

К ПОСТРОЕНИЮ ПЛОСКИХ СТАЦИОНАРНЫХ РЕШЕНИЙ УРАВНЕНИЙ НЕРАВНОВЕСНОЙ ЗАМАГНИЧЕННОЙ ПЛАЗМЫ

В. И. Артемов, О. А. Синкевич

(Москва)

Разработана методика построения стационарных двумерных распределений электрического тока и электронной температуры в неравновесной замагниченной плазме с учетом теплопроводности и конвекции. Решение представлено в виде асимптотических разложений по малому параметру. Рассмотрено построение нулевого приближения для внешнего и внутреннего разложений. В качестве примера рассмотрена задача о распределении тока в канале с бесконечными электродами.

1. Если пренебречь теплопроводностью и конвекцией, то задачу о стационарном распределении тока в неравновесной плазме можно свести к задаче электродинамики сплошных сред с нелинейными зависимостями коэффициента электропроводности и параметра Холла (Ω) от модуля вектора плотности электрического тока [1]. В плоском случае эта задача приводится к квазилинейному уравнению второго порядка для функции тока или электрического потенциала [2-4] (уравнение (3.1) данной работы). При превышении параметром Холла определенной величины, совпадающей со значением критического параметра Холла для ионизационной неустойчивости, это уравнение меняет свой тип, из эллиптического становится гиперболическим [3-5]. Преобразование годографа для уравнения (3.1) при $\Omega = 0$ использовалось в [2], для $\Omega \neq 0$ — в [6]. В [6] построены решения двух задач в эллиптической области. Численное решение в области эллиптичности проведено в [3].

Для случая малой степени ионизации и постоянного параметра Холла задача о распределении тока в гиперболической области может быть сведена к уравнению первого порядка, частное решение которого используется в [4] для канала МГД генератора с секционированными электродами. Аналогичное решение можно построить методом характеристик [5]. Как было показано в [7], решения [4, 5] являются неэволюционными. Поскольку теплопроводность в работах [3-6] не учитывалась, удовлетворить граничным условиям для электронной температуры нельзя. Экспериментальные исследования распределения тока проводились в канале МГД генератора [8, 9] и в разряде с внешним электрическим полем [4, 10]. Распределение тока при параметре Холла, превышающем критическое значение, имеет вид слоев, вытянутых вдоль среднего тока (стримеры). Время развития стримера значительно меньше времени развития ионизационной неустойчивости.

В данной работе рассматривается решение задачи о стационарном плоском распределении тока в неравновесной плазме с учетом теплопроводности и конвекции.

Рассмотрим плоскую стационарную задачу, в качестве независимых переменных выбирая координаты x и y . Введем безразмерные параметры

$$(1.1) \quad x^+ = \frac{x}{b}, \quad y^+ = \frac{y}{b}, \quad \sigma^+ = \frac{\sigma(n_e, T_e)}{\sigma^*(n_e^*, T_e^*)}, \quad \lambda^+ = \frac{\lambda_e(n_e, T_e)}{\lambda_e^*(n_e^*, T_e^*)}$$

$$\tau^+ = \frac{\tau_e(n_e, T_e)}{\tau_e^*(n_e^*, T_e^*)}, \quad j^+ = \frac{j}{j^*}, \quad \Psi^+ = \frac{\Psi}{j^* b}, \quad n^+ = \frac{n_e}{n_e^*}$$

$$F_-^+ = \frac{F_- \sigma^*}{j^{*2}}, \quad \varepsilon = \frac{kT_e^*}{I}, \quad \alpha = \frac{n_e^*}{n_g}, \quad a_\tau = \frac{d \ln \tau^+}{d \ln n^+}$$

$$\Lambda = \frac{\sqrt{T_e^* \lambda_e^* \sigma^*}}{j^* b}$$

Здесь j — плотность электрического тока, T_e — температура электронов, n_e — их концентрация, σ , λ_e — коэффициенты электропроводности и теплопроводности электронов, b — характерный размер системы (например расстояние между электродами), I — потенциал ионизации присадки, n_g — начальная концентрация атомов присадки. Функция F_- учитывает передачу энергии от электронов к тяжелым частицам. Функция тока $\Psi(x, y)$ связана с плотностью электрического тока соотношением

$$(1.2) \quad j_x = \frac{\partial \Psi}{\partial y}, \quad j_y = -\frac{\partial \Psi}{\partial x}$$

Если задана характерная плотность электрического тока j^* , то характерная температура T_e^* определяется из уравнения

$$(1.3) \quad F_- = {}^{3/2} \delta k T_e^* n_e^* (T_e^*) [\tau_e^*]^{-1} = j^{*2} [\sigma^*]^{-1}$$

Здесь $\delta = 2m_e / m_a$, τ_e — время передачи энергии от электронов к тяжелым частицам, k — постоянная Больцмана. Предполагается, что концентрация электронов и их температура связаны уравнением $n_e = n_e(T_e)$ (например уравнением Саха), а $T_e \gg T_a$.

