

РЕШЕНИЕ КВАЗИЛИНЕЙНОГО УРАВНЕНИЯ ПЕРВОГО ПОРЯДКА, ОПИСЫВАЮЩЕГО ЭВОЛЮЦИЮ ПЛАЗМЕННОЙ ТУРБУЛЕНТНОСТИ

Г. Л. Стенчиков

(Москва)

Получено асимптотическое решение задачи Коши для квазилинейного уравнения первого порядка. Построено поле характеристических кривых. Показано, что решение при достаточно больших временах разрывно, однако стремится к гладкому стационарному распределению. Проведены численные расчеты методом характеристик. Результаты асимптотического и численного анализа находятся в хорошем соответствии.

Однородная безграничная плазма, подвергающаяся воздействию мощного высокочастотного излучения [1] или пучка частиц [2], неустойчива. На начальной, линейной стадии в ней возбуждаются экспоненциально нарастающие во времени t электромагнитные колебания с волновыми векторами \mathbf{k} из некоторой области фазового пространства. Нелинейные процессы становятся существенными позже, при высокой спектральной плотности энергии $w(\mathbf{k}, t)$ этих колебаний. Эти процессы приводят к насыщению энергии электромагнитных волн. Такое состояние плазмы называется турбулентным [3-5]. Исследование эволюции спектральной плотности энергии турбулентных шумов служит основой для выяснения вида функций распределения частиц плазмы и закономерностей поглощения и рассеяния плазмой энергии пучков частиц или мощного излучения. Эти вопросы являются основными в проблеме использования мощных пучков света и релятивистских электронов для нагрева плазмы.

1. В ряде случаев [6-9] описание эволюции плазменной турбулентности сводится к решению задачи Коши

$$(1.1) \quad \frac{\partial u}{\partial t} - \frac{1}{u} = u \left[1 - z^2 + \int_{z_1}^{z_2} dz' q(z' - z) u(z', t) \right]$$

$$u(z, 0) = u_0(z), \quad z_1 < z < z_2$$

где $u(z, t) \propto w(\mathbf{k}, t)$ — угловое распределение энергии пульсаций. Переменная z определяет отклонение распространения нарастающих с инкрементом $1 - z^2$ колебаний от направления наиболее интенсивной раскачки. Интегральное слагаемое описывает принятый в [6-9] нелинейный стабилизирующий механизм — индуцированное рассеяние волн на частицах плазмы. В результате взаимодействия с частицами электромагнитные волны меняют направление. Это приводит к перераспределению энергии пульсаций, возбуждаемых в области $|z| < 1$ фазового пространства. Турбулентный шум перекачивается в зону затухания, $z > 1$, где инкремент отрицателен. Ненулевая плотность энергии в областях затухания $|z| > 1$ поддерживается благодаря равновесию между поглощением энергии частицами плазмы и тепловым возбуждением пульсаций (слагаемое —

$1/u$ в левой части (1.1)). «Вынос шума» из области раскачки в область затухания является причиной стабилизации распределения энергии в фазовом пространстве.

Положение z_1, z_2 максимальных отклонений и вид ядра $g(\xi)$ зависят от конкретной физической системы. Все ядра $g(\xi)$ — нечётные функции, экспоненциально быстро спадающие к нулю с характерным масштабом $1/\beta \ll 1$ при $|\xi| \rightarrow \infty$ [6-9]. Для функций $u(z, t)$, с характерной длиной изменения большей ширины ядра $1/\beta$, (1.1) асимптотически эквивалентно при $\beta \rightarrow \infty$ квазилинейному дифференциальному уравнению первого порядка [6,8,9]

$$(1.2) \quad \frac{\partial u}{\partial t} - \frac{1}{u} = u(1 - z^2) - \varepsilon u \frac{\partial u}{\partial z}$$

$$u(z, 0) = u_0(z), \quad -\infty < z < \infty$$

Исследование квазилинейного уравнения (1.2) представляет интерес по ряду причин. Во-первых, может быть выполнен асимптотический анализ при $\varepsilon \rightarrow 0$. Во-вторых, вся информация о виде ядра g содержится в единственном числовом параметре $\varepsilon \ll 1$. В-третьих, на простом примере можно проследить, как известные в газовой динамике и нелинейной акустике конвективные эффекты осложняются специфичными для плазмы явлениями раскачки и тепловой генерации колебаний.

В [10-12] рассматривались дифференциальные аппроксимации для интегро-дифференциальных уравнений, аналогичных (1.1), но не содержащих членов, ответственных за раскачку и тепловую генерацию шумов. Стационарное обыкновенное дифференциальное уравнение

$$(1.3) \quad \varepsilon u \frac{du}{dz} = \frac{1}{u} + u(1 - z^2)$$

следующее из (1.2), использовалось в [6,8,13] для описания стационарного распределения энергии в фазовом пространстве.

2. Задача (1.2) эквивалентна задаче Коши для характеристической системы обыкновенных дифференциальных уравнений, которая после переобозначения $y = u^2$ принимает вид

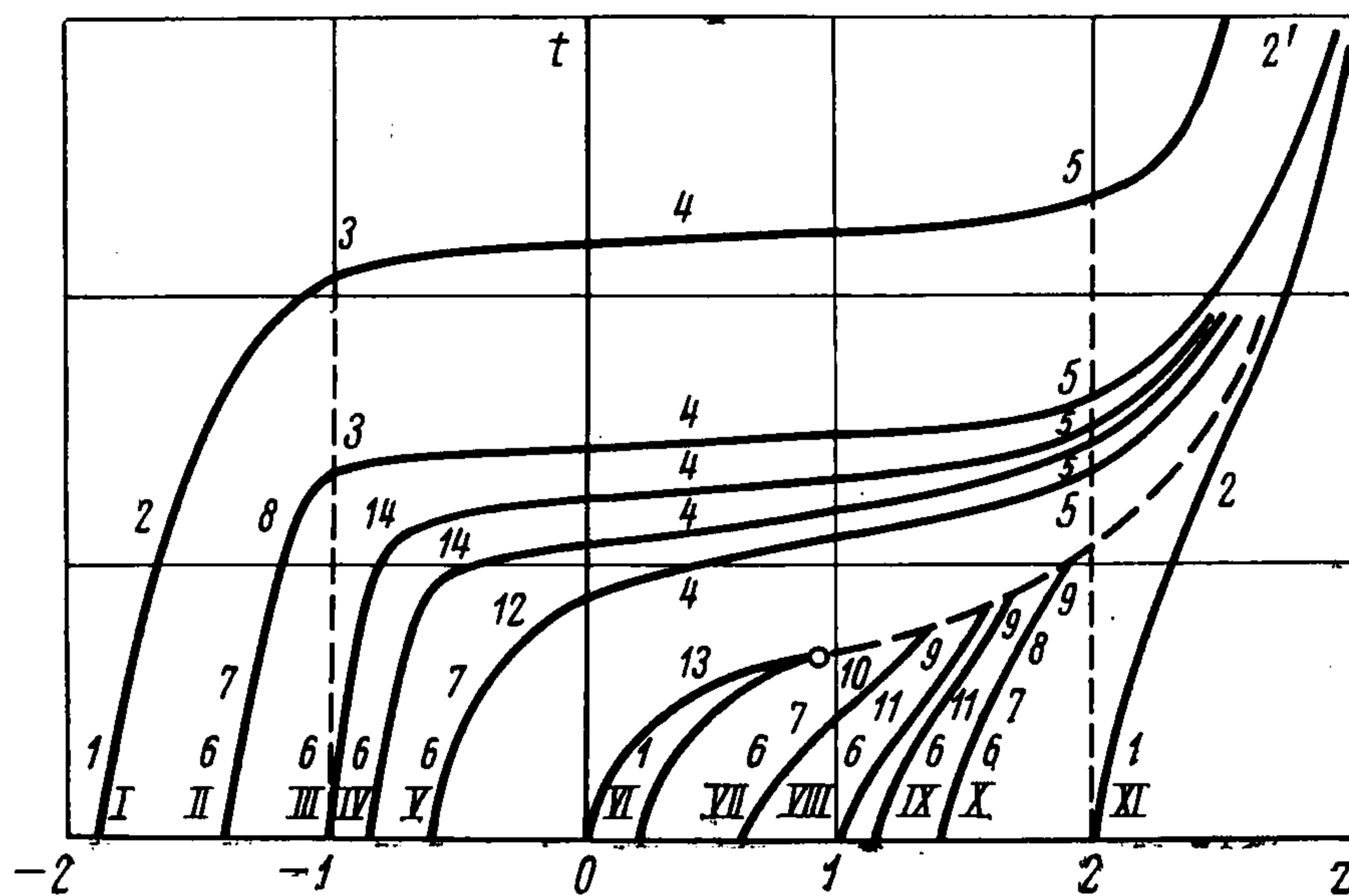
$$(2.1) \quad \begin{aligned} dy/dt &= 2 + 2y(1 - z^2), & dz/dt &= \varepsilon \sqrt{y} \\ z(0) &= z_0, & y(0) &= y_0(z_0) = u_0^2(z_0) \end{aligned}$$

