравнение (3.12), а после этого находить w и T_w по формулам (3.11), (3.13).

Из (3.12) видно, что при больших значениях b первый и третий члены дают основной вклад в T_w . Так как большие значения b соответствуют слабому влиянию излучения на движение газа, то эти члены связаны с изэнтропическими процессами. При малых b основной вклад дает член $\varphi_T / \tau_y = -u(u - 2u_T) / 2d + f / \tau_y$, описывающий изотермические процессы.

Функция $T_w(x)$ при $u(x) = 0.5(1 + \text{th } x)$ и $u_s = 0.5$ показана на фиг. 1 для различных значений b . Сплошные линии соответствуют прямой стенке $f(x) = 0$, пунктирные — изогнутой, когда $(x) = -\exp(-x^2)$.



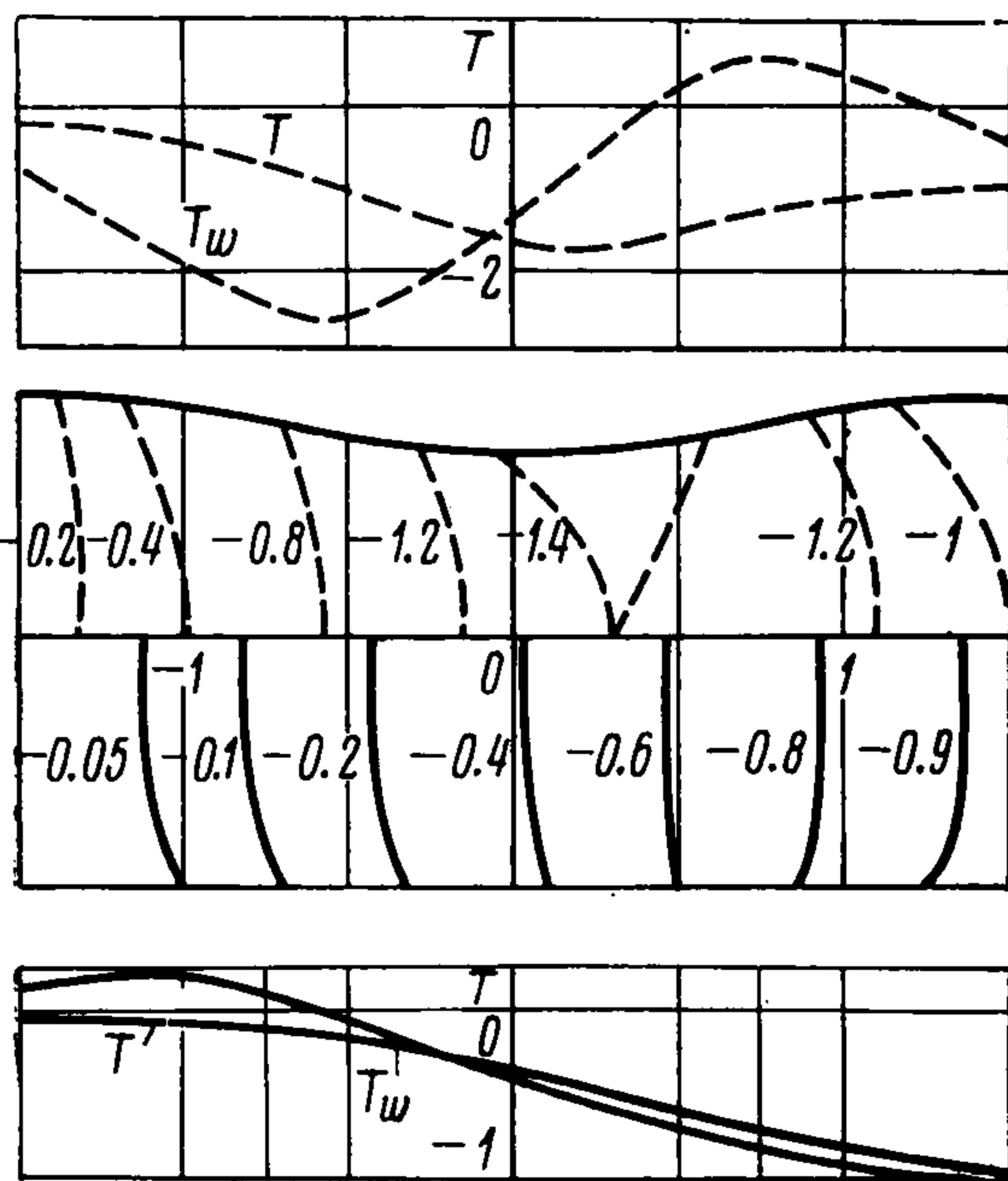
Фиг. 1

Представляет интерес распределение температуры T внутри канала при заданном режиме разгона. В формуле (3.13) нельзя пренебречь рядом, как при вычислении T_w и w . Результаты расчетов представлены на фиг. 2 и 3. Сплошные линии соответствуют функции $f = 0$, пунктирные — $f = -\exp(-x^2)$.