Если электронная теплопроводность определяется только кондуктивной составляющей и влияние магнитного поля на нее не существенно, а T_e и n_e связаны уравнением Саха, уравнения электродинамики и уравнение энергии для электронов (полная система уравнений приведена в [11]) имеют вид (далее используются только безразмерные переменные, поэтому верхний индекс плюс опускается)

$$(1.4) \quad \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Psi}{\partial y^2} + \left[\Omega \frac{\partial \ln n}{\partial y} - (1 + a_\tau) \frac{\partial \ln n}{\partial x} \right] \times$$

$$\times \frac{\partial \Psi}{\partial x} - \left[\Omega \frac{\partial \ln n}{\partial x} + (1 + a_\tau) \frac{\partial \ln n}{\partial y} \right] \frac{\partial \Psi}{\partial y} = 0$$

$$\frac{\alpha n^2}{1 - \alpha n} = a T^{3/2} \exp(-\varepsilon^{-1} T^{-1})$$

$$\Lambda^2 \left(\frac{\partial}{\partial x} \lambda \frac{\partial T}{\partial x} + \frac{\partial \lambda}{\partial y} \frac{\partial T}{\partial y} \right) - \Lambda \left(\frac{\partial \ln n}{\partial \ln T} - \frac{3}{2} \right) \left(\frac{\partial \Psi}{\partial y} \frac{\partial T}{\partial x} - \frac{\partial \Psi}{\partial x} \frac{\partial T}{\partial y} \right) =$$

$$= \frac{n T}{\tau} - \sigma^{-1} \left[\left(\frac{\partial \Psi}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \Psi}{\partial y} \right)^2 \right]$$

Здесь a — известная константа, $\Omega = e / m_e B \tau_e = \Omega^* \tau$ — параметр Холла для электронов, B — индукция магнитного поля: $\mathbf{B} = (0, 0, B)$. В третьем уравнении системы (1.4) в отличие от работы [11] используется более полное представление конвективного члена, справедливое и при полной ионизации присадки ($\alpha \sim 1$).

Будем искать решение системы (1.4) в некоторой области G , часть границы которой G_1 соответствует идеально проводящим электродам, а часть G_2 — изоляторам. На электродах и изоляторах должны выполняться соответственно условия

$$(1.5) \quad \mathbf{E} \cdot \boldsymbol{\chi}^\circ = 0, \quad \mathbf{j} \cdot \mathbf{n}^\circ = 0$$

где $\boldsymbol{\chi}^\circ$ — вектор, лежащий в плоскости электрода, \mathbf{n}° — вектор, направленный по нормали к поверхности изоляционной стенки.

Кроме того, на всей границе $G = G_1 \cup G_2$ должно быть задано соотношение, связывающее температуру электронов, ее градиент и нормальную составляющую плотности электрического тока

$$(1.6) \quad L(T, \nabla T, j) = 0$$

Функциональный вид соотношения (1.6) на электродах и изоляторах может быть различен. Все дальнейшие рассуждения можно провести, не конкретизируя вида L .

Для большинства реальных задач $\Lambda \ll 1$. Поскольку малый параметр Λ стоит перед старшей производной, то решение исходной задачи может быть построено методом сингулярных возмущений [12, 13], согласно которому общее решение может быть представлено в виде внешнего разложения

$$(1.7) \quad T = \sum_{k=0}^{\infty} \Lambda^k T_k(x, y), \quad n = \sum_{k=0}^{\infty} \Lambda^k n_k(x, y)$$

$$\Psi = \sum_{k=0}^{\infty} \Lambda^k \Psi_k(x, y)$$

и внутреннего

$$(1.8) \quad T = \sum_{k=0}^{\infty} \Lambda^k \theta_k(x^*, y^*), \quad \mathbf{j} = \sum_{k=0}^{\infty} \Lambda^k \mathbf{j}_k(x^*, y^*)$$

$$\mathbf{E} = \sum_{k=0}^{\infty} \Lambda^k \mathbf{E}_k(x^*, y^*)$$

где $x^* = x / \Lambda$, $y^* = y$ или $x^* = x$, $y^* = y / \Lambda$.

Представление внешнего разложения в виде (1.7) позволяет удовлетворить граничным условиям для электродинамических переменных (1.5); для удовлетворения условия (1.6) необходимо вводить внутреннее разложение (1.8).

2. Внутренние разложения при построении плоских решений в замкнутой области могут иметь различный вид: решения типа пограничного слоя у стенок; решения типа стоячих волн ионизации и рекомбинации присадки, расположенных во внутренних областях канала; и решения типа двух-

температурного пограничного слоя, когда существен учет конечности температуры тяжелых частиц. Решения последнего вида встречаются при сшивании решений на границе токовой области ($T \gg T_a$) с областью равновесной плазмы ($T \sim T_a$).