Первое уравнение (2.1) описывает поведение искомой функции $y(t)$ вдоль характеристической кривой, форма которой определяется вторым уравнением (2.1). Параметр ε мал ($\varepsilon \ll 1$).

Дальнейший анализ базируется на методе срачиваемых асимптотических разложений [14, 15]. На фиг. 1 приведена схема поведения характеристик уравнения (1.2) на (z, t) -плоскости. Сплошными линиями изображены характеристические кривые, пунктиром — траектория ударного разрыва. Римскими цифрами обозначены характеристики различных типов, отличающиеся начальным значением координаты $z_0 = z(0)$:

I: $z_0 < -1$; II: $z_0 = -1 + \Delta \varepsilon^\alpha$, $\Delta = O(1)$, $\Delta < 0$, $0 < \alpha < 2/5$;
 III: $z_0 = -1 + \Delta \varepsilon^\alpha$, $\Delta = O(1)$, $\alpha > 2/5$; IV: $z_0 = -1 + \Delta \varepsilon^\alpha$, $\Delta = O(1)$, $\alpha = 2/5$;
 V: $z_0 = -1 + \Delta \varepsilon^\alpha$, $\Delta = O(1)$, $\Delta > 0$, $0 < \alpha < 2/5$;
 VI: $-1 < z_0 < 1$; VII: $z_0 = 1 + \Delta \varepsilon^\alpha$, $\Delta = O(1)$, $\Delta < 0$, $0 < \alpha < 2/5$;
 VIII: $z_0 = 1 + \Delta \varepsilon^\alpha$, $\Delta = O(1)$, $\alpha > 2/5$; IX: $z_0 = 1 + \Delta \varepsilon^\alpha$, $\Delta = O(1)$, $\alpha = 2/5$;
 X: $z_0 = 1 + \Delta \varepsilon^\alpha$, $\Delta = O(1)$, $\Delta > 0$, $0 < \alpha < 2/5$;
 XI: $z_0 > 1$

Арабскими цифрами помечены номера областей, через которые проходят характеристические траектории. В каждой из этих областей характеристика описывается своим асимптотическим разложением. Везде в даль-



Фиг. 1

нейшем анализ ограничен лишь первыми членами таких разложений. Номера областей и индексы внутренних переменных, используемых для описания решения в этих областях, совпадают. Областям, в которых разложения идентичны, присвоены одинаковые номера.

Полное описание решения достигается рассмотрением 46 зон вдоль различных характеристических кривых. Ниже приведены лишь основные моменты асимптотического анализа. Детали, которые могут быть воспроизведены по аналогии, опущены. Нумерация переменных и областей неоднородности совпадает с нумерацией на фиг. 1.

Введем переменные

$$(2.2) \quad t_1 = t, \quad y_1 = y, \quad r_1 = (z - z_0) / \varepsilon$$

которые переводят (2.1) в систему

$$(2.3) \quad \begin{aligned} dy_1 / dt_1 &= 2 + 2y_1 (1 - z_0^2 - \varepsilon 2r_1 z_0 - \varepsilon^2 r_1) \\ dr_1 / dt_1 &= \sqrt{y_1}, \quad r_1(0) = 0, \quad y_1(0) = y_0(z_0) \end{aligned}$$

Её решение

$$(2.4) \quad \begin{aligned} y_1 &= \left\{ y_0(z_0) e^{-2(z_0^2-1)t_1} + \frac{1}{z_0^2-1} [1 - e^{-2(z_0^2-1)t_1}] \right\} \{1 + O(\varepsilon)\} \\ r_1 &= (z_0^2 - 1)^{-1} \{ y_0^{1/2}(z_0) - y_1^{1/2} + \xi(t_1, z_0) \} \end{aligned}$$

$$\xi(t_1, z_0) = \frac{1}{2} (z_0^2 - 1)^{-1/2} \ln \left[\frac{y_0^{1/2}(z_0) - (z_0^2 - 1)^{-1/2}}{y_0^{1/2}(z_0) + (z_0^2 - 1)^{-1/2}} \frac{y_1^{1/2} + (z_0^2 - 1)^{-1/2}}{y_1^{1/2} - (z_0^2 - 1)^{-1/2}} \right]$$

$$z_0^2 - 1 > 0$$

$$\xi(t_1, z_0) = (1 - z_0^2)^{-1/2} [\operatorname{arc} \operatorname{tg} ((1 - z_0^2) y_0(z_0))^{1/2} - \operatorname{arc} \operatorname{tg} ((1 - z_0^2) y_1)^{1/2}] \quad z_0^2 - 1 < 0$$

справедливо в области 1: $z - z_0 = O(\varepsilon)$, $t = O(1)$ для всех начальных значений аргумента $z = z_0$ на вещественной оси, за исключением малых окрестностей точек $z = \pm 1$ (фиг. 1), в которых инкремент неустойчивости мал: $1 - z^2 = o(1)$. Этот случай необходимо рассмотреть отдельно. Продолжая построение характеристических кривых I и XI типов (фиг. 1) с начальными значениями $|z_0| > 1$, введем замену

$$(2.5) \quad t_2 = \varepsilon t_1, \quad y_2 = y_1, \quad r_2 = \varepsilon r_1 = z - z_0$$

переводящую уравнения (2.3) в систему

$$(2.6) \quad \varepsilon dy_2 / dt_2 = 2 + 2y_2 (1 - z_0^2 - 2r_2 z_0 - r_2^2)$$

$$dr_2 / dt_2 = \sqrt{y_2}$$

Интеграл (2.6), удовлетворяющий условиям сращивания с решением (2.4) в области 1

$$y_2 \rightarrow (z_0^2 - 1)^{-1}, \quad r_2 \rightarrow t_2 (z_0^2 - 1)^{-1/2}; \quad \varepsilon \rightarrow 0; \quad y_1, \quad t_1, \quad r_1 = O(1)$$

имеет вид

$$(2.7) \quad y_2 = (z^2 - 1)^{-1} \{1 + O(\varepsilon)\}; \quad \ln |(z^2 - 1)^{1/2} - z| + z (z^2 - 1)^{1/2} =$$

$$= \{2t_2 + \ln |(z_0^2 - 1)^{1/2} - z_0| + z_0 (z_0^2 - 1)^{1/2}\} \{1 + O(\varepsilon)\}$$

Формулы (2.7) описывают стационарное распределение спектральной плотности энергии, так как в выражении для искомой функции $y = (z^2 - 1)^{-1}$ отсутствует явная зависимость от времени и зависимость от начальных условий. В области 2: $z - z_0 = O(1)$, $t = O(\varepsilon^{-1})$ и в следующих за ней вдоль характеристики областях искомая функция $u = \sqrt{y}$ подчиняется стационарному уравнению (1.3), исследованному в [13]. Уравнение характеристической кривой следует из второго соотношения (2.1) и соответствующих условий сращивания. Для $z_0 > 1$ разложение (2.7) заканчивает построение характеристики типа XI (фиг. 1).