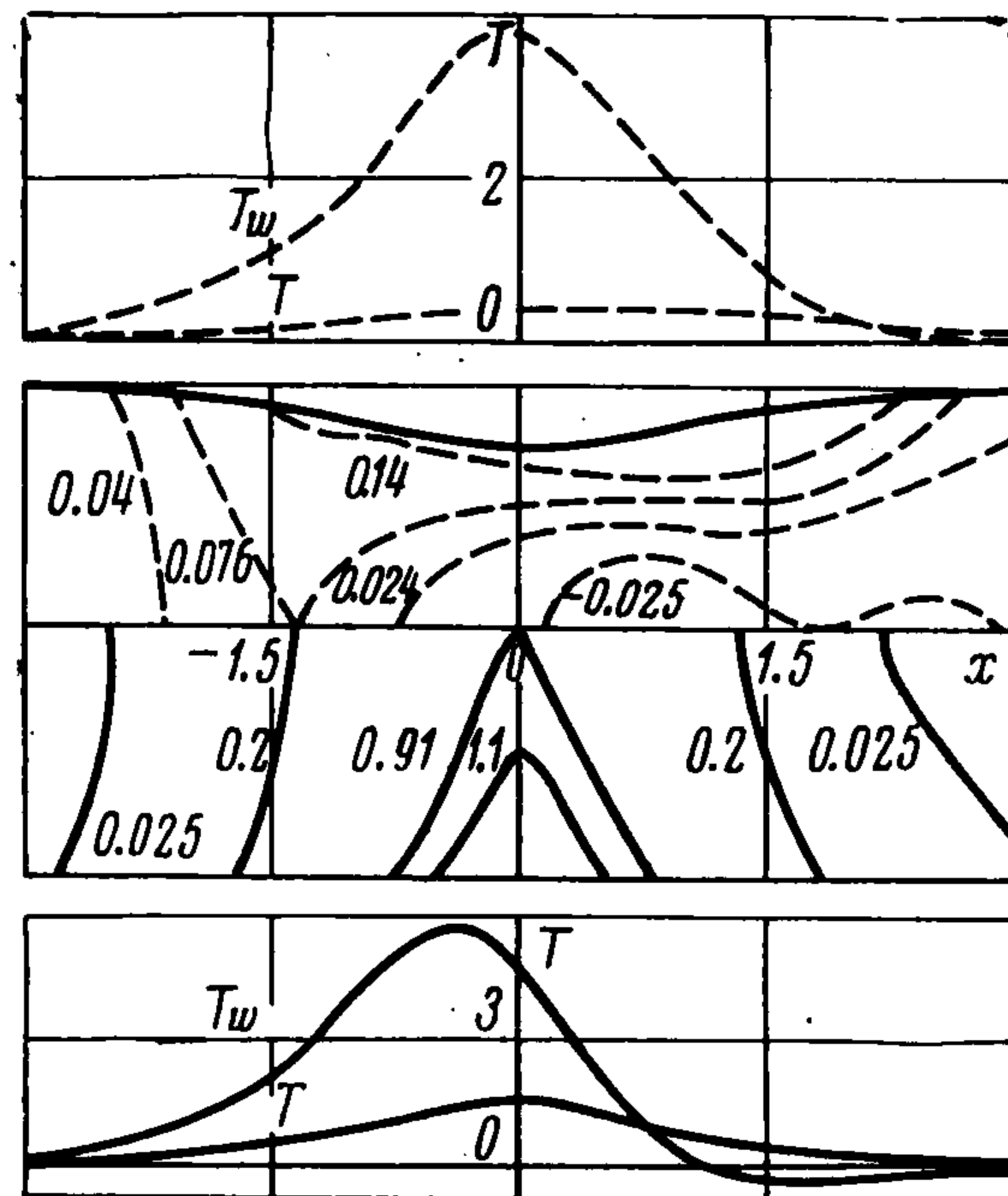
Фиг. 2 соответствует тому же режиму разгона, что и фиг. 1: $u(x) = 0.5(1 + \text{th } x)$, $u_s = 0.5$, а фиг. 3 — скорости $u(x) = 1.5(1 + \text{th } x)$, $u_s = 2.5$. В первом случае происходит переход скорости газа только через изэнтропическую скорость звука u_s , а во втором случае — переход через u_s и изотермическую скорость звука u_T . Температура стенки T_w на фиг. 3 существенно больше, чем на фиг. 2.