Будем для определенности считать, что плоскость электрода совпадает с плоскостью xz . Подставляя (1.8) в систему (1.4) (предварительно проведя замену независимых переменных $x^* = x$, $y^* = y / \Lambda$) и приравнивая члены одного порядка по Λ , приходим к следующей системе уравнений (для нулевых членов в разложении (1.8)):

$$(2.1) \quad \frac{\partial E_{0x}}{\partial y^*} = 0, \quad \frac{\partial j_{0y}}{\partial y^*} = 0$$

$$\frac{\partial}{\partial y^*} \lambda(\theta_0) \frac{\partial \theta_0}{\partial y^*} + U_y(\theta_0) \frac{\partial \theta_0}{\partial y^*} + F(\theta_0) = 0$$

$$F = j_{0y}^2 \sigma^{-1}(\theta_0) [1 + \Omega^2(\theta_0)] - F_-(\theta_0), \quad U_y = -j_{0y} \left(\frac{\partial \ln n_0}{\partial \ln T_0} - \frac{3}{2} \right)$$

Из первого и второго уравнений системы (2.1) следует, что в пределах пограничного слоя E_{0x} тождественно равняется нулю (так как на электроде $E_x = 0$), а j_{0x} — произвольная, зависящая от x^* функция, которая должна быть определена из построения всей задачи (например может быть задана разность потенциалов между электродами или уравнение электрической цепи, содержащей рассматриваемый канал). В этом случае построение решения в пограничном слое сводится к интегрированию уравнения энергии для электронов, которое решается при следующих граничных условиях: при $y^* \rightarrow \infty$

$$(2.2) \quad \theta_0(x^*, y^* \rightarrow \infty) \rightarrow T_0(x, y = 0), \quad \frac{\partial \theta_0}{\partial y^*} \rightarrow 0$$

Вторым граничным условием является условие на электроде $L(\theta_0(x^*, y^* = 0), \frac{\partial \theta_0}{\partial y^*}, j_{0y}) = 0$. Будем считать, что задано распределение температуры электронов по электроду $T_1(x)$

$$(2.3) \quad L \equiv \theta_0(x^*, 0) - T_1(x) = 0$$

Из (2.2) следует, что внешнее решение при $y = 0$ должно соответствовать особой точке третьего уравнения системы (2.1), т. е. являться нулем функции F . Внутри пограничного слоя заданное на электроде значение температуры асимптотически переходит в значение температуры в ядре потока.

Для пограничного слоя на изоляционной стенке, плоскость которой также совпадает с плоскостью xz , в уравнении энергии следует положить: $U_y = 0$ и

$$(2.4) \quad F(\theta_0) = \sigma(\theta_0) E_{0x}^2 - F_-(\theta_0)$$

Это уравнение может быть проинтегрировано

$$y^* = \pm \int_{T_2(x)}^{\theta_0} \frac{\lambda(S) dS}{\sqrt{2 \int_S \lambda F(S) dS}} + \text{const}$$

где $T_2(x)$ — заданное распределение температуры по изоляционной стенке.

Расчеты можно провести лишь для конкретного состава плазмы. Так, для аргона с присадкой цезия в диапазоне температур $10^3 \div 10^4$ К функция F при любом значении переменного $j_{0y}(E_{0x})$ имеет один нуль T_0 . Соответствующая точка равновесия $(T_0, 0)$ является седлом. Решение в пограничном слое соответствует сепаратрисе, идущей в сторону уменьшения (увеличения) температуры, если температура стенки больше (меньше) температуры на границе пограничного слоя (при $y^* \rightarrow \infty$). Поскольку U_y на аноде и на катоде отличается, по крайней мере, знаком, то пограничные слои различны.

Задача о стационарных ионизационных поверхностях разрыва (ИР) также сводится к интегрированию уравнения энергии. В этом случае всегда существует такой поворот исходной системы координат $(x, y) \rightarrow (x^*, y^*)$, когда ось y^* совпадает с нормалью к поверхности волны. В новой системе координат все зависимые величины являются функциями координаты y^* . Первые два уравнения системы (2.1) выражают сохранение касательной составляющей электрического поля E_{0x} и нормальной составляющей электрического тока j_{0y} . Функция F имеет вид

$$(2.5) \quad F = j_{0y}^2 \sigma^{-1} (1 + \Omega^2) - 2\Omega j_{0y} E_{0x} + \sigma E_{0x}^2 - F_-$$

В отличие от [14] при рассмотрении стационарных ИР будем считать, что перед волной задан полный ток j_1 и угол φ_1 между нормалью к поверхности волны (осью y^*) и вектором j_1 .