Продолжим построение траектории типа I с начальным значением $z_0 < -1$ (фиг. 1). Разложение (2.7) сопрягается с решением в области 3: $z + 1 = O(\varepsilon^{2/5})$, $0 > t + (2\varepsilon)^{-1} \{\ln |(z_0^2 - 1)^{1/2} - z_0| + z_0 (z_0^2 - 1)^{1/2}\} = O(\varepsilon^{-2/5})$, описывающим быстрое возрастание энергии шумов

$$(2.8) \quad y_3 = W^2(r_3) \{1 + O(\varepsilon^{2/5})\}$$

$$t_3 = \left\{ \int_a^\infty d\xi W^{-1}(\xi) + \int_\infty^{r_3} d\xi W^{-1}(\xi) \right\} \{1 + O(\varepsilon^{2/5})\}$$

$$t_3 = \{t_2 + 2^{-1} [\ln |(z_0^2 - 1)^{1/2} - z_0| + z_0 (z_0^2 - 1)^{1/2}]\} \varepsilon^{-2/5},$$

$$y_3 = y_2 \varepsilon^{2/5}, \quad r_3 = (z + 1) \varepsilon^{-2/5}$$

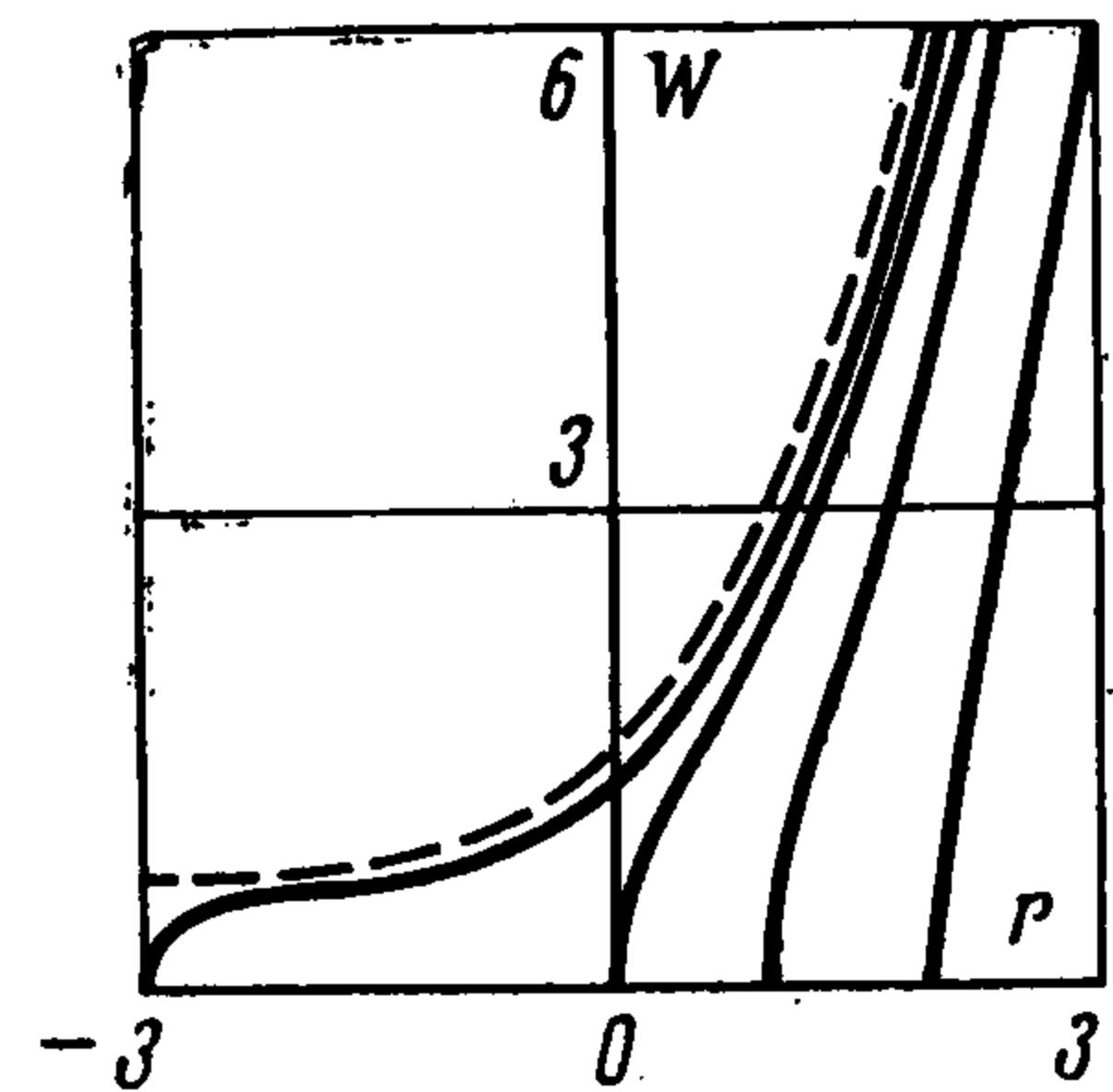
Функция $W(r_3)$, изображенная на фиг. 2 пунктиром, удовлетворяет уравнению $dW/dr_3 = W^{-2} + 2r_3$ и обладает следующими асимптотиками [13]:

$$W = (-2r_3)^{-1/2}, \quad r_3 \rightarrow -\infty; \quad W = r_3^2 + 1.633, \quad r_3 \rightarrow \infty$$

Условия сращивания главных членов разложений не дают возможности определить величины первого интеграла в уравнении для характеристической траектории (2.8). Однако решение системы (2.1) непрерывно зависит от начального значения z_0 . Используя это, можно показать, что величина указанного интеграла в (2.8) равна нулю. Аналогичная процедура применяется ниже в других случаях без дополнительных упоминаний.