Связь между температурой стенки T_w и скоростью $u(x)$ показана на фиг. 4. Здесь изображены графики функции T_w при $b = 1$ и $f = 0$ для шести различных режимов: 1) разгон от изэнтропически сверхзвуковой до изэнтропически сверхзвуковой скорости,

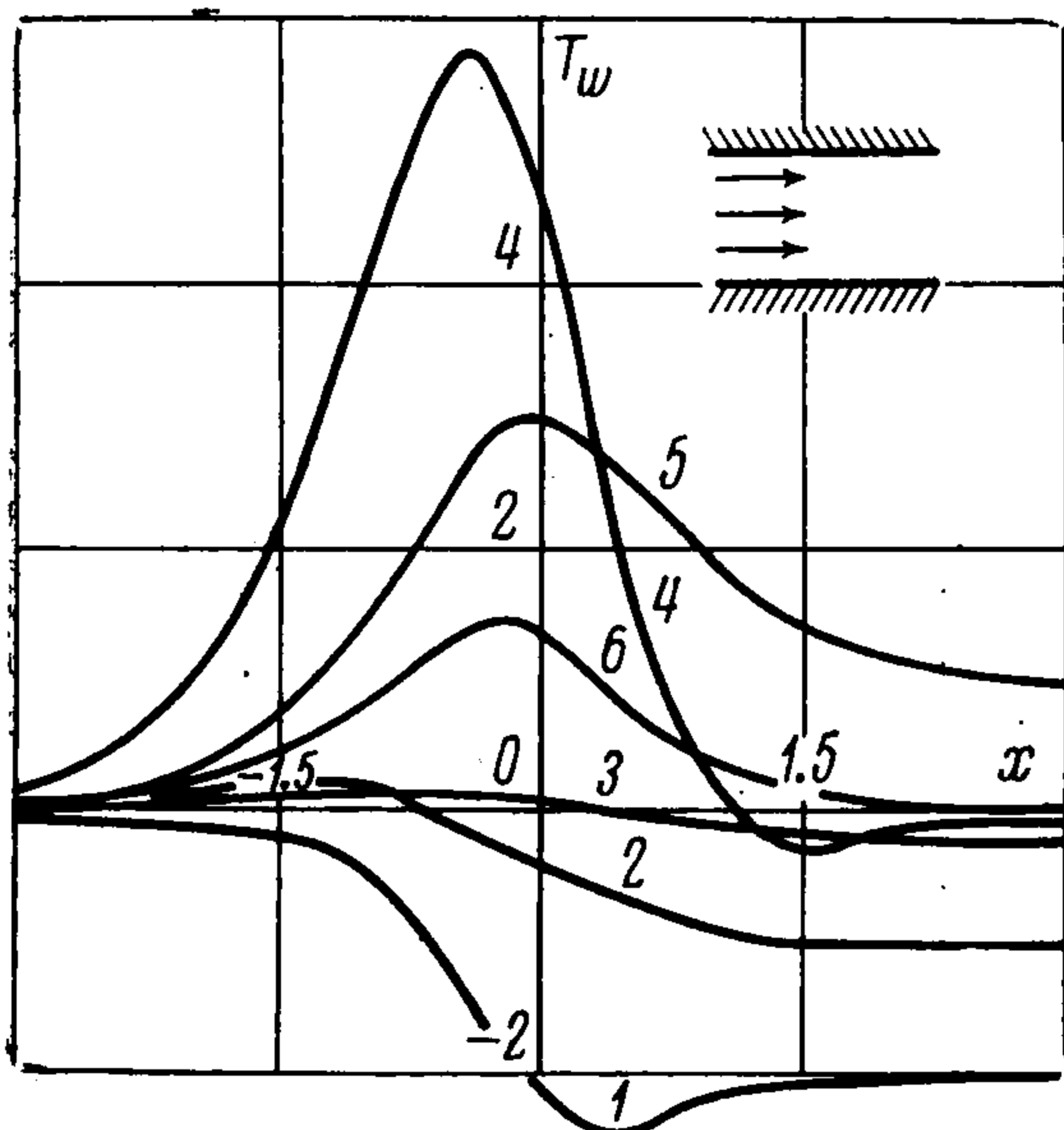
$u = 0.5 (1 + \text{th } x)$, $u_s = -0.5$, $u_T = -1.5$; 2) разгон от изэнтропически дозвуковой, но изотермически сверхзвуковой до изэнтропически сверхзвуковой скорости $u = 0.5 (1 + \text{th } x)$, $u_s = 0.5$, $u_T = -0.5$; 3) разгон от изотермически сверхзвуковой, но изэнтропически дозвуковой до изэнтропически дозвуковой, но изотермически сверхзвуковой скорости $u = 0.2 (1 + \text{th } x)$, $u_s = 0.5$, $u_T = -0.5$; 4) разгон от