Тип точек равновесия, их число и индекс зависят от j_1 , φ_1 и параметра Холла перед волной $\Omega_1 = \Omega_1(j_1, B)$, которые связаны с плотностью тока j_{0y} и электрическим полем E_{0x} соотношениями

$$(2.6) \quad j_{0y} = j_1 \cos \varphi_1, \quad E_{0x} = j_1 \sigma^{-1} (\sin \varphi_1 + \Omega_1 \cos \varphi_1)$$

При всех значениях j_1 , φ_1 , Ω_1 у функции F всегда существует один нуль — T_{01} , который определяется из уравнения $j_1^2 \sigma^{-1} = F_-(T_{01})$. При $\Omega_1 < \Omega_-$ (значение $\Omega_-(j_1)$ в общем случае не совпадает с критическим параметром Холла для ионизационной неустойчивости) при любом значении угла φ_1 других нулей, кроме T_{01} , не существует. При $\Omega > \Omega_1$ в определенном интервале углов $\varphi_- < \varphi < \varphi_+$ ($\varphi_{\mp} = \varphi_{\mp}(j_1, \Omega_1)$) функция F имеет еще два нуля T_{02} и T_{03} . При этом всегда существует область углов φ_1 из интервала (φ_-, φ_+) , где точки $(T_{01}, 0)$, $(T_{03}, 0)$ — седла, а $(T_{02}, 0)$ — либо узел, либо фокус, либо центр в зависимости от значения $U_y(T_{02})$ ($T_{01} < T_{02} < T_{03}$).

Наряду с решениями системы (2.1), рассмотренными в [14, 15], система (2.1), (2.5) допускает еще решение типа стоячей слоевой волны (волна ионизации и волна рекомбинации, состояние перед волной ионизации совпадает с состоянием после волны рекомбинации). На фазовой плоскости ей соответствует замкнутая сепаратриса, проходящая через точки $(T_{01}, 0)$ и $(T_{03}, 0)$. Условия существования слоевой волны можно представить

в виде

$$\oint \lambda(T) U_y(T) \frac{dT}{dy^*} dT = 0$$

$$\int_{T_{01}}^{T_{03}} \lambda(T) \left[U_y(T) \frac{dT}{dy^*} + F(T) \right] dT = 0$$

При заданной индукции магнитного поля слоевая волна может возникнуть только при определенных значениях угла φ_1 и плотности тока j_1 . Этот факт будет использован при построении общего решения задачи.

Двухтемпературный пограничный слой возникает на границе раздела областей с высокой ($T \gg T_a$) и низкой ($T \sim T_a$, $n \rightarrow 0$) электропроводностями. При построении такого пограничного слоя необходимо наряду с уравнением энергии для электронов использовать уравнение энергии для атомов. В области неравновесной плазмы ($T \gg T_a$) это уравнение можно привести к виду (конвективный перенос отсутствует)

$$(2.7) \quad \Lambda_1^2 \nabla \lambda_a(T_a) \nabla T_a + F_-(T_0(x, y)) = 0$$

где $\Lambda_1 = \sqrt{T_e^* \lambda_e^* \sigma^* (j^* b)^{-1}}$, λ_a — безразмерный коэффициент атомарной теплопроводности в равновесной области ($T \sim T_a$, $n \rightarrow 0$, $\sigma \rightarrow 0$)

$$(2.8) \quad \nabla [\lambda(T_a) + \lambda_a(T_a)] \nabla T_a = 0$$

При построении двухтемпературного пограничного слоя можно использовать приближенный подход,¹ представив функцию F_- во втором уравнении (2.1) в виде

$$F_- = n\tau^{-1}(T)(T - T_{a3})$$

где T_{a3} — неизвестная температура атомов на границе равновесной зоны. Эта неизвестная температура¹ определяется из решения уравнений (2.7), (2.8) в своей зоне и условия сшивки тепловых потоков на поверхности раздела (для температуры атомов может не существовать пограничного слоя, хотя для температуры электронов он существует)

$$\Lambda_1^2 \lambda_a(T_{a3}) \left(\frac{\partial T_a}{\partial n^0} \right)_{-0} - \sqrt{2 \int_{T_{a3}}^{T_0} \lambda(S) F(S) dS} =$$

$$= \Lambda_2^2 [\lambda(T_{a3}) + \lambda_a(T_{a3})] \left(\frac{\partial T_a}{\partial n^0} \right)_{+0}$$

Здесь $\partial / \partial n^0$ — производные по нормали к поверхности разрыва, n^0 — единичный вектор, направленный по нормали в сторону равновесной плазмы, $\Lambda_2 = \sqrt{T_e^* \sigma^* (\lambda_e^* + \lambda_a^*) (j^* b)^{-1}}$.

В тех областях, где зоны равновесной плазмы примыкают к стенкам канала, необходимо использовать условия теплообмена.

3. Уравнения внешнего разложения можно получить, подставив (1.7) в систему (1.4) и приравняв члены одного порядка по Λ . Система уравнений нулевого приближения формально соответствует пренебрежению конвективным и кондуктивным переносом тепла в уравнении энергии для электронов, и для нее справедливы все замечания, приведенные во введении.