При $-1 < z < 2$ и $\{t + (2\varepsilon^{-1})[\ln |(z_0^2 - 1)^{1/2} - z_0| + z_0(z_0^2 - 1)^{1/2}]\} = O(1)$ энергия шумов достигает больших значений $y = O(\varepsilon^{-2})$. Решение в этой области описывается (фиг. 1) формулами

$$(2.9) \quad \begin{aligned} y_4 &= (z - z^3/3 + 2/3)^2 \{1 + O(\varepsilon^{2/5})\} \\ (z + 1)^{-1} - 1/3 \ln |z + 1| + 1/3 \ln |z - 2| &= -t_4 \{1 + O(\varepsilon^{2/5})\} \\ y_4 &= \varepsilon^{1/5} y_3, \quad t_4 = \varepsilon^{-2/5} t_3, \quad z = \varepsilon^{2/5} r_3 - 1 \end{aligned}$$



Фиг. 2

Разложение в переходной области 5, когда $z - 2 = O(\varepsilon)$ и $\{t + (2\varepsilon)^{-1}[\ln |(z_0^2 - 1)^{1/2} - z_0| + z_0(z_0^2 - 1)] + 1/3 \ln \varepsilon\} = O(1)$ (фиг. 1), имеет форму

$$(2.10) \quad \begin{aligned} -1/3 y_5^{1/2} + (6\sqrt{3})^{-1} \ln |[(3y_5)^{1/2} + 1] [(3y_5)^{1/2} - 1]^{-1}| &= \\ = r_5 \{1 + O(\varepsilon^{2/5})\} \end{aligned}$$

$$\int_{-0.98}^{r_5} d\xi y_5^{-1/2}(\xi) = t_5 \{1 + O(\varepsilon^{2/5})\}; \quad r_5 = (z - 2)\varepsilon^{-1},$$

$$y_5 = y_4 \varepsilon^{-2}, \quad t_5 = t_4 + \frac{1}{3} \ln \varepsilon$$

Оно связывает (2.9) с решением, описывающим равновесие между поглощением энергии частицами плазмы и тепловой генерацией шумов

$$(2.11) \quad \begin{aligned} y_2 &= (z^2 - 1)^{-1} \{1 + O(\varepsilon^{2/5})\}, \quad \ln |(z^2 - 1)^{1/2} - z| + z(z^2 - 1)^{1/2} = \\ &= \{2t_2' + \ln(2 - 3^{1/2}) + 2 \cdot 3^{1/2}\} \{1 + O(\varepsilon^{2/5})\} \end{aligned}$$

$$t_2' = \varepsilon t + 2^{-1} \{\ln |(z_0^2 - 1)^{1/2} - z_0| + z_0(z_0^2 - 1)^{1/2}\} + 1/3 \varepsilon \ln \varepsilon$$

Характеристические кривые (2.11) аналогичны уже рассмотренным характеристическим кривым (2.7), но смещены по отношению к ним в область больших времён t (фиг. 1). Разложения (2.11) справедливы в области $2' : z > 2, t \gtrsim - (2\varepsilon)^{-1} \{\ln |(z_0^2 - 1)^{1/2} - z_0| + z_0(z_0^2 - 1)^{1/2}\} - 1/3 \ln \varepsilon + \varepsilon^{-1}$.

3. При $z_0 = 1 + \Delta \varepsilon^\alpha$, $0 < \alpha < \infty$, $\Delta = O(1)$ (характеристики типа VII — X, фиг. 1) инкремент неустойчивости $1 - z_0^2 = O(\varepsilon^\alpha)$ первоначально мал. Введем переменные

$$(3.1) \quad t_6 = t_1, \quad y_6 = y_1, \quad r_6 = (z - 1 - \Delta \varepsilon^\alpha) \varepsilon^{-1}$$

которые переводят (2.3) в систему

$$(3.2) \quad \begin{aligned} dy_6 / dt_6 &= 2 + 2y_6 (-2\Delta\epsilon^\alpha - \Delta^2\epsilon^{2\alpha} - 2\epsilon^{1+\alpha} r_6\Delta - 2\epsilon r_6 - \epsilon^2 r_6^2) \\ dr_6 / dt_6 &= \sqrt{y_6} \end{aligned}$$

Ее решение, удовлетворяющее начальным условиям

$$r_6(0) = 0, \quad y_6(0) = y_0(z_0 = 1 + \Delta\epsilon^\alpha)$$

имеет вид

$$(3.3) \quad \begin{aligned} y_6 &= \{2t_6 + y_0(z_0)\} \{1 + O(\epsilon^\alpha + \epsilon)\} \\ r_6 &= 1/3 \{[2t_6 + y_0(z_0)]^{3/2} - y_0^{3/2}(z_0)\} \{1 + O(\epsilon^\alpha + \epsilon)\} \end{aligned}$$

Оно справедливо в области 6: $z - z_0 = O(\epsilon)$, $t = O(1)$ (фиг. 1).

Дальнейший анализ разбивается на несколько этапов в зависимости от того, какое из трех условий справедливо $0 < \alpha < 2/5$, $2/5 < \alpha < \infty$, $\alpha = 2/5$.

Остановимся на первом случае $0 < \alpha < 2/5$.

В переменных

$$(3.4) \quad y_7 = \epsilon^\alpha y_6, \quad t_7 = \epsilon^\alpha t_6, \quad r_7 = \epsilon^{3\alpha/2} r_6$$

система (3.2) принимает вид

$$(3.5) \quad \begin{aligned} dy_7 / dt_7 &= 2 - 2y_7 [2\Delta + \epsilon^\alpha \Delta^2 + 2r_7 \epsilon^{1-5\alpha/2} + 2r_7 \Delta \epsilon^{1-3\alpha/2} + \\ &+ r_7^2 \epsilon^{2(1-2\alpha)}] \\ dr_7 / dt_7 &= \sqrt{y_7} \end{aligned}$$

Решение этих уравнений, удовлетворяющее условиям сращивания с (3.3)

$$y_7 \rightarrow 2t_7, \quad 3r_7 \rightarrow (2t_7)^{3/2}; \quad y_6, t_6, r_6 = O(1), \quad \epsilon \rightarrow 0$$

описывается разложениями

$$(3.6) \quad \begin{aligned} y_7 &= (2\Delta)^{-1} \{1 - \exp[-4\Delta t_7]\} \{1 + O(\epsilon^\alpha + \epsilon^{1-5\alpha/2})\} \\ r_7 &= -(2\Delta)^{-3/2} \{[1 - \exp(-4\Delta t_7)]^{1/2} + 2^{-1} \ln |1 - \\ &- \exp(-4\Delta t_7)|^{1/2} - 1| - \\ &- 2^{-1} \ln |[1 - \exp(-4\Delta t_7)]^{1/2} + 1| \} \{1 + O(\epsilon^\alpha + \epsilon^{1-5\alpha/2})\}, \\ &\Delta > 0 \\ r_7 &= (-2\Delta)^{-3/2} \{[\exp(-4\Delta t_7) - 1]^{1/2} - \operatorname{arctg} [\exp(-4\Delta t_7) - \\ &- 1]^{1/2}\} \{1 + O(\epsilon^\alpha + \epsilon^{1-5\alpha/2})\}, \quad \Delta < 0 \end{aligned}$$

Область 7 определяется соотношениями

$$(z - z_0) = O(\epsilon^{3\alpha/2-1}), \quad t = O(\epsilon^{-\alpha})$$

Продолжим анализ для случая $\Delta < 0$, соответствующего начальному значению координаты z_0 из области раскачки $-1 < z < 1$, $z - 1 = O(\epsilon^\alpha)$. В переменных

$$(3.7) \quad t_{10} = t_7 - (-2\Delta)^{-1} \ln \epsilon^{5\alpha/2-1}, \quad y_{10} = \epsilon^{2-5\alpha} y_7, \quad r_{10} = \epsilon^{1-5\alpha/2} r_7 + \Delta$$

система (3.5) трансформируется в уравнения

$$(3.8) \quad \begin{aligned} dy_{10} / dt_{10} &= -4y_{10}r_{10} - \epsilon^\alpha 2y_{10}r_{10}^2 + 2\epsilon^{2-5\alpha} \\ dr_{10} / dt_{10} &= \sqrt{y_{10}} \end{aligned}$$