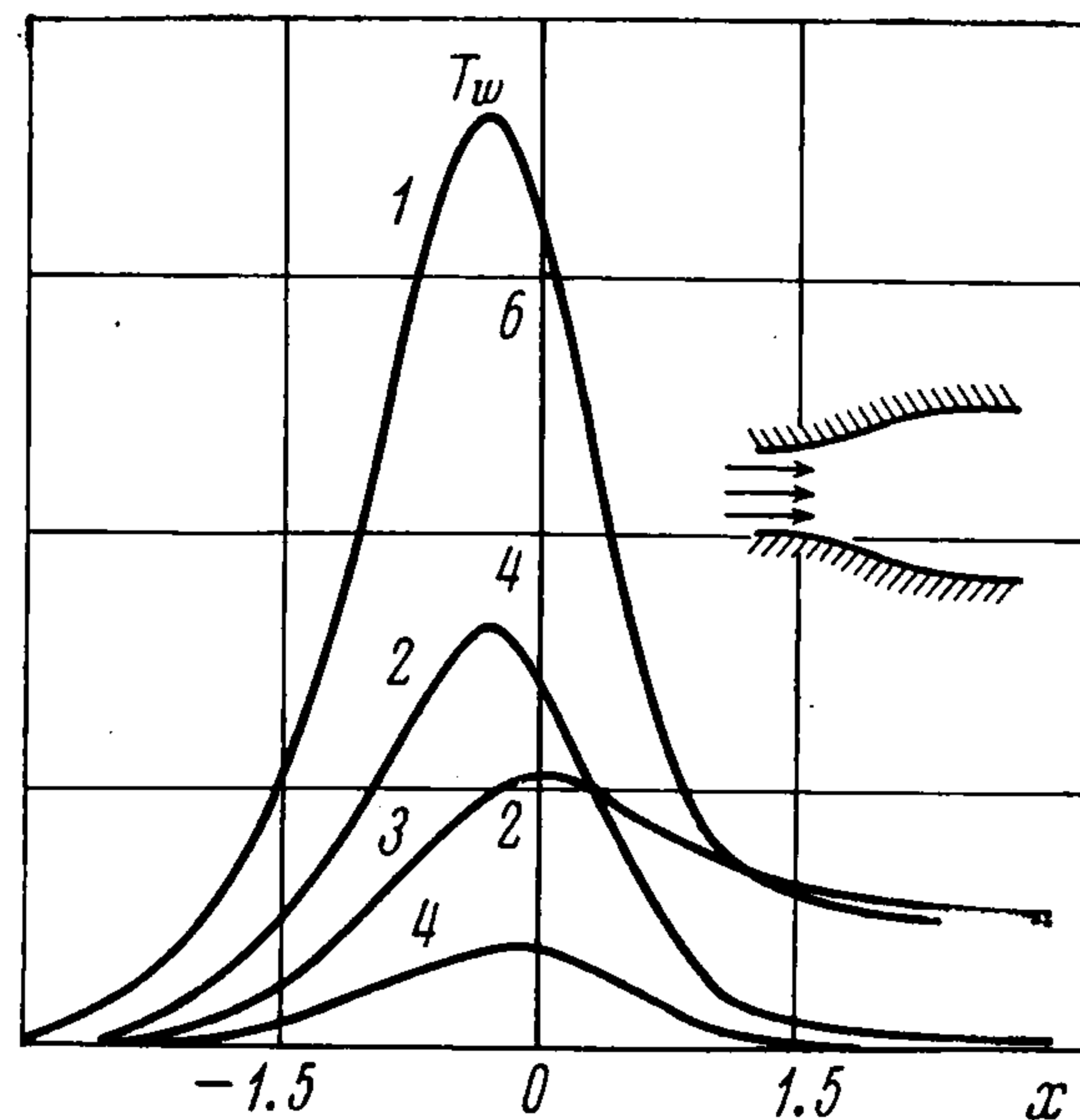
Фиг. 2



Фиг. 3



Фиг. 4



Фиг. 5

изотермически дозвуковой до изэнтропически сверхзвуковой скорости $u = 1.5 (1 + \text{th } x)$, $u_s = 2.5$, $u_T = 1.5$; 5) разгон от изотермически дозвуковой скорости до изотермически сверхзвуковой, но изэнтропически дозвуковой скорости $u = 0.5 (1 + \text{th } x)$, $u_s = 1.5$, $u_T = 0.5$; 6) разгон от изотермически дозвуковой до изотермически дозвуковой скорости $u = 0.5 (1 + \text{th } x)$, $u_s = 2.5$, $u_T = 1.5$.

На фиг. 5 показан разгон газа излучением, когда геометрия стенки препятствует разгону: $f = 0.5 (1 + \text{th } x)$. Кривые 1 и 3 соответствуют скорости $u(x) = 1.5 (1 + \text{th } x)$, $u_s = 2.5$, а кривые 2 и 4 — скорости $u(x) = (1 + \text{th } x)$, $u_s = 1.5$. Для кривых 1 и 2 параметр $b = 1$; $b = 0.1$ для кривых 3 и 4.

Рассмотрим течение газа в канале с адиабатической стенкой. В этом случае температура T_w не входит в формулировку задачи. Из условия (2.13) и требования непротекания (3.4) следует, что f и u связаны соотношением $f = (\tau_y / 2d) u (u + 2B_s)$. Уравнение (3.2) с однородными услови-

ями (3.6) имеет решение $w = -u$. Из (3.1) следует, что $T = -u$, а из (3.3), что $v = (y/d)(u - u_s)u'$. Полученное решение совпадает с решением (2.19) для течения неизлучающего газа. Следовательно, адиабатическая стенка в первом приближении исключает влияние излучения на течение газа.

Если задать профиль f и скорость u так, чтобы выполнялось равенство $\varphi_s = f - (\tau_y/2d)(u - 2u_s)u = 0$, то снова получим решение, совпадающее с гидравлическим приближением.