Эту систему можно свести к одному уравнению для функции $\Psi_0(x, y)$, как это было сделано в [4, 5]

$$(3.1) \quad a_{11} \frac{\partial^2 \Psi_0}{\partial x^2} + a_{12} \frac{\partial^2 \Psi_0}{\partial x \partial y} + a_{22} \frac{\partial^2 \Psi_0}{\partial y^2} = 0$$

$$a_{11} = 1 - \frac{1 + a_\tau}{j^2} b_1 \left(\frac{\partial \Psi_0}{\partial x} \right)^2 - \frac{\Omega b_1}{j^2} \frac{\partial \Psi_0}{\partial x} \frac{\partial \Psi_0}{\partial y}$$

$$a_{12} = \frac{b_1}{j^2} \left\{ \Omega \left[\left(\frac{\partial \Psi_0}{\partial x} \right)^2 - \left(\frac{\partial \Psi_0}{\partial y} \right)^2 \right] - 2(1 + a_\tau) \frac{\partial \Psi_0}{\partial y} \frac{\partial \Psi_0}{\partial x} \right\}$$

$$a_{22} = 1 - \frac{b_1}{j^2} \left[(1 + a_\tau) \left(\frac{\partial \Psi_0}{\partial y} \right)^2 - \Omega \frac{\partial \Psi_0}{\partial x} \frac{\partial \Psi_0}{\partial y} \right]$$

$$b_1 = \left[\frac{3}{2} + (\varepsilon T_0)^{-1} \right] \left[\frac{5}{2} + (\varepsilon_0 T_0)^{-1} + \frac{\alpha n_0}{2} (1 - \alpha n_0)^{-1} \right]^{-1}$$

$$j^2 = \left(\frac{\partial \Psi_0}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \Psi_0}{\partial y} \right)^2$$

где Ω , b_1 , a_τ и T_0 — известные функции j^2 . Уравнение (3.1) эквивалентно системе двух уравнений первого порядка относительно компонент вектора плотности тока

$$(3.2) \quad \frac{\partial R}{\partial x} + Z(R) \frac{\partial R}{\partial y} = 0$$

$$R = \begin{pmatrix} j_y \\ j_x \end{pmatrix}, \quad Z = \begin{pmatrix} \frac{a_{12}}{a_{11}} & -\frac{a_{22}}{a_{11}} \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Уравнение характеристик системы (3.2)

$$(3.3) \quad \frac{dy^\pm}{dx} \equiv v_\pm = \frac{a_{12} \pm b_1 \sqrt{\Omega^2 - \Omega_*^2}}{2a_{11}}$$

$$\Omega_* = \frac{2}{b_1} \sqrt{1 - b_1(1 + a_\tau)} = \sqrt{\left(\frac{\partial \ln k_-}{\partial \ln n_0} \right)^2 - \left(\frac{\partial \ln \sigma}{\partial \ln n_0} \right)^2}$$

Уравнение (3.1) (или система (3.2)) может быть или эллиптического ($\Omega < \Omega_*$), или гиперболического ($\Omega > \Omega_*$) типов.

Значение Ω_* совпадает с критическим параметром Холла для ионизационной неустойчивости [16].

При $\Omega > \Omega_*$ система (3.2) допускает три класса непрерывных решений: однородное решение ($R \equiv \text{const}$), два особых решения (простые волны или волны Римана [17]) и общее решение. Для особого решения существует связь между компонентами вектора R , т. е. $j_y = j_y(j_x)$. Она соответствует вырождению отображения физической плоскости (x, y) на плоскость годографа (j_x, j_y) : $\partial(j_x, j_y) / \partial(x, y) \equiv 0$. Особые решения системы (3.2) можно представить в виде

$$(3.4) \quad y - v_\pm x = \Phi_\pm(j_x), \quad dj_y/dj_x = v_\pm$$

где Φ — произвольная функция от j_x .

Аналитическое представление общего решения при произвольной зависимости коэффициентов a_{ij} от плотности электрического тока получить не удастся, но для больших параметров Холла это решение (нулевое приближение при разложении в ряд по малому параметру $1/\Omega$) можно построить методом годографа [18].

Уравнение (3.1) в плоскости годографа (j_x, j_y) можно записать в виде

$$(3.5) \quad 2\xi \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \xi \partial \eta} = \frac{\partial \Phi}{\partial \eta}, \quad \xi = j_x^2 + j_y^2, \quad \eta = \frac{j_y}{j_x}$$

Отображение на физическую плоскость осуществляется посредством соотношений

$$(3.6) \quad x = \partial \Phi / \partial j_y, \quad y = -\partial \Phi / \partial j_x$$

Решение уравнения (3.5) находится методом разделения переменных. В результате имеем

$$(3.7) \quad x = \frac{\eta}{\sqrt{1 + \eta^2}} (F_1(\eta) + F_2(\xi)) + \xi \eta \frac{dF_1}{d\eta}$$

$$y = \frac{-1}{\sqrt{1 + \eta^2}} (F_1(\eta) + F_2(\xi)) + \sqrt{1 + \eta^2} \frac{dF_1}{d\eta}$$

Здесь F_1 и F_2 — произвольные функции η и ξ соответственно. В частном случае ($F_1 \equiv 0$) общее решение имеет вид

$$(3.8) \quad \eta = -x/y, \quad \xi = F_2(x^2 + y^2)$$

При этом линии тока являются концентрическими окружностями.