Асимптотическим решением этой системы, удовлетворяющим условиям срачивания с (3.6)

$$y_{10} \rightarrow (-2\Delta)^{-1} \exp \{-4\Delta t_{10}\}, \quad r_{10} \rightarrow (-2\Delta)^{-1/2} \exp \{-2\Delta t_{10}\}$$

$$y_7, t_7, r_7 = O(1), \quad \varepsilon \rightarrow 0$$

являются функции

$$(3.9) \quad t_{10} = (-2\Delta)^{-1} \{ \ln | (r_{10} - \Delta)(r_{10} + \Delta)^{-1} | + 5/2 \ln (-2\Delta) \} \{ 1 + O(\varepsilon^\alpha + \varepsilon^{1-5\alpha/2}) \}$$

$$y_{10} = (r_{10}^2 - \Delta^2)^2 \{ 1 + O(\varepsilon^\alpha + \varepsilon^{1-5\alpha/2}) \}$$

Эти разложения справедливы в области 10: $z - 1 = O(\varepsilon^\alpha)$, $t = O(\varepsilon^{-\alpha})$, $0 < \alpha < 2/5$. Характеристические траектории (3.9) пересекаются. Этот факт не зависит от начального распределения $y_0(z)$ и является следствием внутренних процессов — раскачки в области $|z| < 1$ и перекачки по спектру (конвективный член). Решение задачи (1.2) для достаточно больших времен разрывно при произвольных начальных условиях. Время возникновения разрыва t_s удовлетворяет неравенству

$$t_s \leq \min_{0 < \alpha < 2/5} (-2\Delta\varepsilon^\alpha)^{-1} \ln \varepsilon^{5\alpha/2-1} = (-2\Delta)^{-1} \ln \varepsilon^{-1}$$

Анализ оставшихся вариантов показывает, что характеристики типа VIII — X между собой не пересекаются (фиг. 1). При $t \gtrsim \varepsilon^{-1}$ они в первом приближении совпадают с траекторией типа XI (2.7), соответствующей параметру $z_0 = 1$.

Пусть начальные значения координаты $z_0 = -1 + \Delta\varepsilon^\alpha$, $\alpha > 0$, $\Delta = O(1)$ (характеристики типа II — V, фиг. 1). Совершая замену переменных

$$(3.10) \quad t_6 = t_1, \quad y_6 = y_1, \quad r_6 = (z + 1 - \Delta\varepsilon^\alpha)\varepsilon^{-1}$$

получим из (2.3) систему уравнений и ее интегралы, удовлетворяющие начальным условиям

$$(3.11) \quad \begin{cases} dy_6 / dt_6 = 2 + 2y_6 (\varepsilon^2 2\Delta - \varepsilon^{2\alpha} \Delta^2 - \varepsilon^{1+\alpha} 2r_6 \Delta + \varepsilon 2r_6 - \varepsilon^2 r_6^2) \\ dr_6 / dt_6 = \sqrt{y_6} \end{cases}$$

$$(3.12) \quad y_6 = \{ 2t_6 + y_0(z_0) \} \{ 1 + O(\varepsilon^\alpha + \varepsilon) \}$$

$$r_6 = 1/3 \{ [2t_6 + y_0(z_0)]^{3/2} - y_0^{3/2}(z_0) \} \{ 1 + O(\varepsilon^\alpha + \varepsilon) \}$$

В первом приближении (3.11) и (3.12) совпадают с (3.2) и (3.3). Анализ распадается на несколько этапов: $0 < \alpha < 2/5$, $\alpha > 2/5$, $\alpha = 2/5$. Остановимся на втором из них $\alpha > 2/5$. После замены

$$(3.13) \quad t_{14} = \varepsilon^{1/5} t_6, \quad r_{14} = \varepsilon^{1/5} r_6, \quad y_{14} = \varepsilon^{2/5} y_6$$

система (3.11) преобразуется к виду

$$(3.14) \quad \begin{cases} dy_{14} / dt_{14} = 2 + \varepsilon^{-2/5} 2y_{14} (2\Delta\varepsilon^\alpha - \varepsilon^{2\alpha} \Delta^2 - \varepsilon^{1/5+\alpha} 2r_{14} \Delta + \varepsilon^{2/5} 2r_{14} - \varepsilon^{1/5} r_{14}^2) \\ dr_{14} / dt_{14} = \sqrt{y_{14}} \end{cases}$$

Совершая подстановку $W = y_{14}^{1/2}$ и используя равенство $dy_{14}/dt_{14} = y_{14}^{1/2} dy_{14}/dr_{14}$, получим уравнения для главных членов разложений иско-

мых функций

$$(3.15) \quad dW / dr_{14} = W^{-2} + 2r_{14}, \quad dr_{14} / dt_{14} = W$$

Из (3.12) следуют условия сращивания

$$(3.16) \quad W \rightarrow (3r_{14})^{1/3}, \quad r_{14} \rightarrow 1/3 (2t_{14})^{3/2}; \quad r_6, t_6, y_6 = O(1), \quad \varepsilon \rightarrow 0$$

Интегральные кривые первого уравнения (3.15) изображены на фиг. 2.

Условиям (3.16) удовлетворяет траектория, проходящая через начало координат $W = W_0(r_{14})$. Решение

$$(3.17) \quad y_{14} = W_0^2(r_{14}), \quad t_{14} = \int_0^{r_{14}} d\xi W_0^{-1}(\xi)$$

так же как и (2.8), описывает быстрый рост энергии шумов под воздействием линейного по координате инкремента. Отметим, что (2.8) и (3.17) удовлетворяют одной и той же системе уравнений (3.15), но различным начальным условиям. Область 14 имеет размеры, совпадающие с размерами области 3, но смещена в сторону меньших значений времени $t: z + 1 = O(\varepsilon^{2/3})$, $t = O(\varepsilon^{-2/3})$. Функции (3.17) сращиваются с решениями типа (2.9) в области $-1 < z < 2$ (фиг. 1).

Дальнейший анализ можно провести на основании стационарного уравнения (1.3) [13]. Исследование всех возможных вариантов показывает, что характеристические траектории типа II—V с начальным условием $z_0 = -1 + \Delta\varepsilon^\alpha$, $\alpha > 0$, $\Delta = O(1)$ не пересекаются между собой и при $t \gtrsim \gtrsim 1/3 \ln \varepsilon^{-1} + \varepsilon^{-1}$ в первом приближении совпадают с характеристикой типа XI, соответствующей начальному значению координаты $z_0 = 2$ (см. (2.7)).