4. Случай $\tau_x \sim 1$. Рассмотрим решение обратной задачи для течения газа в канале с абсолютно черной стенкой при $\tau_x \sim 1$. Операции, аналогичные проведенным в п. 3, приводят к выражению для T и уравнению для w

$$(4.1) \quad T = w - \frac{1}{\tau_x^2} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} - \frac{d-1}{y} \frac{\partial w}{\partial y}$$

$$\frac{\partial w}{\partial x} - \frac{1}{\tau_x^2} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{w}{b} \right) = \left(\frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{d-1}{y} \frac{\partial}{\partial y} \right) \left(\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{w}{b} \right) - \frac{du}{dx}$$

Интегрируя уравнения (2.8), (2.9), (2.11) от 0 до τ_y и используя условия непротекания при $y = \tau_y$, получим

$$\partial w / \partial y = \psi = b\varphi_s' - (1/\tau_x^2)(b\varphi_s' + \varphi_T)''$$

Подстановка $w = (y^2/2\tau_y)\psi + w_0$ приводит к уравнению с однородными граничными условиями

$$(4.2) \quad \frac{\partial w_0}{\partial x} - \frac{1}{\tau_x^2} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(\frac{\partial w_0}{\partial x} + \frac{w_0}{b} \right) = \left(\frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{d-1}{y} \frac{\partial}{\partial y} \right) \left(\frac{\partial w_0}{\partial x} + \frac{w_0}{b} \right) -$$

$$- \frac{y^2}{2\tau_y} \left[\psi - \frac{1}{\tau_y^2} \left(\psi' + \frac{\psi}{b} \right)' \right]' + \frac{d}{\tau_y} \left(\psi' + \frac{\psi}{b} \right) - u'$$

$$y = 0: \frac{\partial w_0}{\partial y} = 0, \quad y = \tau_y: \frac{\partial w_0}{\partial y} = 0$$