Рассмотрим в качестве примера, позволяющего выписать аналитические зависимости для простых волн, модель слабоионизированной плазмы с преобладанием электрон-атомных столкновений [4, 5]. Для этой модели $b_1 \rightarrow 1$, $a_\tau \rightarrow 0$, $\Omega_* \rightarrow 0$, $\Omega = \text{const}$. Полагая $\Omega_* = 0$, имеем

$$(3.9) \quad \frac{dy^+}{dx} = \frac{j_y}{j_x} \equiv \eta, \quad \frac{dy^-}{dx} = \frac{j_y - \Omega j_x}{j_x + \Omega j_y} = \frac{\eta - \Omega}{1 + \eta \Omega}$$

Уравнение (3.2) можно представить в виде системы, записанной в инвариантах

$$(3.10) \quad \left(\frac{\partial}{\partial x} + \eta \frac{\partial}{\partial y} \right) \left(j^2 \exp \frac{2}{\Omega} \arctg \eta \right) = 0, \quad \left(\frac{\partial}{\partial x} + \frac{\eta - \Omega}{1 + \eta \Omega} \frac{\partial}{\partial y} \right) \eta = 0$$

Из (3.9) следует, что плюс-характеристики совпадают с линиями электрического тока, а минус-характеристики — с линиями электрического поля и являются прямыми линиями. Уравнения особых решений (3.4) в данной модели можно проинтегрировать. С учетом (3.9) получим первое особое решение

$$(3.11) \quad j = \Phi_+(y - \beta x), \quad j_y = \beta j_x, \quad j^2 = j_x^2 + j_y^2$$

где $\beta = \text{const}$. Второе особое решение

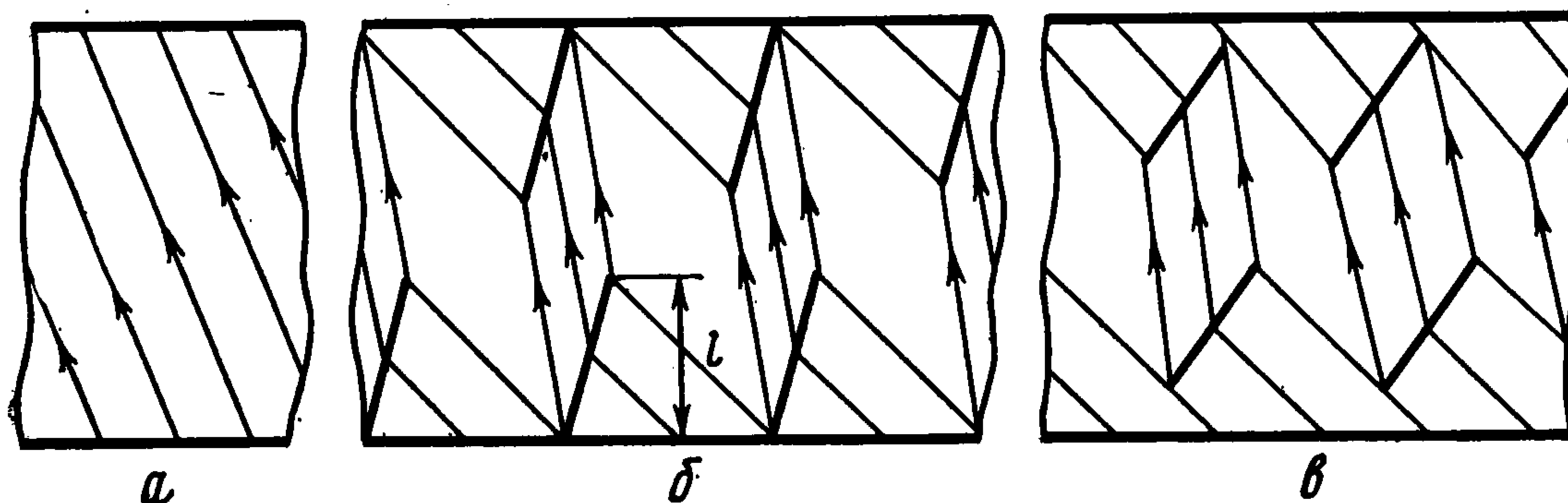
$$(3.12) \quad y - \frac{\eta - \Omega}{1 + \eta \Omega} x = \Phi_-(j_x), \quad j^2 = \text{const} \exp \left(-\frac{2}{\Omega} \arctg \eta \right)$$

В решении (3.11) профиль волны не деформируется, и линии тока параллельны (решение типа токового шнура с произвольным распределением тока в шнуре). Во втором особом решении для частного случая центрированной волны ($\Phi_- \equiv 0$) линии тока представляют собой экспоненциальные спирали. Другими методами это решение было найдено в [4, 5]

$$(3.13) \quad \sqrt{x^2 + y^2} = \text{const} \exp \left(\frac{1}{\Omega} \arctg \frac{x}{y} \right)$$

При $\Omega \rightarrow \infty$ особое решение (3.13) совпадает с частным случаем общего решения (3.8). Произвольное распределение тока по шнуру в решении (3.11) справедливо только для рассматриваемой модели (в общем случае это не справедливо, что можно показать непосредственной подстановкой (3.11) в (3.1)).