4. На характеристических кривых с параметром z_0 из области $-1 < z_0 < 1$ искомая функция согласно (2.4) экспоненциально растет. При $t = O[(1 - z_0^2)^{-1} \ln \varepsilon^{-1}]$ энергия шумов достигает больших значений $y = O(\varepsilon^2)$. Замена переменных $z = \varepsilon r_1 + z_0$, $y_{13} = \varepsilon^2 y_1$, $t_{13} = t_1 - (1 - z_0^2)^{-1} \ln \varepsilon^{-1}$ преобразует систему (2.3) к виду

$$\begin{aligned} dy_{13} / dt_{13} &= 2\varepsilon^2 + 2y_{13}(1 - z^2) \\ dz / dt_{13} &= \sqrt{y_{13}} \end{aligned}$$

Используя равенство $dy_{13} / dt_{13} = y_{13}^{1/2} dy_{13} / dr_{13}$, получим уравнение для главных членов разложений

$$(4.1) \quad \frac{d}{dz} \sqrt{y_{13}} = 1 - z^2, \quad \frac{dz}{dt_{13}} = \sqrt{y_{13}}$$

Нестационарное «турбулентное» решение, удовлетворяющее условиям сращивания с (2.4)

$$(4.2) \quad \begin{aligned} y_{13} &\rightarrow [(1 - z_0^2)(z - z_0)]^2, \quad (z - z_0) \rightarrow (1 - z_0^2)^{-1} \{y_0(z_0) + \\ &+ (1 - z_0^2)^{-1}\}^{1/2} \exp[(1 - z_0^2)t_{13}] \\ r_1, y_1, t_1 &= O(1), \quad \varepsilon \rightarrow 0 \end{aligned}$$

описывается разложениями

$$(4.3) \quad y_{13} = (z - \frac{1}{3}z^3 - z_0 + \frac{1}{3}z_0^3)^2 \{1 + O(\varepsilon)\} - 3 [A \ln(z - z_0) + B \ln(z - Z_1) + C \ln(Z_2 - z)] + C_{13} = t_{13} \{1 + O(\varepsilon)\}$$

$$Z_1 = -z_0/2 - (3 - \frac{3}{4}z_0^2)^{1/2}, \quad Z_2 = -z_0/2 + (3 - \frac{3}{4}z_0^2)^{1/2}$$

$$A = \frac{1}{3}(z_0^2 - 1)^{-1}, \quad B = \frac{1}{3} [z_0 (3 - \frac{3}{4}z_0^2)^{1/2} + 2(1 - z_0^2/4)]^{-1}$$

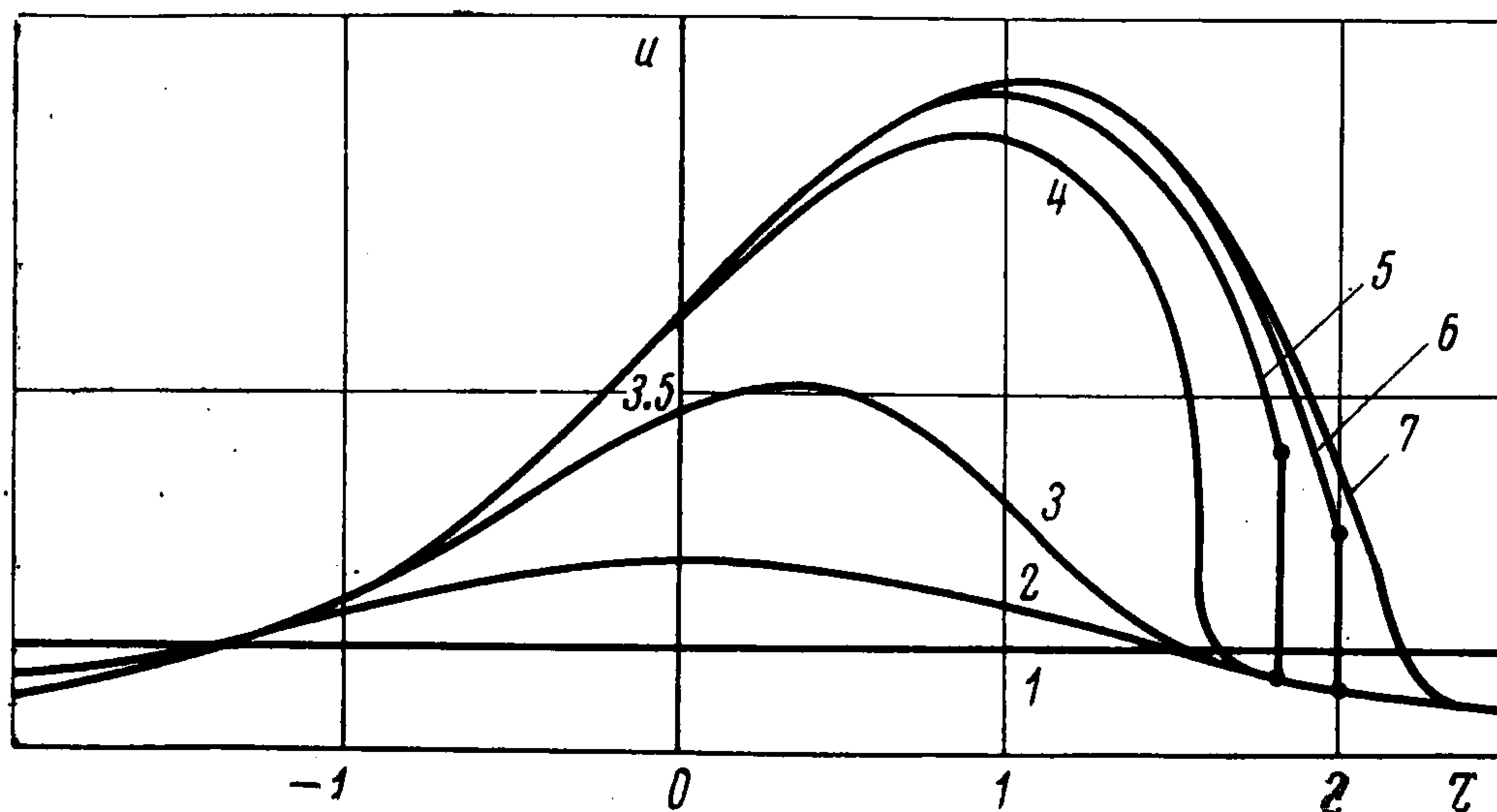
$$C = \frac{1}{3} [2(1 - z_0^2/4) - z_0 (3 - \frac{3}{4}z_0^2)^{1/2}]^{-1}$$

$$C_{13} = 3B \ln(z_0 - Z_1) + 3C \ln(Z_2 - z_0) + (1 - z_0^2)^{-1} \ln \{(1 - z_0^2)[y_0(z_0) + (1 - z_0^2)^{-1}]^{-1/2}\}$$

Область 13 определяется соотношениями

$$z - z_0 = O(1), \quad t + (1 - z_0^2)^{-1} \ln \varepsilon = O(1)$$

При фиксированном z на характеристиках типа VI с различными начальными значениями координаты $z_0' < z_0$ выполняется неравенство



Фиг. 3

$y_{13}(z, z_0') > y_{13}(z, z_0)$. Поэтому характеристические траектории (4.3) с меньшими значениями начальной координаты z_0 приближаются к траекториям с большими значениями z_0 и пересекают их. Такая конфигурация поля характеристических кривых (фиг. 1) соответствует разрывному решению квазилинейного уравнения (1.2).