Будем искать решение уравнения (4.2) в виде

$$w_0 = w_1(x, y) + w_2(x)$$

Для $w_2(x)$ из (4.2) имеем

$$(4.3) \quad w_2' - \frac{1}{\tau_x^2} \left(w_2' + \frac{w_2}{b} \right)'' = -u' + \frac{d}{\tau_y} \left(\psi' + \frac{\psi}{b} \right)$$

Подставляя значения ψ и ψ' в (4.3), найдем

$$(4.4) \quad w_2 = (d/\tau_y)(b\varphi_s' + \varphi_T)$$

Функция $w_1(x, y)$ удовлетворяет неоднородному уравнению с однородными граничными условиями

$$(4.5) \quad \frac{\partial w_1}{\partial x} - \frac{1}{\tau_x^2} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(\frac{\partial w_1}{\partial x} + \frac{w_1}{b} \right) = \left(\frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{d-1}{y} \frac{\partial}{\partial y} \right) \left(\frac{\partial w_1}{\partial x} + \frac{w_1}{b} \right) -$$

$$- \frac{y^2}{2\tau_y} \left[\psi - \frac{1}{\tau_y^2} \left(\psi' + \frac{\psi}{b} \right)' \right]'$$

$$y = 0: \partial w_1 / \partial y = 0, \quad y = \tau_y: \partial w_1 / \partial y = 0$$

Положим $d = 1$. Решение уравнения (4.5) будем искать в виде ряда Фурье

$$w_1(x, y) = \frac{1}{2} w_{10} + \sum_{n=1}^{\infty} w_{1n}(x) \cos \alpha_n y$$

Для w_{1n} получим уравнение

$$(4.6) \quad w_{1n}'' + (1/b)w_{1n}'' - \tau_x^2(1 + \alpha_n^2)w_{1n}' - (\alpha_n^2\tau_x^2/b)w_{1n} = \\ = (c_n\tau_x^2/2\tau_y)[\psi - (1/\tau_x^2)(\psi' + \psi/b)']'$$

из которого при $n = 0$ получим $w_{10} = -1/3\tau_y\psi$. При $n \geq 1$ для решения уравнения (4.6) используем преобразование Фурье. Тогда

$$w_{1n}(x) = (-1)^n \frac{2}{\pi^2 n^2} \tau_x^2 \tau_y \int_{-\infty}^{+\infty} f(\xi) G(x - \xi) d\xi$$

$$f = [\psi - (1/\tau_x^2)(\psi' + \psi/b)']', \quad G_T(\xi) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{ik\xi}}{P_3(ik)}$$

$$P_3(\xi) = \xi^3 + \xi^2/b - \tau_x^2(1 + \alpha_n^2)\xi - (\alpha_n^2\tau_x^2/b)$$

Из свойств корней $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$ кубического уравнения $P_3(\gamma) = 0$.

$$\gamma_1 + \gamma_2 + \gamma_3 = -\frac{1}{b}, \quad \frac{1}{\gamma_1} + \frac{1}{\gamma_2} + \frac{1}{\gamma_3} = -\frac{b(1 + \alpha_n^2)}{\alpha_n^2},$$

$$\gamma_1\gamma_2\gamma_3 = \frac{\alpha_n^2\tau_x^2}{b}$$

следует, что вещественный корень γ_1 положителен, а комплексно-сопряженные корни γ_2, γ_3 имеют отрицательную действительную часть. Поэтому [6]

$$G(\xi) = \begin{cases} -\left[\frac{\exp(\gamma_2\xi)}{(\gamma_2 - \gamma_1)(\gamma_2 - \gamma_3)} + \frac{\exp(\gamma_3\xi)}{(\gamma_3 - \gamma_1)(\gamma_3 - \gamma_2)} \right], & \xi > 0 \\ -\frac{\exp(\gamma_1\xi)}{(\gamma_1 - \gamma_2)(\gamma_1 - \gamma_3)} & \xi < 0 \end{cases}$$