4. Рассмотрим канал, безграничный в направлении осей x и z , и ограниченный по оси y двумя электродами ($0 \leq y \leq 1$, $-\infty < x < +\infty$).

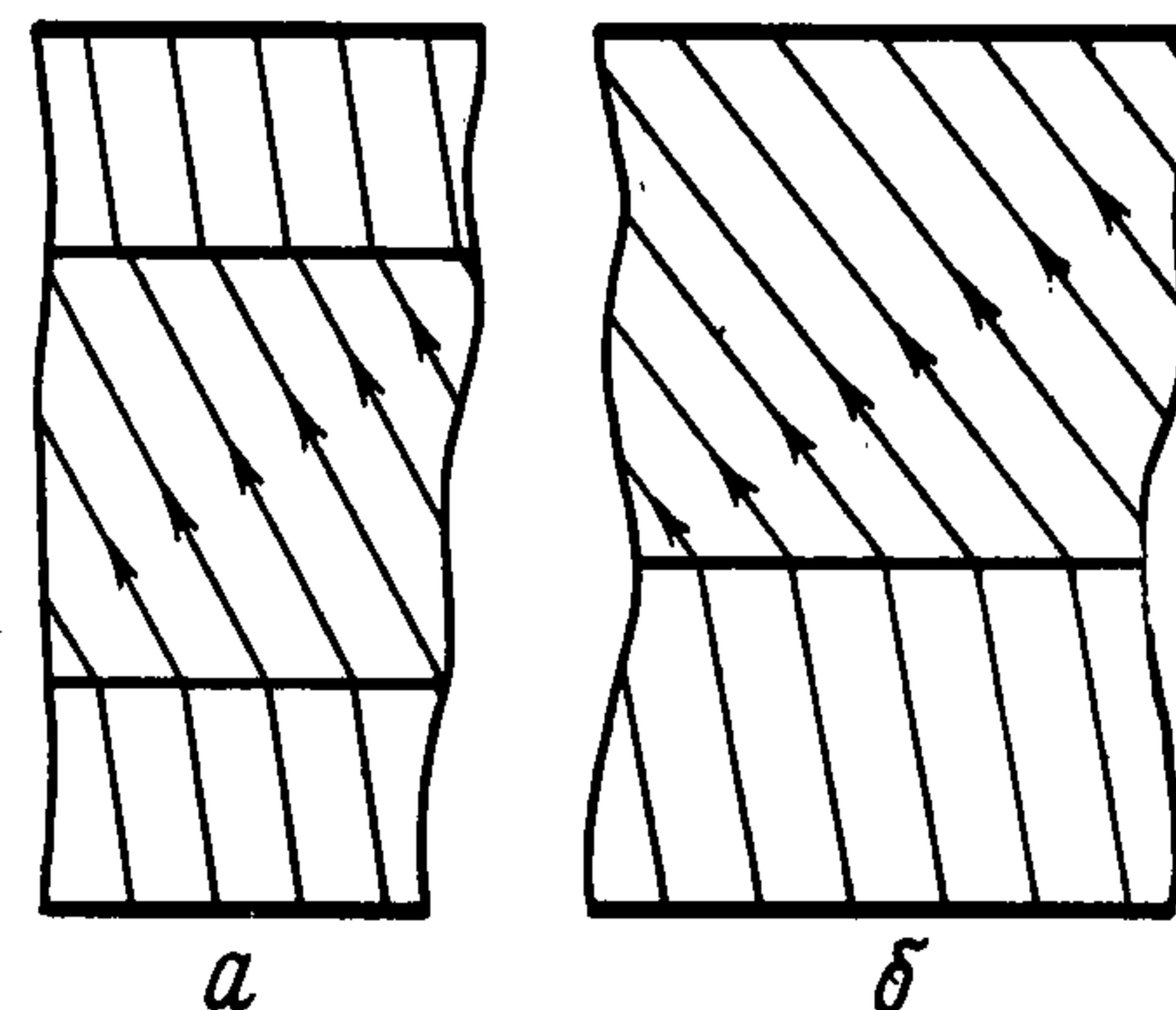


Фиг. 1

К электродам приложена разность потенциалов V . Область внешнего разложения занимает почти весь канал, за исключением узких (порядка Λ) областей пограничного слоя, примыкающих к электродам. При $\Omega < \Omega_*$ единственным непрерывным решением в области внешнего разложения является однородное, линии тока которого изображены на фиг. 1, а. При $\Omega > \Omega_*$ однородное решение неустойчиво и наряду с ним могут возникать неоднородные, разрывные решения системы (3.2). Эти решения представляют собой однородные области, разделенные слоевой волной (фиг. 1, б, в). В зависимости от числа параметров, определяющих неоднородные структуры, их можно разделить на два класса: однопараметрические (б) и двухпараметрические (в). В первом случае структура определяется одним линейным размером, например величиной l , которая связана с разностью потенциалов V соотношением

$$l = \frac{V - (j_2 \cos \gamma_2)^{-1}}{j_1 (\sigma_1 \cos \gamma_1)^{-1} - j_2 (\sigma_2 \cos \gamma_2)^{-1}}$$