Рассмотрим траектории с малыми начальными значениями координаты $|z_0| \ll 1$. Из (4.3) следует соотношение

$$(4.4) \quad t_{13} = f(z, z_0) \approx \frac{1}{2} \ln \frac{3z^2}{3 - z^2} - \frac{1}{2} \ln [1 + y_0(z_0)] + z_0 \left[\frac{3(z^2 - 2)}{2z(3 - z^2)} + \frac{\sqrt{3}}{4} \ln \frac{\sqrt{3} + z}{\sqrt{3} - z} \right]$$

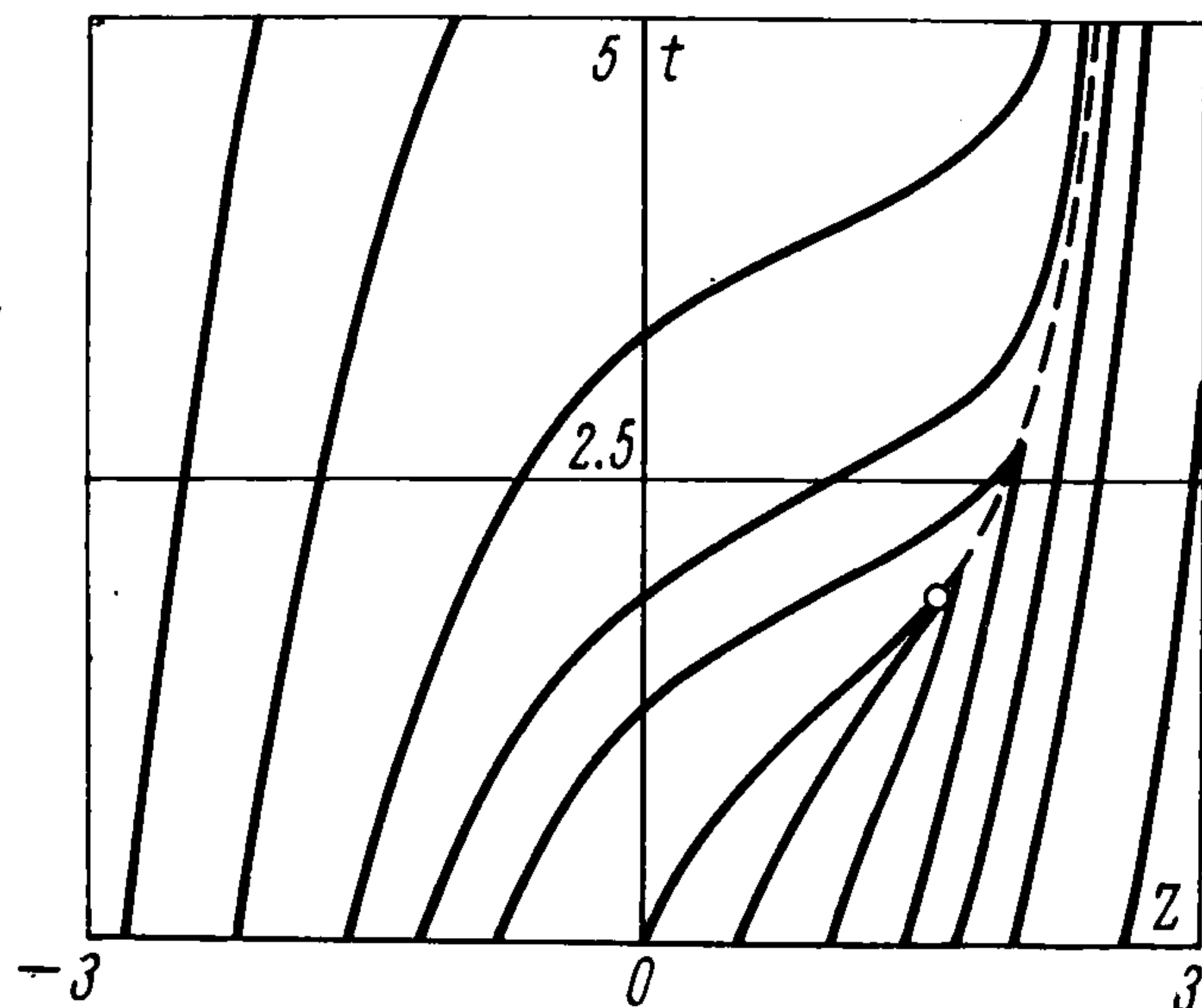
Точка пересечения двух близких характеристик удовлетворяет уравнению

$$(4.5) \quad \frac{\partial f}{\partial z_0} \approx \frac{3(z^2 - 2)}{2z(3 - z^2)} + \frac{\sqrt{3}}{4} \ln \frac{\sqrt{3} + z}{\sqrt{3} - z} - \frac{1}{2} [1 + y_0(z_0)]^{-1} \frac{dy_0(z_0)}{dz_0} = 0$$

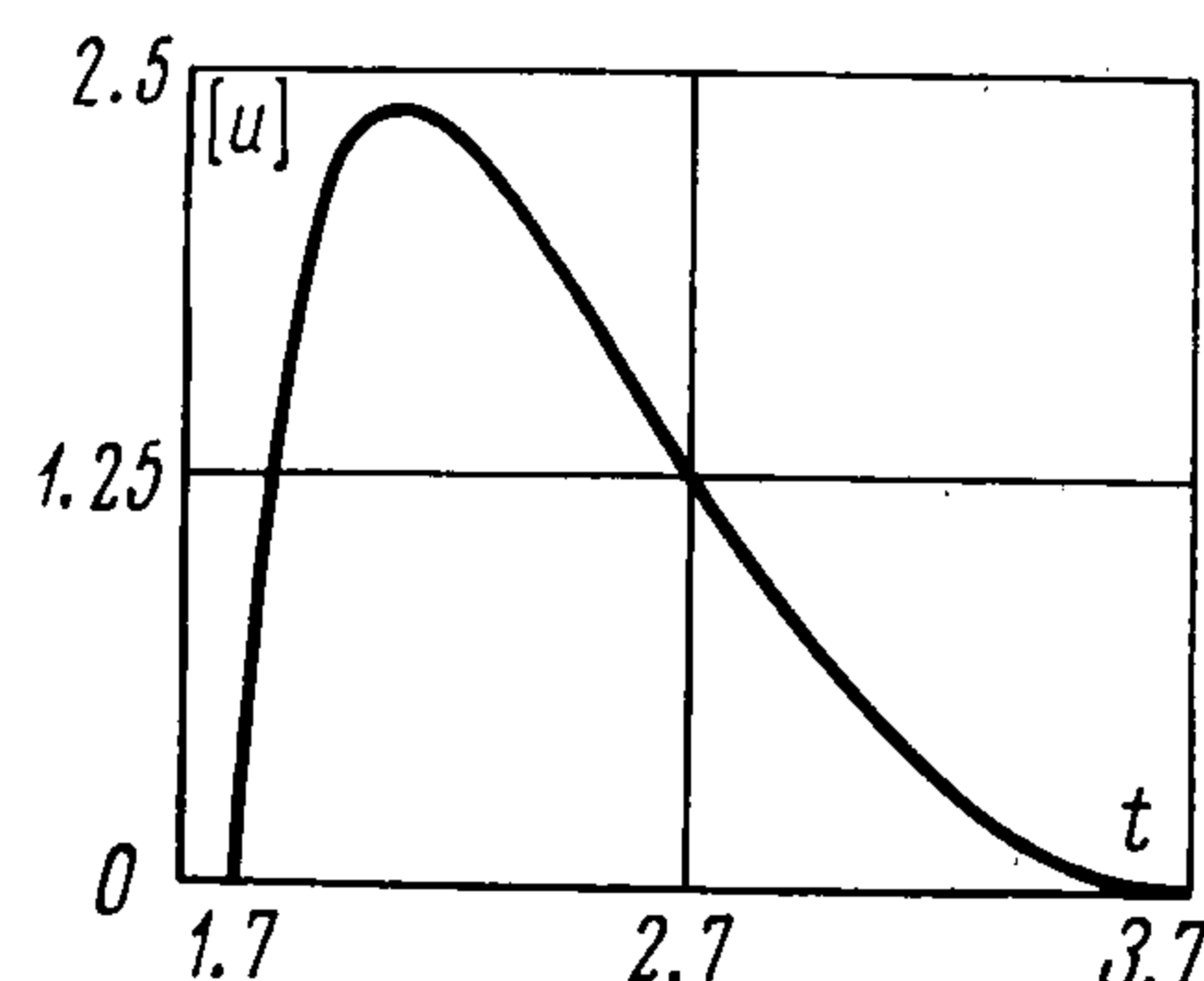
позволяющему предсказать точку зарождения разрыва (z_s, t_s) . Для $y_0(z) \equiv 1$ из (4.5) следует $z_s \approx \sqrt{2}$, $t_s \approx \ln(\sqrt{3}/\varepsilon)$.