Возвращаясь к функции w , получим

$$(4.7) \quad w = \left(\frac{b}{\tau_y}\right) \left(1 + \frac{y^2}{2} - \frac{\tau_y^2}{6}\right) \varphi_s'' + \frac{\varphi_T}{\tau_y} - \left(\frac{1}{2} \tau_x^2 \tau_y\right) \times \\ \times \left(y^2 - \frac{\tau_y^2}{3}\right) (b\varphi_s' + \varphi_T)'' + \sum_{n=1}^{\infty} w_{1n}(x) \cos \alpha_n y$$

Для температуры стенки T_w из (2.14) и (2.17) имеем

$$(4.8) \quad T_w = \frac{1}{\tau_y} (b_0\varphi_s' + \varphi_T) - \frac{1}{\tau_x^2} \left(1 + \frac{\tau_y}{3}\right) (b\varphi_s' + \varphi_T)'' + \\ + \tau_x^2 \tau_y \left[\int_{-\infty}^x f(\xi) Q_-(x - \xi) d\xi + \int_x^{\infty} f(\xi) Q_+(\xi - x) d\xi \right] \\ Q_-(\xi) = \frac{2}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \left[\frac{\exp(\gamma_{2n}\xi)}{(\gamma_{1n} - \gamma_{2n})(\gamma_{2n} - \gamma_{3n})} + \frac{\exp(\gamma_{3n}\xi)}{(\gamma_{3n} - \gamma_{1n})(\gamma_{2n} - \gamma_{3n})} \right] \\ Q_+(\xi) = \frac{2}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \frac{\exp(-\gamma_{1n}\xi)}{(\gamma_{1n} - \gamma_{2n})(\gamma_{3n} - \gamma_{1n})}$$

Интегральный член в (4.8) можно оценить аналогично п. 3

$$\tau_x^2 \tau_y \left[\int_{-\infty}^x f(\xi) Q_-(x - \xi) d\xi + \int_x^{\infty} f(\xi) Q_+(\xi - x) d\xi \right] \leq \frac{1}{45} \tau_y^3 b M$$

$$M = \max_{-\infty < \xi < \infty} f(\xi)$$

Температура газа T и скачок температуры $[T]_w$ на стенке так же, как и в п. 3, получаются из уравнений (4.1), (4.7) и (4.8).

Рассмотрим течение газа в канале с адиабатической стенкой. Выпишем граничные условия для w

$$y = \tau_y: \partial w / \partial y = \psi = 0, \quad y = 0: \partial w / \partial y = 0$$

Уравнение (4.5) для $w_1(x, y)$ с однородными граничными условиями и нулевой правой частью дает нулевое решение. Следовательно

$$w = w(x) = \frac{d}{\tau_y} \left(b \frac{d\varphi'_s}{dx} + \varphi_T \right),$$

$$T = T(x) = \frac{d}{\tau_y} \left(1 - \frac{1}{\tau_x^2} \frac{d^2}{dx^2} \right) \left(b \frac{d\varphi'_s}{dx} + \varphi_T \right)$$

$$v = y \frac{d}{dx} \left[f - \varphi_s + \frac{1}{b\tau_y\tau_x^2} \frac{d}{dx} \left(b \frac{d\varphi'_s}{dx} + \varphi_T \right) \right]$$

В отличие от п. 3 перенос излучения уже в первом приближении оказывает влияние на течение газа в канале с адиабатическими стенками, если $\tau_x \sim 1$. Все формулы п. 4 при $\tau_x \rightarrow \infty$ переходят в соответствующие формулы п. 3.

Авторы благодарят В. Н. Котерова за обсуждение работы.

Поступила 26 II 1975

ЛИТЕРАТУРА

1. Котеров В. Н. О трансзвуковых течениях излучающего газа в каналах. Ж. вычисл. матем. и матем. физ., 1975, т. 15, № 3.
2. Александров В. В., Рыжов О. С. О нелинейной акустике излучающего газа. I. Общий анализ уравнений. Ж. вычисл. матем. и матем. физ., 1972, т. 12, № 6.
3. Гудерлей К. Г. Теория околосвуковых течений. М., Изд-во иностр. лит., 1960.
4. Соболев В. В. Перенос лучистой энергии в атмосферах звезд и планет. М., Гостехиздат, 1956.
5. Немчинов И. В. Некоторые нестационарные задачи переноса тела излучением. ПМТФ, 1960, № 1.
6. Градштейн И. С., Рыжик И. М. Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. М., «Наука», 1971.