Здесь j_1 , σ_1 , γ_1 , j_2 , σ_2 , γ_2 — плотность тока, коэффициент электропроводности и угол, образуемый вектором тока с осью y перед и за волной ионизации соответственно. Двухпараметрические структуры (в) характеризуются наряду с величиной l еще одним параметром, например шириной центрального токового шнура, поэтому двухпараметрическое неоднородное решение является неоднозначным. Полученные структуры (фиг. 1, б, в) отличаются от структур, рассмотренных в работе [19]. Неоднородные решения существуют в определенном интервале изменения V : $j_1 (\sigma_1 \cos \gamma_1)^{-1} \leq V \leq j_2 (\sigma_2 \cos \gamma_2)^{-1}$. При этом ток через единицу поверхности электрода постоянен и равен $j_1 \cos \gamma_1$.



Фиг. 2

Для некоторого состава плазмы в определенном диапазоне напряжений на электродах при $\Omega > \Omega_*$ могут возникать решения, содержащие стоячие волны, плоскость которых параллельна плоскости электродов (линии тока изображены на фиг. 2, а, б). Здесь наряду с однородным решением могут возникать неоднородные решения двух типов: решения, симметричные относительно центра канала (2, а) и несимметричные (2, б). Могут также возникать неоднородные решения с движущимися волнами. Результаты [11] позволяют предположить, что на фоне токовых шнуров развиваются волны, соответствующие автоколебательному режиму, так как шнур можно использовать как канал с непроводящими стенками.

Авторы благодарят участников семинара, руководимого Г. А. Любимовым, за обсуждение работы.

Поступила 14 I 1976

ЛИТЕРАТУРА

1. Kerrebrock J. L. Nonequilibrium ionization due to electron heating. 1. Theory. AIAA Journal, 1964, vol. 2, No. 6.
2. Емец Ю. П. Метод годографа в электродинамике сплошных нелинейно-проводящих сред. ПММ, 1967, т. 31, вып. 6.
3. Oliver D. A., Mitchner M. Nonuniform electrical conduction in MHD channels. AIAA Journal, 1967, vol. 5, No. 8.
4. Глушков И. С., Карпухин В. Т., Недоспасов А. В. Распределение тока в $E \times H$ разряде с секционированными электродами при неравновесной проводимости плазмы. Теплофизика высоких температур, 1969, т. 7, вып. 2.
5. Lengyel L. L. Current and potential distribution in nonequilibrium MHD plasmas at high magnetic field strengths. AIAA Journal, 1971, vol. 8, No. 10.
6. Руткевич И. М. К построению решений нелинейных плоских задач о распределении тока в анизотропно проводящей среде. ПММ, 1974, т. 38, вып. 5.
7. Куликовский А. Г., Регурер С. А. Об устойчивости и эволюционности распределения электрического поля в среде с нелинейной проводимостью. ПММ, 1968, т. 32, вып. 4.
8. Brederlow G., Witte K. J., Zinko H. Investigation of the discharge structure in a noble gas alkali MHD generator plasma, pt.1. AIAA Journal, 1973, vol. 11, No. 8.
9. Маликов М. М. Экспериментальное исследование неравновесной плазмы. Теплофизика высоких температур, 1970, т. 8, вып. 2.
10. Gilpin R. R., Zukoski E. E. Experimental and theoretical studies of electrothermal waves. AIAA Journal, 1969, vol. 7, No. 8.
11. Синкевич О. А. О характере потери устойчивости в неравновесной замагниченной плазме. ПММ, 1974, т. 38, вып. 4.
12. Lagerstrom P. A., Casten R. G. Basic concepts underlying singular perturbation techniques. SIAM Rev., 1972, vol. 14, No 1.
13. Ван-Дайк М. Методы возмущений в механике жидкости. М., «Мир», 1967.
14. Синкевич О. А. Волны ионизации и рекомбинации в слабоионизированной замагниченной плазме. ПММ, 1973, т. 37, вып. 5.
15. Синкевич О. А. Ионизационные волны конечной амплитуды в частично ионизированной плазме. Теплофизика высоких температур, 1975, т. 13, вып. 1.
16. Velikhov E. P., Dykhne A. M. Plasma turbulence due to ionization instability in a strong magnetic field. Compt. Rendus 6-e Conférence Internat. phénomènes ionization gaz, vol. 4, Paris, 1963.
17. Куликовский А. Г., Любимов Г. А. Магнитная гидродинамика. М., Физматгиз, 1962.
18. Станкович К. П. Неустановившиеся движения сплошной среды. М., «Наука», 1971.
19. Дыхне А. М. Нелинейные явления в плазме при наличии ионизационной неустойчивости. Proc. 5th Internat. Conf. Magnetohydrodynamic Electr. Power Generat., vol. 2. Munich., 1971.