Уравнение (1.2) с начальным условием $u_0(z) \equiv 1$ и параметром $\varepsilon = 0.3$ решалось численно методом характеристик [16]. На фиг. 3—5 приведены решения (кривые, помеченные цифрами 1—7, соответствуют значениям времени $t = 0, 0.4, 1.0, 1.8, 2.2, 2.6, 3.6$), поле характеристик на (z, t) -

плоскости и эволюция во времени амплитуды ударного разрыва $[u]$. Асимптотические оценки времени возникновения и затухания ударной волны $t_s \approx \ln(\sqrt{3}/\epsilon) = 1.75$ и $t_\infty \approx 1/3 \ln \epsilon^{-1} + \epsilon^{-1} \approx 3.7$ согласуется с результатами численных расчетов (фиг. 5).



Фиг. 4



Фиг. 5

Разрывное, обобщенное решение корректно поставленной задачи Коши для квазилинейного уравнения должно удовлетворять некоторому условию на траектории разрыва $z = z_s(t)$. Это условие может быть получено из дивергентной записи уравнения (1.2). Корректное условие на разрыве удовлетворяет неравенству, которое в обозначениях данной работы имеет вид [17,18]

$$(4.6) \quad \epsilon u(z_s + 0) \leq dz_s / dt \leq \epsilon u(z_s - 0)$$

В газовой динамике это условие соответствует принципу возрастания энтропии и запрещает решения типа ударных волн разрежения. Уравнению (1.2) соответствует континуум [17,18] корректных условий на разрыве. Из физических соображений выбирается условие

$$(4.7) \quad dz_s / dt = \epsilon / 2 [u(z_s + 0) + u(z_s - 0)]$$

соответствующее сохранению потока энергии шумов через ударный фронт в пространстве волновых векторов.

Решение задачи (1.2) разрывно независимо от начального распределения $y_0(z)$. Однако детальный вид решения, например количество одновременно существующих разрывов, определяется начальным условием. Характеристики с параметром z_0 , лежащим вне интервала $-1 < z_0 < 2$, не пересекают траекторию ударного разрыва. Характеристики с параметром $-1 < z_0 < 2$ формируют ударную волну. Характеристические траектории с начальными значениями из окрестности точки $z = -1$ при $t \gtrsim 1/3 \ln \epsilon^{-1} + \epsilon^{-1}$ асимптотически приближаются к кривой, выходящей из точки $t = 0, z = 2$. [Поэтому амплитуда ударного разрыва $[u] = |u(z_s + 0) - u(z_s - 0)|$, пропорциональная разности тангенсов углов наклона пересекающихся характеристик в точке пересечения, при $t > 1/3 \ln \epsilon^{-1} + \epsilon^{-1}$ убывает до нуля. После этого устанавливается стационарное распределение, совпадающее с полученным в [13]. Этот качественный результат справедлив в силу (4.6) для любых корректных условий на разрыве.

Выводы асимптотического анализа подтверждаются численными расчетами (фиг. 1, 3—5).

Эволюция плазменной турбулентности, насыщаемой спектральной перекачкой, делится во времени на три стадии (фиг. 3). Сначала плазменные шумы экспоненциально растут $0 < t < \ln \varepsilon^{-1}$ в области раскачки $|z| < 1$ и убывают в областях затухания $|z| > 1$.

При $\ln \varepsilon^{-1} < t < \varepsilon^{-1}$ энергия шумов достигает больших значений $u = O(\varepsilon^{-1})$, а интенсивная спектральная перекачка приводит к возникновению ударной волны в фазовом пространстве. На разрывном решении уравнения (1.1) и (1.2) не являются асимптотически эквивалентными. Численные расчеты задачи (1.1) [7] показывают, что ударная волна обладает дисперсионной структурой. При $t \gtrsim \ln \varepsilon^{-1}$ решение интегро-дифференциального уравнения (1.1) имеет колебательный характер с масштабом $1/\beta$, равным ширине ядра.

Дальнейшее поведение спектральной плотности энергии колебаний определяется затуханием ударной волны при $t \gtrsim \frac{1}{3} \ln \varepsilon^{-1} + \varepsilon^{-1}$ и установлением гладкого стационарного распределения.

Автор благодарит В. В. Александрова, В. В. Пустовалова, В. П. Силина, В. Т. Тихончука за помощь в постановке задачи, дискуссии и внимание к работе.

Поступила 16 I 1976

ЛИТЕРАТУРА

1. Силин В. П. Параметрическое воздействие излучения большой мощности на плазму. М., «Наука», 1973.
2. Михайловский А. Б. Теория плазменных неустойчивостей, т. 1. М., Атомиздат, 1970.
3. Кадоццев Б. Б. Турбулентность плазмы. В сб.: Вопросы теории плазмы, вып. 4. М., Атомиздат, 1964, стр. 188—339.
4. Цытович В. Н. Теория турбулентной плазмы. М., Атомиздат, 1971.
5. Пустовалов В. В., Силин В. П. Нелинейная теория взаимодействия волн в плазме. В сб.: Тр. Физическ. ин-та АН СССР, 1972, т. 61.
6. Пустовалов В. В., Силин В. П., Тихончук В. Т. Нелинейное преобразование излучения в плазменные волны. ЖЭТФ, 1973, т. 65, вып. 5.
7. Андреев Н. Е., Пустовалов В. В., Силин В. П., Тихончук В. Т. Нестационарная параметрическая турбулентность плазмы. Письма в ЖЭТФ, 1973, т. 18, вып. 10.
8. Андреев Н. Е., Пустовалов В. В., Силин В. П., Тихончук В. Т. Релаксация параметрической турбулентности плазмы. Квантовая электроника, 1974, т. 1, № 5.
9. Голиков Ю. В., Пустовалов В. В., Силин В. П., Тихончук В. Т. Нелинейная теория генерации шумов электронными потоками в магнитоактивной плазме. Краткие сообщения по физике, 1974, № 3.
10. Компанец А. С. Об установлении теплового равновесия между квантами и электронами. ЖЭТФ, 1956, т. 31, вып. 5.
11. Галеев А. А., Карпман В. И., Сагдеев Р. З. Об одной решаемой проблеме теории турбулентной плазмы. Докл. АН СССР, 1964, т. 157, № 5.
12. Зельдович Я. Б., Сюняев Р. А. Структура ударной волны в спектре излучения при Бозе-конденсации фотонов. ЖЭТФ, 1972, т. 62, вып. 1.
13. Александров В. В., Пустовалов В. В., Силин В. П., Стенчиков Г. Л., Тихончук В. Т. О стационарной спектральной плотности энергии турбулентных плазменных шумов. Изв. вузов. Радиофизика, 1974, т. 17, № 10.
14. Ван-Дайк М. Методы возмущений в механике жидкости. М., «Мир», 1967.
15. Коул Дж. Методы возмущений в прикладной математике. М., «Мир», 1972.
16. Годунов С. К., Рябенский В. С. Разностные схемы. М., «Наука», 1973.
17. Курант Р. Уравнения с частными производными. М., «Мир», 1964.
18. Олейник О. А. Разрывные решения нелинейных дифференциальных уравнений. Успехи матем. наук, 1957, т. 12, вып. 3.